PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XVIII Palchetto

Num.° d' ordine 32

NAZIONALE
B. Prov.
1257
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

Digitized by Google

B. Pub.
II
1957

9.3.

Digitized by Google

SON
G10475

COMMENTAIRES

SUR LA

GEOMETRIE

DE

M. DESCARTES.

Par le R. P. CLAUDE RABUEL, *de la Compagnie de JESUS.*

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

A LYON,

Chez MARCELLIN DUPLAIN, Ruë Merciere.

MDCCXXX.

AVEC APPROBATIONS ET PRIVILEGE DU ROY.

PREFACE.

IL ſeroit inutile aujourd'hui d'entreprendre un éloge de Mr Descartes. Ses découvertes dans la Phyſique & dans les Mathematiques, font mieux connoître le caractére de ce Grand Homme, que tout ce que nous en pourrions dire. Si dans la Philoſophie, il s'eſt quelquefois écarté du vrai, en abandonnant les opinions communes; du moins lui devons-nous cette juſtice, que dans les choſes mêmes qu'il ne nous propoſe que comme problematiques, on reconnoît toûjours cette étenduë & cette ſuperiorité de genie, qui l'ont rendu l'admiration de ſon ſiecle. Son Chef-d'œuvre eſt ſans doute ſa Geometrie. C'eſt là que prenant une route inconnuë à tous ceux, qui l'avoient precedé, il ſe fraie un chemin tout nouveau. M. Descartes remarqua, qu'un Problême ſeul avoit été l'écueil de toute l'Antiquité. Loin de s'en prendre aux Anciens, qui ne manquoient certainement, ni d'étude, ni de lumieres: il en rejetta toute la faute ſur la Geometrie ancienne & ſur ſes Methodes. Dans cette idée il en chercha de nouvelles; & faiſant reflexion que tout Problême ſe termine enfin à une égalité, il fixe toutes ſes recherches aux moyens de la trouver. Il ſubſtituë d'abord l'expreſſion des Grandeurs, aux Grandeurs elles-mêmes, & par l'alliage & le mêlange du calcul Arithmetique, des caractéres Algebriques avec les operations de la Geometrie ordinaire, il ſe crée en quelque façon la matiere, qui doit être employée à la compoſition des termes de ſon égalité; mais ce n'eſt là qu'un pas. Il conſidere la nature de ſon Problême, il en rapproche, il en examine toutes les conditions, & par la ſimple inſpection de ce qui arriveroit, ſi la choſe étoit telle en effet, que le Problême la demande, il range ſes termes & forme une égalité, pour laquelle nous le voyons employer differens lieux, ſelon les differens degrez auſquels l'égalité eſt élevée; mais elle n'eſt pas encore reſoluë: c'eſt un tout, produit par la multiplication de pluſieurs parties, il faut le décompoſer pour en découvrir les

racines & le reduire aux termes les plus ſimples, qu'il ſoit poſſible. Et c'eſt ce que M. DESCARTES execute enfin dans le dernier Livre.

Cet Ouvrage qu'un habile Geometre de ce ſiecle appelle avec raiſon * *la Geometrie Françoiſe*, étoit d'une difficulté preſqu'inſurmontable. M. DESCARTES avoit affecté de le reſſerrer dans les bornes les plus étroites. Bien des raiſons, qu'on peut voir dans ſes lettres, l'y avoient engagé. Meſſieurs *de Beaune*, *de Fermat*, *de Vvitt*, &c. en ont développez quelques endroits. M. de *Schooten* a voulu éclaircir le tout; mais le Commentateur ſemble avoir aſpiré lui-même à la gloire d'être Commenté à ſon tour. Il exige en plus d'un endroit autant d'étude & d'application, qu'il en faudroit pour comprendre le texte même, qu'il prétend expliquer.

Le Commentaire que nous donnons au Public, s'étend ſur toute la Geometrie de M. DESCARTES, & n'a point le défaut de l'obſcurité. Le Texte y eſt ſuivi article par article. Par tout on trouve les éclairciſſemens neceſſaires & des Exemples de tous les cas, dont M. DESCARTES ne dit ſouvent qu'un mot, & que tout autre qu'un Geometre conſommé ne ſçauroit entrevoir.

Le R. P. RABUEL n'y travailla d'abord que pour ſervir aux jeunes Jeſuites, qui étudioient ſous lui les Mathematiques. C'étoient des Commençans qu'il falloit aider, & à qui il ne vouloit rien laiſſer ignorer de tout ce que M. DESCARTES ne fait qu'indiquer. Il falloit raprocher de leur principe une foule de conſequences éloignées, en faire voir la liaiſon, & le rapport neceſſaire. M. DESCARTES reſout le Problême de Pappus dans le cercle; mais cette ſolution eſt generale, & la ſuppreſſion de quelques termes, le changement de quelques ſignes, plus ou moins de lignes exigent à tout moment un nouveau lieu, & dans ce lieu, combien de combinaiſons? Il falloit tout developper; de là ces differentes applications du Problême, ce grand nombre d'Exemples, qui quoiqu'uniformes en apparence ont cependant, preſque tous, chacun une difficulté que M. DESCARTES avoit enviſagée, & dont il ne parloit pas, parce qu'il s'ennuyoit *d'en tant écrire*. Je ne dis rien de la methode des tangentes, de ſon application aux queſtions *de Maximis & minimis*, des ovales & de leur formation, des lignes ſur les ſurfaces cour-

* Le P. CASTEL *Mathematique univerſelle.*

bes, de la conſtruction des Problêmes ſolides & plus que ſolides, de la nature des équations, &c. Le R.P. RABUEL n'abandonne jamais ſon texte. Il le ſuit toûjours avec une juſteſſe & une clarté, qui ne laiſſe rien à deſirer. Il fait plus : pour apprendre à ſon Lecteur l'art d'inventer & de trouver, il le conduit, comme par la main, dans les routes qu'a tenuës M. DESCARTES, & lui fait voir par quel chemin ce grand Geometre eſt arrivé où nous le voyons ; ce qui n'eſt pas un des moindres avantages du Commentaire.

Cet Ouvrage étoit achevé depuis long-tems ; & déja pluſieurs fois on avoit voulu engager le R. P. RABUEL, à le donner au Public ; mais ſon extrême modeſtie s'y étoit toûjours oppoſée. Satisfait de l'unique plaiſir qu'il trouvoit à étudier, il ne pouvoit ſe reſoudre à devenir Auteur. Depuis près de vingt années qu'il enſeignoit les Mathematiques, au Grand College de Lyon, il n'en eſt aucune partie qu'il n'eût approfondie. Il nous reſte de ce ſçavant Jeſuite, un Traité d'Algebre, des Sections Coniques, des lieux Geometriques du calcul differentiel, & du calcul integral. Ce dernier Traité eſt un Ouvrage neuf. Ce que nous en a donné M. *Carré* eſt admirable, mais il ne ſuffit pas ; c'eſt ce qui obligea le R.P. RABUEL à ſuivre les vûës de cet illuſtre Academicien, & à développer ce que celui-ci ſe contente d'abandonner à l'étude & au genie de ſes Lecteurs.

Tous ces Ouvrages que nous ferons bientôt paroître, ſont le fruit d'un long travail, qu'une ſanté toûjours foible & délicate ne permettoit guéres de ſoûtenir, & que de frequentes maladies obligerent ſouvent d'interrompre. Mais le R.P. RABUEL étoit de ces hommes, qui trouvent dans leur propre fond, dequoi ſuppléer au défaut du travail. Je lui dois ce témoignage, & la reconnoiſſance pour les bontez dont il m'a honoré, m'y engage. Il fut mon Maître, c'eſt de lui que je pris mes premieres leçons de Geometrie ; l'accès qu'il vouloit bien m'accorder auprès de lui, me donna lieu de le connoître plus parfaitement. Il étoit difficile de voir en un ſeul homme tant de talens réünis & un eſprit auſſi univerſel. Son gout exquis pour les belles Lettres, & ſur tout pour la Poëſie latine, ne ſembloit pas nous annoncer un Geometre ; mais il ſe ſentoit, ſans s'en appercevoir, une élevation d'eſprit à n'en pas demeurer là. Les

ſuccès qu'il eut dans ſes études de Theologie, l'auroient fixé ſans doute à cette ſcience, ſi dans cette multiplicité de talens, ſon goût particulier & plus encore les ordres de ſes Superieurs ne l'euſſent déterminé en faveur des Mathematiques: maisce ne fut qu'après avoir enſeigné avec éclat la Philoſophie dans deux des principales Villes du Royaume. Ses Ecrits que l'on conſerve avec ſoin, portent le caractére de leur Auteur. Partout on y reconnoît un genie ſiſtematique & une ſublimité,où les Eſprits ordinaires ne ſçauroient atteindre. Enfin placé par l'obéïſſance au Grand College de Lyon, pour y enſeigner les Mathematiques, il ſe livra tout entier à cette étude. Les anciennes & les nouvelles Methodes, rien n'échapa à ſes recherches. Auſſi tous ceux qui le conſulterent, furent-ils toûjours charmez de ſa capacité, mais plus encore remplis d'admiration pour les grandes qualitez, dont le Ciel l'avoit enrichi: une modeſtie qu'on auroit regardé comme exceſſive dans tout autre que dans un Religieux; une regularité conſtante & une exactitude ſcrupuleuſe pour tous les devoirs de ſon Etat; une droiture que rien n'eût été capable de flêchir; une égalité d'ame qu'on ne vit jamais alterée; le cœur le meilleur & le plus tendre pour ſes amis; une patience inalterable dans ſes maladies, une reſignation parfaite aux ordres du Ciel, malgré tous les dégouts que cauſe naturellement une vie accompagnée d'infirmitez, & qui n'avoit d'autre conſolation, que celle que l'on goûte à offrir à Dieu ce que l'on ſouffre. Telles ſont les vertus qui caracteriſerent le R. P. RABUEL, & par l'exercice deſquelles, il ſe diſpoſoit ſans ceſſe à paroître devant le Seigneur. Ce fut au commencement de l'impreſſion de ſon Commentaire, à laquelle on l'avoit enfin determiné, qu'épuiſé par un travail aſſidu, il nous fut enlevé le 12. d'Avril 1728. dans la 60. année de ſon âge, & la 43. depuis ſon entrée dans la Compagnie de JESUS. Je ſuis perſuadé que ceux qui liront ſes Ouvrages, concevront de ce ſçavant Jeſuite une bien plus grande idée, que celle que j'ai tâché de leur en donner, & que ceux qui l'ont connu pendant ſa vie, me ſçauront mauvais gré d'avoir dépeint ſi mal les vertus d'un homme, que les regrets de ſa Compagnie & de tous ſes amis honorent encore plus que tous les éloges que j'en pourrois faire.

TABLE

Pour trouver les Endroits citez.

LIVRE PREMIER, PARTIE PREMIERE.

SECTION I. *Introduction à la Geometrie de M. DESCARTES.* page 3
Sect. II. *Rapport du calcul Arithmetique aux operations de la Geometrie.* 6
Art I. p. 7. Art. II. p. 9. Art. III. p. 12. Art. IV. p. 13.
Sect. III. *Comment on peut uſer de chiffres en Geometrie.* 14
Art. I. II. p. 13. Art. III. p. 17.
Section IV. *Comment il faut venir aux équations, qui ſervent à reſoudre les Problêmes.* 18

PARTIE SECONDE.

Methodes pour les Problêmes Plans. 47
Art. I. p. 48. Art. II. p. 54. Art. III. p. 59.

PARTIE TROISIÉME.

Sect. I. *La queſtion de Pappus eſt propoſée.* 61
Art. I. p. 64. Art. II. p. 67.
Sect. II. *Réponſe à la queſtion de Pappus.* 72
Sect. III. *Le commencement du calcul pour le problême de Pappus.* 74
Sect. IV. *Reflexions ſur le calcul precedent.* 78
Sect. V. *Comment on connoît de quel degré eſt un Problême & comment on trouve tous les points, qui y ſatisfont.* 80
Art. I. p. 82. Art. II. p. 87.

LIVRE II. PARTIE I. De la nature des lignes courbes.

Sect. I. *Des Problêmes Geometriques.* 91
Sect. II. *Des lignes Geometriques & Méchaniques.* 93
Art. I. p. 95. Art. II. p. 97. Art. III. p. 100.
Sect. III. *De l'inſtrument pour les moyennes proportionelles.* 106
Sect. IV. *De la diviſion des lignes courbes en certains genres, &c.* 108
Art. I. p. 108. Art. II. p. 111. Art. III. p. 112.

PARTIE SECONDE.

Sect. I. *Solution generale du Problême de Pappus propoſé en 3. ou 4. lignes.* 146
Art. I. p. 147. Art. II. p. 154. Art. III. p. 156. Art. IV. p. 166. Art. V. p. 168.
Art. VI p. 184. Art. VII. p. 209. Art. VIII. p. 236. Art. IX. p. 242. Art. X. p. 245.
Sect. III. *Solution du Problême de Pappus propoſé en cinq lignes.* 254
Art. I. p. 256. Art. II. p. 258. Art. III. p. 282. Art. IV. p 284. Art. V. & VI. p. 285.

PARTIE TROISIÉME.

Sect. I. *Des proprietez en general des lignes courbes deduites de leur équation.* 289
Sect. II. *Methode pour mener les tangentes des courbes.* 297
Art. I. p. 299. Art. II. p. 304. Art. III. p. 308. Art. IV. p. 316.
Art. V. *Cette Methode ſert à d'autres Problêmes qu'à celui des tangentes.* 319.
Art. VI. p. 332. Art. VII. p. 333.

PARTIE QUATRIÉME.

De quelques figures de verre, qui ſervent à la reflexion & à la refraction de la lumiere. 337
Sect. I. *De la reflexion & de la refraction de la lumiere.* 338
Sect. II. *La deſcription des quatre genres d'ovales.* 340

Digitized by Google

Sect III. *Proprietez de ces ovales.* 345
Art. I. p. 348. Art. II. p. 357. Art. III. p. 364. Art. IV. p. 366.
Sect. IV. Art. I. *De la reflexion, &c. dans les courbes du premier genre.* 370
Sect. V. *La figure qu'il faut donner aux verres, &c.* 374
Art. II. p. 383. Art. III. *De quelques cas que M. DESCARTES n'a pas resolus.* 390
Art. IV. *Comment M. DESCARTES a pû trouver ce qu'il enseigne dans cette 2. Partie.* 393

PARTIE CINQUIÉME.

Des lignes qui se décrivent sur une surface courbe. 398

LIVRE TROISIÉME. PARTIE PREMIERE.

Sect. I. *De l'instrument inventé pour les moyennes proportionelles.* 413
Sect. II. *Des lignes dont il faut se servir pour la construction d'un Problême.* 418

PARTIE SECONDE.

Sect. I. *De la nature des équations, de leurs racines, de leur formation, &c.*
Art. I. p. 420. Art. II. p. 422. Art. III. p. 427.
Section II. *Preparation des équations.* 429
Art. I. p. 430. Art. II. p. 431. Art. III. p. 435. Art. IV. p. 439. Art. V. p. 441.
Art. VI. p. 442. Art. VII. p. 444. Art. VIII. p. 448. Art. IX. p. 449. Art. X. p. 450.

PARTIE TROISIÉME.

Sect. I. Art. I. *Trouver le plus grand diviseur commun de deux quantitez, & tous les diviseurs d'une quantité.* 451. Art. II. p. 453.
Sect. II. *Découvrir toutes les racines d'une équation.* 454
Sect. III. *La reduction des équations cubiques.* 462
Art. I. p. 462. Art. II. p. 471.
Sect. IV. Art. I. *La reduction des équations de quatre dimensions & quels sont ceux qui sont solides.* 472
Art. II. p. 482. Art. III. p. 490.
Sect. V. *Regle generale pour les équations de toutes sortes de dimensions.* 491
Art. I. p. 492. Art. 2. p. 496. Art. III. p. 500. Art. IV. p. 503.

PARTIE QUATRIÉME.

Sect. I. *La façon generale de construire les Problêmes reduits à une équation de trois ou quatre dimensions.* 509
Art. I. p. 511. Art. II. p. 517.
Sect. II. *Utilité des Regles de la Section premiere.* Art. I. 525
Art. II. p. 529. Art. III. p. 533. Art. IV. p. 540. Art. V. p. 543.
Section III. *Tous les Problemes solides se peuvent reduire à trouver deux moyennes proportionelles, ou à diviser un angle en trois parties égales.* 545
Sect. IV. Art. I. p. 457. Art. II. p. 559.
Section V. *Pourquoi les Problêmes solides ne peuvent être construits sans les Sections coniques, &c.* 563

PARTIE CINQUIÉME.

Section I. *Façon generale pour construire tous les Problêmes reduits à une équation, &c.* 566
Sect. II. *Exemples.* 577
Section III. *Autre Methode, &c.* 586
Sect. IV. *Et conclusion.* 590

Fin de la Table.

COMMENTAIRES

COMMENTAIRES

SUR LA

GEOMETRIE

DE Mr DESCARTES.

J'ENTREPRENS d'expliquer la Geometrie de Mr Descartes, & de la rendre facile à ceux qui l'étudient pour la premiere fois. Je ſuivrai le Texte depuis le commencement juſqu'à la fin, je l'examinerai par Parties, & ſur chaque endroit je mettrai tout ce que j'ai cru utile pour le rendre intelligible. Je pourrai paroître diffus à ceux qui entendent déja ces matieres : mais peut-être ne le paroîtrai-je pas à ceux qui ne les ſavent pas encor, & c'eſt pour eux que j'écris. Je ſuis même perſuadé qu'on aura plûtôt lû & compris la Geometrie & les Commentaires, qu'on n'aura lû & compris la Geometrie ſans un ſemblable ſecours : ſur tout ſi l'on ne ſe contente pas d'entrevoir, que les choſes peuvent être telles que l'Auteur les aſſure ; mais qu'on veuille ſe convaincre par les operations neceſſaires, qu'elles le ſont en effet. J'avouë que quand on eſt ſavant, on a de la peine à ſe repreſenter ce qu'on étoit avant que de le devenir, & qu'il y a des eſprits plus penetrans les uns que les autres ; que les habiles & les commençans qui ont beaucoup de penetration ſouffrent impatiemment les explications étenduës : mais ils peuvent parmi le grand nombre d'exemples choiſir ceux qu'ils aimeront

mieux examiner, & ſe ſouvenir que les eſprits moins penetrans ont beſoin d'un plus grand ſecours ; & que, comme ces derniers compoſent le plus grand nombre, & que par leur application plus conſtante ils font ſouvent de très-grands progrès dans les Sciences, ils meritent qu'on les aide dans les commencemens.

Je ne mets ici aucun éloge de Mr DESCARTES, non ſeulement parce qu'il eſt difficile qu'un éloge réponde à l'idée qu'on a de ce grand homme : mais encor parce que ce ſeroit le loüer aſſez, que de bien expliquer ſa Geometrie.

Cet Ouvrage eſt ſi eſtimé, qu'il n'y a aucun de ceux, qui pretendent ſe diſtinguer dans les Mathematiques, qui ne veüille l'avoir lû. * *On lui donne ſans peine la preference ſur tous les autres Ouvrages de M. Deſcartes.* ** Cet Auteur lui-même trouvoit ſa Geometrie telle, qu'il n'y ſouhaittoit rien davantage. *** Et quoiqu'il aſſure qu'il ne l'avoit preſque compoſée, que pendant qu'on imprimoit ſes Meteores, & que même il en avoit inventé une partie pendant ce tems-là ; il avoüe, qu'il n'avoit pas laiſſé de s'y ſatisfaire autant & plus qu'il ne ſe ſatisfaiſoit d'ordinaire de ce qu'il écrivoit.

* *Huet. cenſ. Phil. cart c.8. § 5.*
** *Tom. 3. Lett. 73. au P. Marſenne.*
*** *Tom. 3. Lett. 26. à un Pere Jeſuite.*

Si nous voulons encor apprendre de M. DESCARTES, combien ſa Geometrie a beſoin d'explication, il nous dit dans l'Avertiſſement, qu'il a mis à la tête de cet Ouvrage ; *Juſques ici j'ai tâché de me rendre intelligible à tout le monde : mais pour ce Traité je crains qu'il ne pourra être lû que par ceux qui ſavent déja ce qui eſt dans les Livres de Geometrie. Car d'autant qu'ils contiennent pluſieurs veritez fort bien démontrées ; j'ai cru qu'il ſeroit ſuperflu de les repeter, & n'ai pas laiſſé pour cela de m'en ſervir.* * Ailleurs il aſſure qu'il y a peu de gens, qui puiſſent entendre ſa Geometrie. Il en parle dans un autre endroit de cette maniere. ** *Seulement y ai-je omis quantité de choſes, qui auroient pû ſervir à la rendre plus claire, ce que j'ai fait à deſſein, & je ne voudrois pas y avoir manqué.... Rien ne m'avoit ci-devant fait propoſer de la refaire, que pour l'éclaircir en faveur des Lecteurs ; mais je vois qu'ils ſont la plûpart ſi malins, que j'en ſuis entierement dégoûté.*

* *Tom. 3. Lett. 73.*
** *Tom. 3. Lett. 93. au P. Merſenne.*

LA GEOMETRIE DE M. DESCARTES.

LIVRE I.

ON peut diviſer ce Livre en trois Parties : La premiere eſt comme une introduction à la Geometrie de M. DESCARTES ; la ſeconde enſeigne la maniere de reſoudre les Problêmes plans ; la troiſiéme contient le commencement du Problême de Pappus.

PARTIE PREMIERE.

Introduction à la Geometrie de M. Deſcartes.

SECTION I.

M. DESCARTES.

TOUS les Problêmes de Geometrie ſe peuvent facilement reduire à tels termes, qu'il n'eſt beſoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Dans la Geometrie l'on cherche ou des Points, ou des Lignes, ou des Surfaces, ou des Solides. Ceux qui ont déja reſolu quelques Problêmes de Geometrie, auront pû s'appercevoir, que dans tous ces cas, il ne faut pour conſtruire un Problême, que trouver la longueur d'une ou de pluſieurs lignes droites. Si quelqu'un en doutoit encore, il pourra le remarquer dans les Problêmes qui ſuivent. Par le premier l'on cherche un Point, par le ſecond des Lignes, par le troiſiéme des Surfaces, par le quatriéme un Solide : & dans tous la connoiſſance de quelques lignes droites, qu'on trouve, donne la conſtruction du Problême.

PROBLEME I.

LA ligne AB fig. 1. étant donnée, il faut trouver ſur cette ligne le Point C, qui la diviſe de telle ſorte, que le Rectangle ſous la toute AB & le moindre ſegment BC ſoit égal au quarré du plus grand ſegment AC. c'eſt la Prop. 11. l. 2. Elem. d'Euclide. FIG. 1.

Suppoſons la diviſion faite au point C, & nommons AB, a; AC, x. BC ſera $a - x$. Nous aurons par la nature du Problême $AB \times BC = \overline{AC}^2$ $aa - ax$, $= xx$, $xx + ax = aa$; mettons $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, c'eſt $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa$; extrayons la racine quarrée de chaque côté, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa}$

Conſtruction. Sur l'extrêmité B de la ligne AB élevons la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, joignons DA; du point D comme centre, & de l'intervale DB décrivons l'arc BE, & du point A comme centre à l'intervale AE, l'arc EC. Le point C eſt celui que l'on cherche.

Démonſtration. Le triangle ABD eſt rectangle en B; donc 47. 1. Eucl. $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa$, & $AD = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Mais $DE = DB = \frac{1}{2}a$: donc $AE = AD - DE = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa} = AC = x$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME II.

FIG. 2. LEs lignes a, b, Fig. 2. étant données, il en faut trouver deux autres telles, que a, ſoit leur moyenne proportionnelle geometrique, & b leur moyenne proportionnelle arithmetique.

Nommons les deux lignes inconnuës z, x. L'on a par la ſuppoſition la proportion geometrique continuë $z : a :: a : x$, & 17. 6. Eucl. $zx = aa$. $z = \frac{aa}{x}$. L'on a auſſi la proportion arithmetique continuë $z.b : b.x$, & $z + x = 2b$, parce que dans une proportion arithmetique continuë de trois termes, la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen : & de cette derniere équation l'on conclut celle-ci $z = 2b - x$.

L'on compare enſuite les deux valeurs de z, $\frac{aa}{x} = 2b - x$; l'on multiplie toute cette équation par x, & l'on fait $aa = 2bx - xx$, $xx - 2bx = -aa$. L'on met bb de chaque côté, c'eſt $xx - 2bx + bb = bb - aa$. L'on extrait la racine quarrée de chaque membre $x - b = \sqrt{bb - aa}$, $x = b + \sqrt{bb - aa}$. Après cela l'on ſubſtituë cette valeur de x dans l'équation $z = 2b - x$, & l'on trouve $z = b - \sqrt{bb - aa}$.

Les lignes z, x étant trouvées, on conſtruira le Problême de cette ſorte. Sur un point quelconque A de la ligne infinie DE, élevez la perpendiculaire $AB = a$, & faites $BC = b$. Du point C comme centre & de l'intervale CB, décrivez le demi-cercle DBE. La ligne DA eſt x, la ligne AE eſt z.

Dém. Le triangle CAB eſt rectangle en A: donc 47. 1. Eucl. $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = bb - aa$, & la ligne $AC = \sqrt{bb - aa}$. D'ailleurs $CD = CE = CB, = b$, car ce ſont des rayons du même cercle : donc $AD = DC + CA$, $b + \sqrt{bb - aa} = x$; $AE = CE - CA$, $b - \sqrt{bb - aa} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit $a = 6$, $b = 10$, l'on aura $\sqrt{bb - aa} = \sqrt{64} = 8$. & $z = b - \sqrt{bb - aa} = 2$. $x = b + \sqrt{bb - aa} = 18$. La proportion geometrique continuë ſera $2.6.18$, l'Arithmetique $2.10.18$.

PROBLEME III.

FIG. 3. TRouver deux quarrez, qui pris enſemble ſoient égaux au rectangle donné $ABCD$ Fig. 3.

Nommons les côtez connus du rectangle AB, a; BC, b; le rectangle $ABCD$ ſera ab, ; & ſi nous appellons les quarrez cherchez l'un zz, l'autre xx; nous ferons par la ſupp. $zz + xx = ab$, $zz = ab - xx$, $z = \sqrt{ab - xx}$.

Le Problême ſe conſtruira de cette maniere. Produiſez la ligne AB en E, juſqu'à ce que BE ſoit égale à BC; ſur le diametre AE decrivez le demi-cercle EFA, prolongez encor BC en F, & ſur le diametre BF decrivez un autre demi-cercle BGF. Tirez une corde quelconque BG & joi-

Digitized by Google

gnez GF. Ces deux lignes BG, GF ſont celles que l'on cherche x, z. Fig. 3.

Dem. L'angle BGF dans le demi-cercle eſt droit 31. 3. Eucl. & le triangle BGF rectangle : donc 47. 1. Eucl. $\overline{FB}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{BG}^2$, $zz + xx$. De plus 13. 6. Eucl. $\overline{BF}^2 = AB \times BE = ab$, puiſque $BE = BC$: donc $\overline{FB}^2 = zz + xx = ab$. C'eſt à dire, que les quarrez des lignes BG, GF ſont égaux au rectangle donné $ABCD$. Ce qu'il falloit démontrer.

Comme on peut tirer BG de la longueur qu'on veut, pourveu qu'elle ſoit une corde du demi-cercle BGF : il ſuit, qu'on peut trouver pluſieurs quarrez, qui deux à deux ſoient égaux au rectangle $ABCD$.

PROBLEME IV.

DIviſer la liqueur contenuë dans un verre de figure conique en deux parties égales. Ou diviſer un cone droit donné DAE Fig. 4. par le plan FBG parallele à la baſe DCE, de telle ſorte que le petit cone FAG ſoit la moitié du grand DAE. Fig. 4.

L'on connoît le grand cone DAE, & par conſequent ſon axe AC, & le diametre DE de la baſe. Il ſuffit de trouver AB axe du petit cone. Car alors il n'y aura plus qu'à faire paſſer par le point B le plan FBG parallele à la baſe DCE.

Nommons le grand cone DAE, $2b$; le petit cone FAG, b ; l'axe AC, a ; le diametre DE, $2c$; le rayon CE, c, l'axe AB, z ; le diametre FG, $2x$; le rayon BG x.

Les cones DAE, FAG ſont ſemblables def. 21. l. 11. Eucl. & Prop. 14. l. 12. Eucl. Ces deux cones ſont en raiſon triplée des diametres de leurs baſes. C'eſt pourquoi ſi je fais cette progreſſion qui commence par les diametres des baſes $2c : 2x :: 2x : \frac{2xx}{c} :: \frac{2xx}{c} : \frac{2x^3}{cc}$; le premier terme $2c$ eſt au dernier $\frac{2x^3}{cc}$, en raiſon triplée du diametre $2c$ au diametre $2x$. Le cone DAE, $2b$ ſera donc auſſi au cone FAG, b : comme $2c$ à $\frac{2x^3}{cc}$. Et 16. 6. Eucl. $2bc = \frac{4bx^3}{cc}$. Multipliant par cc, & diviſant par $2b$, c'eſt $c^3 = 2x^3$; $x^3 = \frac{1}{2}c^3$. $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3}$, qui eſt le rayon BG.

De plus la ligne CE eſt parallele à la ligne GB, ainſi 29. 1. Eucl. les triangles ACE, ABG ſont équiangles, & 4. 6. Eucl. $CE, c : CA, a :: BG, \sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3} : BA, z$. Donc 16. 6. Eucl. $cz = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3}$. $z = \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{1}{2}c^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{a^3c^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3} = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Maintenant pour avoir la longueur de la ligne $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3}$. Sur l'axe AB Fig. 5. Fig. 5. avec le parametre $AD = a$, decrivez la parabole AF ; coupez $AC = \frac{1}{2}a$; au point C élevez la perpendiculaire $CE = \frac{1}{4}a$; du point E comme centre, de l'intervale EA decrivez le cercle ABF, qui coupera la parabole au point F, par lequel vous tirez l'appliquée FL perpendiculaire ſur l'axe. Cette appliquée FL eſt $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3}$. Joignez EF, & abaiſſez la perpendiculaire EM ſur FL.

Dem. nommons FL, z ; AL, y ; par la nature de la parabole l'on a $\overline{FL}^2$.

Fig. 5. $= AL \times AD$, $zz = ay$. $y = \frac{zz}{a}$. Ainſi $EM =$ (34. 1. Eucl.) $CL = AL - AC = \frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a$. De même $ML = EC$, $\frac{1}{4}a$; & $FM = FL - ML$, $z - \frac{1}{4}a$. D'un autre côté le triangle eſt rectangle en C, & 47. 1. Eucl. $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{16}aa = \overline{EF}^2$; & dans le triangle EMF rectangle en M, $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{16}aa = \frac{z^4}{aa} - zz + \frac{1}{4}aa + zz - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$, ce qui ſe reduit à $\frac{z^4}{aa} - \frac{1}{2}az = 0$, $\frac{z^4}{aa} = \frac{1}{2}az$, & multipliant par aa, diviſant par z, $z^3 = \frac{1}{2}a^3$, dont la racine cubique eſt $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3} = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ valeur cherchée de AB Fig. 4. On n'a donc qu'à faire paſſer par le point B, un plan GBF parallele à la baſe ECD, pour avoir le cone FAG moitié du cone EAD. Ce qu'il falloit démontrer.

SECTION II.

Comment le Calcul de l'Arithmetique ſe rapporte aux operations de la Geometrie.

M. DESCARTES.

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

ET comme toute l'Arihtmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diviſion, & l'Extraction des Racines, qu'on peut prendre pour une eſpece de Diviſion : Ainſi n'a-t-on autre choſe à faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer à être connuës, que leur en ajoûter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité, pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement être priſe à diſcretion, puis en ayant encor deux autres, en trouver une quatriéme, qui ſoit à l'une de ces deux, comme l'autre eſt à l'unité, ce qui eſt le même que la multiplicaion; ou bien en trouver une quatriéme, qui ſoit à l'une de ces deux, comme l'unité eſt à l'autre, ce qui eſt le même que la diviſion; ou enfin trouver une ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'unité & quelqu'autre ligne, ce qui eſt le même que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arihtmetique en la Geometrie, afin de me rendre plus intelligible.

Fig. 6. *La Multiplication.* Soit par exemple fig. 6. AB l'unité, & qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les Points A & C, puis tirer DE pa-

rallele à $C A$, & $B E$ eſt le produit de cette multiplication. *La Diviſion.*

Ou bien s'il faut diviſer $B E$ par $B D$, ayant joint les points E, & D, je tire $A C$ parallele à $D E$, & $B C$ eſt le produit de cette diviſion.

Ou Fig. 7. s'il faut tirer la racine quarrée de GH, je lui ajoûte en ligne droite $F G$ qui eſt l'unité, & diviſant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le Cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite juſques à I, à angles droits ſur FH, c'eſt GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cauſe que j'en parlerai plus commodément * ci-après. Fig. 7. *L'extraction de la Racine quarrée.* * *Liv. 3. Part. 4. Sect. 1.*

1. Il faut expliquer comment ſes Operations de l'Arithmetique, dont il eſt ici parlé, ſe font ſur les lignes droites. 2. Il faut montrer le rapport, que ces operations faites ſur les nombres ont avec les mêmes operations faites ſur les lignes droites. En ce même endroit l'on fera voir que l'extraction de la racine quarrée eſt une eſpece de diviſion. 3. Il faut apporter des exemples, où l'unité peut être à diſcretion ; & des exemples, où elle ne le peut pas. 4. Il faut examiner, ſi en introduiſant les termes du calcul Arithmetique dans la Geometrie, l'on ſe rend plus intelligible.

ARTICLE I.

Comment les Operations de l'Arithmetique ſe font ſur les lignes droites.

1. TOuchant l'Addition & la Souſtraction. Fig. 8.

Reſſouvenons-nous, que dans les lieux Geometriques, il y a des grandeurs réelles, qu'on nomme negatives ou fauſſes, qui ſont des veritables lignes, & qui s'expriment avec le ſigne —, comme $-a$, $-b$. Fig. 8.

Soient les lignes $A B$, a ; $B C$, b ; toutes deux des grandeurs poſitives : la ligne $A C$ ſera $a + b$ ajoûtées enſemble.

Soient les lignes $A B$, $+a$ grandeur poſitive ; $B C$, $-b$ grandeur negative ; la ligne $A C$ ſera $a - b$ ajoûtées enſemble.

Soient les lignes $A B$, $-a$; $B C$, $-b$; toutes deux des grandeurs negatives : la ligne $A C$ ſera $-a - b$ ajoûtées l'une à l'autre.

Soient les lignes $A C$, a ; $B C$, b ; toutes deux des grandeurs poſitives ; la ligne $A B$ ſera $a - b$ ſouſtraites l'une de l'autre.

Soient les lignes $A C$, $+a$ grandeur poſitive ; $B C$, $-b$ grandeur negative : la ligne $A B$ ſera $a + b$, la ſeconde $-b$ ſouſtraite de la premiere $+a$. parce que comme la grandeur vraye $+b$ étant retranchée prend le ſigne —, de même la grandeur fauſſe $-b$ étant ſouſtraite prend le ſigne +.

Quelle eſt l'operation de l'Arithmetique, qui donne $a - b$? ſi a & b ſont

FIG. 8. deux grandeurs positives, b est soustraite de a ; si a est une grandeur positive, b une negative, b est ajoûtée à a ; si a & b sont deux grandeurs negatives, a est soustraite de b ; si a est une grandeur negative, b une positive, la valeur de $a - b$ est necessairement au dessous de zero : soit $-a = -10$, $+b = +6$; $a - b$ sera $-10 - 6 = -16$.

L'on voit l'importance qu'il y a d'avertir, ainsi qu'on le fait dans les lieux Geometriques, quand est-ce qu'une grandeur est negative. Lorsqu'on n'avertit pas, la grandeur est supposée positive.

FIG. 6. 2. Touchant la Multiplication & la Division. Fig. 6.

Il faut multiplier la ligne a par la ligne b, je fais un angle quelconque ABC, dont les côtez sont indefinis ; sur l'un d'eux je prends AB égale à l'unité, laquelle où est determinée par le Problême, ou par celui qui le construit ; sur ce même côté je prends encor la ligne BD égale à la ligne a ; ensuite sur l'autre côté je fais BC égale à la ligne b ; du point A au point C je mene la ligne AC, & par le point D la ligne DE parallele à AC la ligne BE est le produit de la multiplication de la ligne BD, a par la ligne BC, b.

Le Multiplicateur & le multiplié peuvent changer de place ; & si l'on devoit multiplier b par la ligne a, l'on trouveroit également que BE est leur produit en mettant AB l'unité, BD, a le Multiplicateur sur le même côté, & BC, b le multiplié, sur l'autre.

L'on peut aussi joindre le Multiplicateur ou le multiplié à l'unité : comme si je voulois multiplier la ligne AD par la ligne BC, ou la ligne BC par la ligne AD ; je joindrois la ligne AD à l'unité AB, je menerois AC, je tirerois DE parallele à AC, & EC seroit le produit de cette multiplication.

Vous pouvez encor ranger autrement toutes ces quantitez ; soit AB l'unité, au point A j'éleve AC que je suppose être le Multiplicateur, par les Points B, C je mene l'infinie BCE ; je coupe BD que je suppose le multiplié ; par le point D je tire DE parallele à AC, la ligne DE est le produit, &c.

La démonstration de toutes ces differentes Operations est dans l'Article suivant, n. 3.

Pour diviser la ligne c, par la ligne a, faites un angle quelconque ABC, dont les côtez sont indefinis : sur l'un d'eux prenez AB pour l'unité, laquelle est aussi ou donnée, ou prise à volonté ; sur le même côté coupez BD égale à la ligne a ; sur l'autre côté prenez BE égale à la ligne c ; joignez DE ; & par le point A tirez AC parallele à DE. La ligne BC est le quotient de la division de la ligne BE, c, par la ligne BD, a.

Vous pouvez aussi ordonner differemment ces quantitez. Si, par exemple, vous voulez diviser la ligne BC par la ligne AB, joignez la ligne AD

AD qui ſera l'unité à la ligne AB qui eſt le diviſeur ; coupez BC le dividende, joignez AC ; & menez DE parallele à AC. La ligne CE eſt le quotient de cette diviſion, &c.

La démonſtration de toutes ces operations ſe trouve dans l'Article ſuivant, n. 4. La ligne que l'on prend pour l'unité peut être nommée par une lettre quelconque d.

3. Touchant l'extraction de la racine quarrée, Fig. 7. FIG. 7.

La maniere dont M. DESCARTES apprend à extraire la racine quarrée, n'a pas beſoin d'explication.

Si donc l'unité FG étant exprimée par 1, le quarré GH eſt aa, la racine GI ſera a ; ſi GH eſt $aa+2ab+bb$, ſa racine ſera $a+b$; ſi GH eſt $aa-2ab+bb$, GI ſera $a-b$; ſi le quarré GH s'exprime par ab, ſa racine GI ſera $\sqrt{ab}$; ſi le quarré GH s'exprime par $a-b+c$, ſa racine GI ſera $\sqrt{a-b+c}$.

Mais ſi lorſque vous devez extraire la racine quarrée du plan ab, vous voulez prendre $FG=a$ pour l'unité, alors GH ſera b, & la racine GI eſt encor $\sqrt{ab}$. Vous pourriez auſſi prendre $GH=b$ pour l'unité, & ſi GF eſt égale à a, la racine GI ſera encor $\sqrt{ab}$.

La démonſtration de cette operation ſera apportée dans l'Article ſuivant, n. 5.

L'on ne pourra pourtant pas extraire la racine de $-aa$, parcequ'il n'y a point de quantité, qui en ſe multipliant produiſe $-aa$: car le quarré de $-a$ eſt auſſi bien $+aa$, que le quarré de $+a$.

ARTICLE II.

Le Rapport des operations de l'Arithmetique avec celle de la Geometrie.

1. L'Addition des nombres eſt une operation, qui de pluſieurs nombres differens en compoſe un ſeul, qui leur eſt égal, & qu'on appelle la ſomme. L'addition des lignes eſt une operation, qui de pluſieurs lignes differentes en compoſe une ſeule, qui leur eſt égale. Leur raport eſt évident.

2. La ſouſtraction des nombres eſt une operation, qui ôte un nombre d'un autre, pour avoir leur difference, qui s'appelle le reſte. La ſouſtraction des lignes eſt une operation, qui retranche une ligne d'une autre, pour en avoir la difference. Leur raport eſt aiſé à voir.

3. La multiplication des nombres eſt une operation, dans laquelle l'on fait, comme l'unité eſt au multiplicateur, de même le multiplié eſt au produit. Lorſqu'on multiplie 8 par 2, le produit eſt 16 ; or $1:2::8:16$. Dans la multiplication de la ligne BD, a par la ligne BC, b Fig. 6. L'on FIG. 6. a fait Art. 1. n. 2. comme l'unité AB eſt au multiplicateur BC ; ainſi le multiplié BD au produit BE. Et cette Analogie ſe démontre par la

Fig. 6. Prop. 4. 6. Eucl. Car les triangles *ABC*, *DBE* ſont équiangles 29. 1. Eucl.

Lorſque l'on multiplie *BC* par *AD*, & que l'on joint le multiplicateur *AD* à l'unité *AB*; l'on fait encor, comme l'unité *AB*, au multiplicateur *AD*: de même le multiplié *BC* eſt au produit *CE*. Et cette proportion ſe démontre par la 2. 6. Eucl. parceque *AC* eſt parallele à la baſe *ED* du triangle *DBE*.

Lorſque l'on fait *AB* l'unité, *AC* le multiplicateur, *BD* le multiplié la proportion, qui ſe démontre par la 4. 6. Eucl. eſt celle-ci, l'unité *AB* eſt au multiplicateur *AC*: comme le multiplié *BD* au produit *DE*.

L'on peut remarquer que les démonſtrations ſont les mêmes, de quelque grandeur que ſoit l'angle *DBE*.

La multiplication des nombres convient encor avec celles des lignes, en ce que ſi l'unité change, le produit change auſſi, quoique le multiplicateur & le multiplié reſtent les mêmes. En effet, afin qu'il y ait toûjours même proportion entre l'unité & le multiplicateur, qu'entre le multiplié & le produit; il faut, dès que *AB* l'unité devenant plus grande aura plus grande raiſon à *BC* multiplicateur; que *BD* multiplié ait auſſi plus grande raiſon à *BE* produit, qui 10. 5. Eucl. ſera plus petit qu'il n'étoit. C'eſt ainſi que dans l'Arithmetique, lorſque vous multipliez *2* par *8*, le produit eſt *16* ſols ou *16* livres, *16* piez ou *16* toiſes, &c. ſelon que pour l'unité vous prenez *1*. ſol ou *1* livre, *1*. pié ou *1* toiſe.

Je trouve que la multiplication des nombres a plus de raport à cette multiplication des lignes, qu'à celle qu'on propoſe communément dans la Geometrie. La ligne *AB*. Fig. 9. eſt dite multiplier la ligne *BC*, ſi l'on fait un rectangle *ABCD*, qui ait ces lignes *AB*, *BC* pour ſes deux côtez
Fig 9. contigus. Car dire ici, que l'unité eſt à la ligne *AB* multiplicateur, comme la ligne *BC* multipliée à la ſurface produite *ABCD*; c'eſt mettre une raiſon entre la ligne *BC*, & la ſurface *ABCD*, quoiqu'elles ſoient de differente eſpece: ce qui eſt contraire à la definition 3. l. 5. Eucl.

Dire auſſi, que l'on conſidere la ligne *AB* comme une petite ſurface, qui a trois petits quarrez, & la ligne *BC* comme une petite ſurface, qui en a ſix, c'eſt plûtôt multiplier ſurface par ſurface, que ligne par ligne; outre que ces petites ſurfaces ne ſont pas entierement differentes, puiſqu'elles ont toûjours un petit quarré commun dans l'angle *B*.

4. La diviſion des nombres eſt une operation, dans laquelle l'on fait, comme le diviſeur eſt au dividende, de même l'unité eſt au quotient.

Lorſque vous diviſez *12* par *4*, le quotient eſt *3*: or *4*: *12*:: *1*: *3*.
Fig. 6. Dans la diviſion de la ligne *BE*, *c*, Fig. 6. par la ligne *BD*, *a*; l'on fait Art. 1. n. 2. comme le diviſeur *BD*, eſt au dividende *BE*: de même l'unité *BA*, au quotient *BC*. Et cette Analogie ſe démontre par la 4. 6. Eucl.

Lorſque l'on veut diviſer la ligne *B C* par la ligne *AB*, & que l'on joint la ligne *A D* priſe pour l'unité ; l'on fait encor, comme *AB* diviſeur à *B C* dividende : ainſi l'unité *AD* à *CE* quotient. Et cette Analogie ſe démontre par la Prop. 2. 6. Eucl. FIG. 6.

Dès que l'unité change, il faut auſſi que le quotient change, quoique le dividende & le diviſeur reſtent les mêmes : & cela afin qu'il y ait, comme on vient de le dire n. 3. de la multiplication, même raiſon entre le dividende & le diviſeur, qu'entre le quotient & l'unité.

5. Extraire la racine quarrée d'un nombre donné, c'eſt trouver un autre nombre, qui ſoit moyen proportionel entre l'unité & le nombre donné. La racine quarrée de *64*, c'eſt *8* ; or *1 : 8 :: 8 : 64*.

L'on a fait une choſe ſemblable Art. 2. n. 3. pour tirer la racine quarrée de la ligne donnée *G H*, la ligne *F G* étant priſe pour l'unité. Car l'on démontre Prop. 13. 6. Eucl. Que la perpendiculaire *G I* eſt moyenne proportionelle entre *FG* & *G H*. Et voilà un raport qui ſe trouve entre l'extraction de la racine quarrée des nombres, & celle des lignes.

En voici une difference. Dans l'Arithmetique l'on ne peut tirer la racine quarrée, que d'un nombre, qui eſt un quarré parfait, *16*, *36*, *100*, *&c.* Mais on ne la tirera jamais de *14. 20*, *93*, *&c.* & l'on ſe contente d'écrire $\surd 14$, $\surd 20$, $\surd 93$. Ou bien l'on donne des nombres entiers avec des fractions, qui aprochent de plus en plus de ces racines, ſans qu'on puiſſe jamais exactement les déterminer, ce qu'on apelle aproximation des racines. Dans l'Algebre l'on ne peut tirer la racine que d'une grandeur, qui eſt exprimée en formule de quarré, aa, $aa - 2ab + bb$, *&c* ; Mais on ne la tirera pas de a, ab, &c. quand même ils repreſenteroient un quarré parfait numerique *9*, *25*, *49*, *&c.* Ainſi l'on ſe contente d'écrire $\surd a$, $\surd ab$. Au lieu que dans la Geometrie l'on extrait la racine quarrée de toute ligne droite *G H*, ſoit qu'elle repreſente a, ab, *14*, *20*, *&c.* ſoit qu'elle repreſente aa, $aa - 2ab + bb$, *36*, *81*, *&c.* La Geometrie donne donc les racines ſourdes auſſi juſtes que les autres, & elle n'a pas plus de difficulté à travailler ſur les lignes incommenſurables, que ſur les commenſurables.

6. Nous avons defini la diviſion une operation, dans laquelle le diviſeur eſt au dividende, comme l'unité au quotient, ou *invertendo*, le dividende eſt au diviſeur, comme le quotient à l'unité.

L'extraction de la racine quarrée eſt une operation, dans laquelle *G H* qui eſt le quarré donné eſt à *G I* qui eſt la racine cherchée : comme *G I* la racine cherchée eſt à *G F* que l'on a pris pour l'unité. De ſorte que dès que l'on conſiderera la racine cherchée une fois comme diviſeur, une fois comme quotient : l'extraction de la racine quarrée ſera une eſpece de diviſion, dans laquelle comme le quarré donné *G H* qui eſt le dividende, eſt à la racine cherchée *G I* qui eſt le diviſeur : de même la racine cherchée *G I* qui eſt le quotient, eſt à l'unité *G F*.

Fig. 6. L'extraction de la racine quarrée eſt donc une ſorte de diviſion, où l'on cherche le diviſeur & le quotient, qui ſont une même quantité : au lieu que la diviſion eſt une operation, dans laquelle le diviſeur eſt donné, & l'on cherche le quotient.

ARTICLE III.

L'unité peut ordinairement être priſe à diſcretion.

Fig. 6. 1. DAns les multiplications des lignes l'on donne ordinairement le multiplicateur & le multiplié, ſans parler de l'unité : il falloit Fig. 6. multiplier la ligne BD par la ligne BC, ou la ligne a, par la ligne b. Dans les diviſions des lignes l'on donne ordinairement le dividende & le diviſeur, ſans parler non plus de l'unité ; il falloit Fig. 6. diviſer la ligne c, par la ligne a, ou la ligne BE par la ligne BD. Dans les extractions de racines quarrées l'on donne la ligne, dont il faut extraire la racine quarrée ſans aſſi-
Fig. 7. gner l'unité : il falloit Fig. 7. tirer la racine quarrée de la ligne GH. Et parce que l'unité entre neceſſairement dans ces operations, comme on l'a vû Art. 1. n. 2. l'on peut dire que l'unité peut ordinairement y être priſe à diſcretion.

2. Cependant il y a des multiplications de lignes, où l'unité eſt determinée. Par exemple quand on cherche une quatriéme proportionelle à trois lignes données, ou une troiſiéme proportionelle à deux lignes données.
Fig. 6. Il faut trouver une quatriéme proportionelle aux trois lignes données AB, DA, BC, cette quatriéme ſera CE, 12. 6. Eucl. Et l'on a cette Analogie de la multiplication des lignes $AB : DA :: BC : CE$; dans laquelle AB, qui eſt donnée, tient lieu de l'unité. Quand on cherche une troiſiéme proportionelle à deux lignes données par la 11. 6. Eucl. La premiere des données tient auſſi la place de l'unité dans la multiplication des lignes, qui ſe fait alors.

3. Lorſque dans un Problême il n'y a qu'une grandeur connuë & determinée, on la prend ordinairement pour l'unité, afin de ne pas introduire
Fig. 5. ſans neceſſité une nouvelle grandeur. Dans la Parabole Fig. 5. les coupées AL, Al, x & les appliquées FL, fl, y ſont variables, le parametre AD, a eſt ſeul conſtant : ainſi l'on regarde ordinairement le parametre comme l'unité dans les differentes équations à la Parabole $ax = yy$, qui donne cette proportion $a : y :: y : x$.

4. Lorſqu'il y a dans un Problême pluſieurs grandeurs connuës, l'on prend
Fig. 7. ordinairement celle que l'on veut pour l'unité. Vous cherchez Fig. 7. une moyenne proportionelle entre les deux lignes données FG, GH ; c'eſt 13. 6. Eucl. la ligne GI, or l'on peut prendre FG pour l'unité dans cette Analogie $FG : GI :: GI : GH$; ou bien l'on conſidere GH comme l'unité dans cette autre Analogie $GH : GI :: GI : FG$. Ce qui revient au même.

Il eſt pourtant certain, que l'on s'épargne ſouvent beaucoup de travail en prenant une quantité plûtôt qu'une autre pour l'unité; parce que les grandeurs que l'unité multiplie ou diviſe, n'augmentent ni ne diminuent point en vertu d'une telle multiplication, ou d'une telle diviſion. Qu'il faille trouver une ligne égale à $bb+bc-\frac{dfg}{b}$: ſi l'on prend b pour l'unité, la quantité bb eſt égale à b, parce que le quarré de 1 eſt 1; bc eſt égal à c, parce que $1c$ n'eſt autre choſe que c; $\frac{dfg}{b}$ eſt égal à dfg, $\frac{dfg}{1}$ n'eſt pas different de dfg. Ainſi j'évite deux multiplications & une diviſion. Au lieu que celui qui prendroit c, pour l'unité, ne s'exempteroit que de la multiplication bc, parce que $1b=b$. Fig. 7.

5. Après que dans un Problême l'on a pris une grandeur pour l'unité; on ne la change pas pendant le reſte de l'operation, à moins que la nature du Problême ne le demande. Ce qui arrive, ou lorſqu'il faut trouver pluſieurs troiſiémes, quatriémes, moyennes proportionelles, & que celle des données, qui doit être l'unité, eſt differente dans chaque multiplication: ou lorſque l'unité eſt variable, ainſi qu'il arrive dans ce lieu au cercle $yy=2ax-xx$. Soit le diamêtre HF, $2a$; les FG, Fg, x; les IG, ig, y; les HG, Hg, ſeront $2a-x$. Dans les Analogies qui donnent le lieu $yy=2ax-xx$, & qui ſont $FG, x :: GI, y :: GI.y : GH$, $2a-x.Fg, x :: gi, y :: gi, y : gH$, $2a-x$. *&c. les* FG, Fg, x, qui tiennent la place de l'unité, changent chaque fois. Fig. 7.

ARTICLE IV.

Si les termes du calcul Arithmetique introduits dans la Geometrie nous rendent plus intelligibles.

1. L'Operation, qui joint une ligne à une autre, ne pouvoit pas s'appeller d'un terme fort different de celui d'addition. L'operation qui retranche une ligne d'une autre, ne pouvoit pas non plus s'exprimer par un terme fort different de celui de ſouſtraction. Ce ne ſont donc pas les termes d'addition & de ſouſtraction qui rendent le diſcours plus intelligible.

Si M. DESCARTES ne s'étoit pas ſervi du terme *multiplier la ligne* BD *par la ligne* BC; il auroit dit, *deux lignes* BD, BC *étant données, en trouver deux autres, dont l'une, qui eſt ordinairement arbitraire, ſoit à l'une des deux données* BD, *comme l'autre* BC *eſt à la ſeconde des cherchées*, ce qui eſt la definition de la multiplication, qu'il apporte lui-même. L'on peut faire une ſemblable reflexion ſur la diviſion, & ſur l'extraction de racines. Or ces termes de multiplication, diviſion, extraction de racines ſont bien plus courts, mais non pas plus clairs que leurs definitions. Ils ne ſont même intelligibles, qu'autant que leurs definitions ſe preſentent à l'eſprit.

2. Vous trouverez la raiſon, pourquoi M. DESCARTES, pour ſe rendre plus intelligible, a introduit les termes de l'Arithmetique dans la Geometrie; Sect. 3. Art. 2. n. 2.

SECTION III.

Comment on peut uſer de Chiffres en Geometrie.

M. DESCARTES.

Comment on peut uſer de chiffres en Geometrie.

MAIS ſouvent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces lignes ſur le papier,& il ſuffit de les deſigner par quelques lettres, chacune par une ſeule. Comme pour ajoûter la ligne BD à GH, je nomme l'une a, & l'autre b, & écris $a+b$; & $a-b$ pour ſouſtraire b de a ; & ab pour les multiplier l'une par l'autre ; & $\frac{a}{b}$ pour diviſer a, par b ; & aa ou a^2 pour multiplier a, par ſoi-même, & a^3 pour le multiplier encore une fois par a, & ainſi à l'infini ; & $\sqrt{a^2+b^2}$ pour tirer la racine quarrée de a^2+b^2 & $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ pour tirer la racine cubique de a^3-b^3+abb, & ainſi des autres.

Ou il eſt à remarquer que par a^2 ou b^3 ou ſemblables,je ne conçois ordinairement que des lignes toutes ſimples, encore que pour me ſervir des noms uſitez en l'Algebre, je les nomme des quarrez ou des cubes, &c.

Il eſt auſſi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne ſe doivent ordinairement exprimer par autant de dimenſions l'une que l'autre, lorſque l'unité n'eſt point determinée en la queſtion, comme ici a^3 en contient autant que abb, ou b^3, dont ſe compoſe la ligne que j'ai nommée $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$: mais que ce n'eſt pas de même, lorſque l'unité eſt déterminée, à cauſe qu'elle peut être ſous entenduë par tout où il y a trop ou trop peu de dimenſions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb-b$, il faut penſer que la quantité $aabb$ eſt diviſée une fois par l'unité, & que l'autre quantité b eſt multipliée deux fois par la même.

Par le mot de chiffre, que M. DESCARTES met ici à la marge, & qu'il employe dans le paſſage, que nous allons citer ; il entend les lettres a, b, c, *&c.* & les caracteres $\surd$, $\surd C$ ou $\sqrt[3]{}$, *&c.* dont l'Algebre ſe ſert.

Dans les Articles de cette Section, 1. Nous apporterons les raiſons pourquoi la Geometrie de M. DESCARTES employe les lignes de la Geo-

metrie ordinaire & les lettres de l'Algebre avec ſes caracteres. 2. Nous remarquerons que b^2, b^3, *&c.* repreſentent ordinairement de ſimples lignes. 3. Nous remarquerons encor, que toutes les parties de chaque ligne doivent avoir ordinairement autant de dimenſions les unes que les autres.

ARTICLE I.

Pourquoi M. DESCARTES *employe les lignes de la Geometrie ordinaire avec les lettres & les caracteres de l'Algebre.*

M. DESCARTES en apporte les raiſons dans ſon diſcours de la Methode, 2 Partie ſeconde, voici ſes termes. *Puis ayant pris garde que pour connoître les proportions, j'aurois quelquefois beſoin de les conſiderer chacune en particulier, & quelquefois ſeulement de les retenir ou de les comprendre pluſieurs enſemble : je penſai que pour les mieux conſiderer en particulier, je les devois ſuppoſer en des lignes, à cauſe que je ne trouvois rien de plus ſimple, ni que je puſſe repreſenter plus diſtinctement à mon imagination & à mes ſens, mais que pour les retenir ou les comprendre pluſieurs enſemble, il falloit que je les expliquaſſe par quelques chiffres les plus courts qu'il ſeroit poſſible. Et que par ce moyen j'emprunterois tout le meilleur de l'Analyſe Geometrique & de l'Algebre, & corrigerois tous les défauts de l'une par l'autre. Comme en effet, j'oſe dire, que l'exacte obſervation de ce peu de preceptes que j'avois choiſis, me donna telle facilité à demêler toutes les queſtions, auſquelles ces deux ſciences s'étendent, qu'en deux ou trois mois, que j'employai à les examiner, ayant commencé par les plus ſimples & plus generales, & chaque verité que je trouvois étant une regle qui me ſervoit après à en trouver d'autres, non ſeulement je vins à bout de pluſieurs que j'avois autrefois jugées très-difficiles ; mais il me ſembla auſſi vers la fin, que je pouvois déterminer en celles même que j'ignorois, par quel moyen & juſques où il étoit poſſible de les reſoudre.*

Le défaut de la Geometrie, c'eſt d'avoir quelquefois des figures trop embarraſſées, ſur tout lorſqu'elle examine les ſolides; le défaut de l'Algebre, c'eſt que n'ayant point de figures, elle ne rend pas ſi attentif.

ARTICLE II.

a^2, b^3, &c. *Repreſentent ordinairement de ſimples lignes.*

1. DAns cette Geometrie b^2 peut ſignifier une ſurface quarrée, une grandeur de deux dimenſions longueur & largeur, faite ſur une ligne droite égale à b : c'eſt ainſi que zz, xx repreſentent des quarrez, Sect. 1. Probl. 3. Mais b^2 ſignifie ordinairement ici une ligne droite trouvée par cette Analogie, comme une ligne droite, que j'ai priſe pour l'unité, eſt à la ligne droite b : ainſi la même ligne droite b, eſt à une troiſiéme ligne $\frac{bb}{1} = bb$. ſoit Fig. 10. $AB = 1$, $AC = b$, $BD = b$, joignez CB, & FIG. 10.

Fig. 10. menez DE parallele à BC. Vous aurez 2. 6. Eucl. $AB, 1 :: BD, b :: AC, b : CE, \frac{bb}{1} = bb$.

b^3 Peut repreſenter un ſolide cube, une quantité de trois dimenſions longueur, largeur, & profondeur: mais b^3 repreſente ordinairement une ligne droite trouvée par ces analogies, comme une ligne droite, qui tient lieu de l'unité, eſt à la ligne droite b: ainſi la même ligne b eſt à une troiſiéme ligne bb. & comme b eſt à bb: ainſi bb eſt à une quatriéme ligne droite b^3. Faiſons Fig. 10. $DF = CE$, par le point F tirons FG parallele à la ligne DE, & par le point C la ligne CI parallele à BF. L'on a 34. 1. Eucl. $CH = BD$, $HI = DF$. C'eſt pourquoi 2. 6. Eucl. Dans le triangle ADE, l'on fait $AB, 1 : AC, b :: BD, b : CE, bb$; & dans le triangle CIG, $CH = BD, b : CE, bb :: HI = DF, bb : EG, b^3$

b^4 Sera auſſi une ligne droite, qu'on trouvera par ces analogies $1 : b :: b : bb :: bb : b^3 :: b^3 : b^4$. & b^5 ſera une ligne droite que ces proportions donneront $1 : b :: b : bb :: bb : b^3 :: b^3 : b^4 :: b^4 : b^5$. & b^6 &c.

2. b^4 Eſt une grandeur de quatre dimenſions, b^5 une de cinq &c. mais dans la Geometrie ordinaire l'on ne trouve point de quantité de quatre, cinq, &c. dimenſions, car elle ne connoît que des lignes, des ſurfaces, des ſolides, & rien au delà. L'Arithmetique fournit des grandeurs de toutes ſortes de dimenſions. Dans la progreſſion $1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.$ &c. 2 eſt la racine ou le nombre qui entre dans toutes les multiplications, & répond à la lettre b de cette progreſſion continuë $1. b. bb. b^3. b^4. b^5. b^6.$ &c. 4 eſt le quarré, qui répond à bb; 8 eſt le cube, qui répond à b^3; 16 eſt le quarré de quarré, qui répond à b^4; 32 eſt le premier ſurſolide, qui répond à b^5; 64 eſt le quarré cube qui répond à b^6. &c. De plus les termes de ces deux progreſſions ſe forment de la même maniere: car comme la racine 2 ſe multipliant elle-même produit le quarré 4, de même la racine b multipliant b produit le quarré bb; & comme la racine 2 multipliant le quarré 4 produit le cube 8, de même la racine b multipliant le quarré bb produit le cube b^3; &c. Le raport qu'il y a entre ces operations a été une raiſon à M. DESCARTES pour introduire le terme de multiplication pour les lignes dans ſa Geometrie, afin qu'en comparant les operations de ſa Geometrie avec celles de l'Arithmetique, il ſe rendit plus intelligible.

Ce que l'on vient de dire des quarrez bb, ſe doit auſſi entendre des plans bd, ac, &c. & ce qu'on a dit des cubes b^3, s'étend auſſi aux ſolides abb, abc, &c. On doit auſſi étendre, ce qu'on a dit des grandeurs plus que ſolides b^4, b^5, &c. aux quantitez $aabb$, $abcd$, $abbc$, a^3bb, $abcde$, &c.

3. Les équations qui dans la pure Geometrie repreſentent des ſurfaces, ſe trouvent également vrayes, quand on les applique aux lignes. L'équation

tion $cx = yy$ de la parabole ſignifie dans le Traité des Sections Coniques que le rectangle, qui eſt une ſurface, dont un côté eſt c, l'autre x, eſt égal au quarré, qui eſt auſſi une ſurface, dont le côté eſt y. Appliquons cette même équation aux lignes, de ſorte que cx ſoit une ligne, & yy une autre. Soit priſe la grandeur c pour l'unité, l'équation ſe reduira à $1x = yy$. Et ſi l'on fait Fig. 10. $AB, c = 1 : AC, y :: BD, y : CE, \frac{yy}{1} = yy$; l'on trouvera que CE, yy eſt égale à l'abſciſſe x, qui dans la parabole a l'appliquée y, correſpondante. 5. & 6.

ARTICLE III.

Toutes les parties d'une ligne doivent ordinairement avoir autant de dimenſions les unes que les autres.

1. L'On ſuppoſe que les lignes qui ſe multiplient, ou qui ſe diviſent ſont exprimées par un ou pluſieurs termes, qui n'ont chacun qu'une lettre $a, b + c$, *&c*; que les chiffres qui ſont mis devant les termes n'en augmentent pas les dimenſions, $2aa, 3bb + 4cd$, n'ont pas plus de dimenſions que $aa, bb + cd$; que les dimenſions d'une fraction diminuent d'autant de degrez, que le denominateur a de termes, $\frac{aabb}{aa}$, $\frac{aabb}{af}$ n'ont que deux dimenſions.

2. Dans cette ſuppoſition, les produits qui ſe font de la multiplication de deux lignes, ont deux dimenſions dans chacun de leurs termes; $a + b$ par $a + b$ fait $aa + 2ab + bb$; $a + b$ par $b - c$ donne $ab + bb - ac - bc$, *&c*. Les produits qui viennent de la multiplication de trois lignes ont dans chaque terme trois dimenſions; $a + b$, $a + b$, $a + b$ ſe multipliant produiſent $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$; les trois $a + b$, $b - c$, $d + f$ donneront par leur multiplication $abd + bbd - acd - bcd + abf + bbf - acf - bcf$, *&c*. L'on trouvera de même que le produit de quatre lignes a quatre dimenſions dans tous ſes termes.

Non ſeulement dans l'expreſſion Algebrique d'une ligne, tous les termes doivent ordinairement avoir la même dimenſion: mais encore ils doivent avoir deux dimenſions, ſi c'eſt l'expreſſion d'un plan; trois, ſi c'eſt celle d'un cube; &c.

Ce precepte n'eſt fait qu'afin que les quantitez, qui ſont des plans, paroiſſent avoir été produites par la multiplication de deux lignes; celles qui ſont des ſolides par la multiplication de trois; celles qui ſont d'un degré plus élevé par la multiplication de quatre; &c.

3. C'eſt pourquoi la ligne qui eſt exprimée par $\sqrt{C.\ a^3 - b^3 + abb}$ ſuppoſant que $a^3 - b^3 + abb$ eſt un cube, il faut, que chaque terme ait trois dimenſions. S'il faut extraire la racine cubique de $aabb - b$, cette quantité eſt ſuppoſée un cube, elle doit donc auſſi avoir trois dimenſions; ce qui ne ſe peut faire qu'en diviſant le premier terme une fois par l'unité,

& multipliant le ſecond deux fois par l'unité. Soit a l'unité, ce ſera $\frac{aabb}{a} - aab$; ſoit c l'unité, ce ſera $\frac{a^3bb}{c^2} - bcc$. Ce qui ne ſe fera qu'après que l'unité ſera déterminée.

4. On peut encor en tirer cet avantage, que dans les multiplications des quantitez, qui ont pluſieurs termes, & chaque terme pluſieurs lettres; on s'apperçoit, ſi l'on ne s'eſt point trompé, en examinant, ſi dans le produit chaque terme a le nombre de lettres, qui lui convient.

SECTION IV.

Comment il faut venir aux équations, qui ſervent à reſoudre les Problêmes.

M. DESCARTES.

AU reſte afin de ne pas manquer à ſe ſouvenir des noms de ces lignes, il en faut toûjours faire un regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe, ou qu'on les change écrivant par exemple $AB = 1$, c'eſt-à-dire, AB égal à 1, $CH = a$, $BD = b$, *&c.* Ainſi voulant reſoudre quelque Problême, on doit d'abord le conſiderer comme déja fait, & donner des noms à toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour le conſtruire, auſſi bien à celles qui ſont inconnuës qu'aux autres. Puis ſans conſiderer aucune difference entre ces lignes connuës & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, ſelon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle ſorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, juſques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui ſe nomme une équation, car les termes de l'une de ces deux façons ſont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations, qu'on a ſuppoſé de lignes, qui étoient inconnuës. Ou bien s'il ne s'en trouve pas tant, & que nonobſtant on n'omette rien de ce qui eſt deſiré en la queſtion, cela témoigne qu'elle n'eſt pas entierement déterminée. Et lors on peut prendre à diſcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës, auſquelles ne répond aucune équation. Après cela s'il en reſte encore pluſieurs, il ſe faut ſervir par ordre de chacune des équations qui reſtent auſſi, ſoit en la conſiderant toute ſeule, ſoit en la compa-

Comment il faut venir aux équations, qui ſervent à reſoudre les Problêmes.

rant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnuës; & faire ainſi en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une ſeule égale à quelqu'autre, qui ſoit connuë, ou bien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le ſurſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit égal à ce qui ſe produit par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantitez, dont l'une ſoit connuë, & les autres ſoient compoſées de quelques moyennes proportionelles entre l'unité & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que j'écris en cette ſorte $z = b$, ou $z^2 = -az + bb$, ou $z^3 = +az^2 + bbz - c^3$, ou $z^4 = az^3 + *b^2z^2 - c^3zd^4$. &c. C'eſt-à-dire z, que je prends pour la quantité inconnuë eſt égale à b, ou le quarré de z eſt égal au quarré de b moins a multiplié par z, ou le cube de z, eſt égal à a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainſi des autres.

* *Dans les Editions Françoiſes de Leyde 1637. de Paris 1705. le terme* b^2z^2 *manque, ce qui eſt une faute d'impreſſion.*

Et on peut toûjours reduire ainſi toutes les quantitez inconnuës à une ſeule; lorſque le Problême ſe peut conſtruire par des cercles & des lignes droites, ou auſſi par des ſections coniques, ou même par quelqu'autre ligne, qui ne ſoit que d'un ou deux degrez plus compoſée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cauſe que je vous ôterois le plaiſir de l'apprendre de vous-même, & l'utilité de cultiver vôtre eſprit en vous y exerçant, qui eſt à mon avis la principale, qu'on puiſſe tirer de cette ſcience. Auſſi que je n'y remarque rien d'auſſi difficile, que ceux qui ſeront un peu verſez en la Geometrie commune & en l'Algebre, & qui prendront garde à tout ce qui eſt en ce Traité, ne puiſſent trouver.

C'eſt pourquoi je me contenterai ici de vous avertir, que pourveu qu'en démêlant ces équations on ne manque point à ſe ſervir de toutes les diviſions, qui ſeront poſſibles, on aura infailliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe être reduite.

Je diſtinguerai par ordre les Regles qui regardent la reſolution des Problêmes en general. Je joindrai à celles, dont M. DESCARTES parle ici, quelques autres, qu'il explique ailleurs. Les regles, auſquelles je ne joins aucun exemple, ſeront miſes en uſage dans les exemples des autres regles.

Il eſt bon de faire reflexion, que les preceptes ſont ordinairement obſcurs, juſques à ce que les exemples les ayent éclaircis.

12. *Regles generales pour les Problémes.*

REGLE I.

D'Abord l'on conſidere le Problême comme déja fait. Pappus dans ſes Collections mathematiques, commence par là les reſolutions de pluſieurs Problêmes: ainſi la methode n'eſt pas nouvelle. Il faut diſtinguer avec ſoin les quantitez connuës des inconnuës. On appelle quantitez connuës & données celles que les conditions du Problême determinent & font connoître. On appelle inconnuës celles qu'on cherche & qu'on veut découvrir. Or c'eſt par le connu qu'on découvre l'inconnu; l'Eſprit humain ne raiſonne pas autrement, & il n'a pas d'autre maniere de faire de nouvelles découvertes.

REGLE II.

ON donne des noms & l'on deſigne par des lettres toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour conſtruire le Problême, non ſeulement aux connuës, c'eſt-à-dire, à celles qui ſont données par les conditions du Problême, mais encore aux inconnuës. L'on ſe ſert ordinairement des premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, *&c.* pour nommer les grandeurs connuës, & des dernieres, z, y, x, *&c.* pour deſigner les inconnuës. Cela n'eſt pourtant pas univerſel.

REGLE III.

ON ſe ſert indifferemment des lignes connuës & inconnuës; & en conſiderant l'état de la queſtion, l'on cherche des équations ſelon l'ordre qui paroît le plus propre à reſoudre le Problême. Cet ordre demande que l'on commence par les lignes, dont les autres dépendent. Rien n'eſt plus important, que de bien comprendre ce dont il s'agit dans un Problême propoſé, ſans cela l'on travaille long-tems inutilement, & l'on ne s'apperçoit qu'à la fin de la reſolution, qu'on a mal enviſagé la queſtion.

REGLE IV.

ON tâche de trouver autant d'équations differentes, que l'on a ſuppoſé de lignes inconnuës; & ces équations auront une des inconnuës d'un côté & des connuës de l'autre. Lorſqu'on trouve ce nombre d'équations cherchées, le Problême eſt determiné, & il a une ſolution, ou un nombre determiné de ſolutions. Mais ſi l'on trouve moins d'équations, qu'il n'y a de lignes inconnuës, après avoir ſatisfait à toutes les conditions du Problême: c'eſt une marque, que le Problême eſt indeterminé, & qu'il a un nombre indefini de ſolutions. Lorſqu'on trouve plus d'équations, qu'il n'y

a de lignes inconnuës, le Problême eſt plus que determiné. Il eſt quelquefois facile, & quelquefois difficile de connoître d'abord, ſi le Problême eſt determiné, ou indeterminé, ou plus que determiné.

REGLE V.

DAns les Problêmes indeterminez l'on prend à volonté des lignes connuës pour chaque inconnuë, excepté une. Ce qui ne ſe fait qu'à la fin, après qu'on a parcouru toutes les difficultez de la queſtion. Ce n'eſt pas l'uſage, d'effacer les inconnuës à la place deſquelles on ſubſtituë des connuës. Il faut décrire la parabole AFf, Fig. 5. avec l'équation indeterminée $yy = ax$. Pour avoir un point F de la parabole, ou ſon appliquée FL, y; je determine AL, x de la longueur que je veux, elle pourroit deſlors s'appeller b, & l'équation ſeroit $yy = ab$. Mais l'on ne fait point ces changemens, & l'on ſe contente de chercher FL, y moyenne proportionelle entre le parametre a, & la coupée AL, que l'on nomme toûjours x. V. l. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. FIG. 5.

Au reſte comme l'équation indeterminée $yy = ax$ devient determinée en cherchant le point F, & tous les autres points f de la parabole; l'on peut dire, qu'un Problême indeterminé eſt une infinité de Problêmes determinez; & que tous les Problêmes ſont ou determinez par eux-mêmes, ou determinez par celui qui les conſtruit.

REGLE VI.

APrès qu'on a trouvé les premieres équations, qui ſont fort ſimples, ſi le Problême n'eſt pas entierement reſolu; l'on conſidere ces équations ou ſéparément, ou enſemble, & on les combine differemment; juſques à ce que l'on n'ait rien omis de ce qui eſt deſiré dans la queſtion. Alors l'on en trouve une, qui reſulte de la differente combinaiſon des autres, & qui, après qu'on a ſubſtitué, s'il eſt neceſſaire, des grandeurs connuës à la place des inconnuës, contient une inconnuë égale à une connuë $z = b$; ou une inconnuë dont le quarré eſt égal à ce qui ſe produit par l'addition ou ſouſtraction de deux quantitez, dont l'une eſt connuë, & l'autre compoſée de quelque moyenne proportionelle entre l'unité & ce quarré multipliée par d'autres connuës, $zz = -az + bb$; c'eſt-à-dire, le quarré zz eſt égal à une quantité connuë bb, moins az compoſée de la connuë, a, multipliée par z, qui eſt moyenne proportionelle entre l'unité & le quarré zz, car $1 : z :: z : zz$. Ou bien l'on trouve une inconnuë, dont le cube eſt égal à ce qui ſe produit par l'addition ou ſouſtraction de trois quantitez, dont l'une eſt connuë, & les deux autres ſont compoſées des deux moyennes proportionelles entre l'unité & le cube multipliées par d'autres connuës, $z^3 = az^2 + bbz - c^3$, c'eſt-à-dire, le cube z^3 eſt égal à moins une quantité connuë c^3, plus az^2 plus bbz, qui ſont com-

Fig. 5. posées des connuës a & b multipliées ſeparément l'une par zz, l'autre par z, qui ſont les deux moyennes proportionelles entre l'unité & le cube z^3, car $1 : z :: z : zz :: zz : z^3$. Ou bien l'on trouve $z^4 = az^3 + b^2z^2 - c^3z + d^4$ &c.

Dans les combinaiſons qu'on fait des équations, l'on compare deux valeurs differentes de la même inconnuë $z = aa + bx$, $z = ac + xy$, & l'on en fait une nouvelle équation $aa + bx = ac + xy$. Ou bien l'on ſubſtituë la valeur d'une inconnuë à ſa place dans une autre équation où elle eſt. Soient les équations $z = aa + bx$, $x = bc$; je mets bc à la place de x dans la premiere équation, qui ſe changera en $z = aa + bbc$. Ces operations ſervent à diminuer le nombre des inconnuës.

REGLE VII.

ON ſe ſervira de toutes les diviſions poſſibles, afin de reduire les équations aux plus ſimples termes. Les diviſions, qui ſe font pendant l'operation, diminuent la peine du calcul, qui doit ſuivre; celles qui ſe font à la fin, reduiſent la derniere équation à la plus ſimple expreſſion.

REGLE VIII.

QUelquefois la maniere, dont la queſtion eſt propoſée, ne fournit pas toutes les lignes, qui ſont neceſſaires pour la reſoudre. Soit qu'elle les fourniſſe, ou qu'elle ne les fourniſſe pas, voici ce qu'il faut obſerver.

* Tom. 3. Let. 80. 1. La methode, que Mr DESCARTES tenoit, eſt celle-ci. * Il ne conſideroit point d'autres theorêmes, ſinon que les côtez des triangles ſemblables ſont proportionels, & que dans les triangles rectangles le quarré de la baſe eſt égal aux deux quarrez des côtez. Et pour cela il obſervoit que les lignes dont il ſe ſervoit, fuſſent paralleles, ou s'entrecoupaſſent à angles droits: de ſorte qu'il reſolvoit tous ſes Problêmes par la propoſition 47. du Livre 1. d'Euclide, ou par la 4. du 6?

Geomet. Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. 2. ** M. DESCARTES pour ſe démêler de la confuſion, que peuvent cauſer pluſieurs lignes, en conſidere deux comme les principales, & auxquelles il tâche de rapporter toutes les autres. Ces deux lignes ſe touchent, & s'expriment par des lettres x, y, parce qu'elles ſont inconnuës. Lorſque le Problême eſt indeterminé ces deux lignes ſont variables, & l'une des deux a un point fixe pour origine, & s'étend le long d'une ligne droite; tandis que l'autre demeure toûjours parallele à elle-même; de la maniere dont l'on a ordonné les coupées & les appliquées dans les lieux Geometriques. Il arrive pourtant quelquefois, que ces deux lignes étant priſes ſeparées l'une de l'autre, le Probleme ſe reſout d'une maniere plus aiſée ou que l'on arrive à une équation plus ſimple.

Il y a ſouvent du bonheur à bien choiſir ſes lignes, & à bien commencer ſon calcul. Tel Problême ſe reſout aiſément, ſi l'on s'y prend d'une

certaine façon, qui ne ſe reſoudra que difficilement, ou même du tout point, ſi l'on prend une autre voye. C'eſt pourquoi lorſqu'un chemin mene trop loin, & qu'il eſt trop embarraſſé; il eſt bon d'entrer dans un, & s'il eſt neceſſaire dans pluſieurs autres. Il ne faut pas que les reſolutions courtes & aiſées, que l'on trouve imprimées, nous trompent; telle reſolution d'un Problême ſe comprend en un moment, qui n'a été trouvée que par un penible travail, & qu'après avoir été tentée inutilement de pluſieurs manieres. Quoi qu'en certain cas un heureux genie faſſe plus que l'art, on doit pourtant d'abord ſuivre les regles generales. Il ſera auſſi très-utile de remarquer comment les grands Geometres ont reſolu certains Problêmes. Mais avant que d'aller plus loin, rendons ces premieres regles plus intelligibles, en les appliquant à quelques Problêmes.

PROBLEME I.

ETant donnez Fig. 11. un cercle *CDE* de grandeur & de poſition, FIG. 11. c'eſt-à-dire, dont la grandeur & la ſituation ſoient determinées, & deux points *A*, *B* hors du cercle: tirer de ces deux points les deux lignes *AC*, *BC* à un même point *C* de la circonference concave du cercle, de telle ſorte que la ligne *AB*, qui joint les deux points donnez, ſoit parallele à la ligne *DE*, qui joint les deux points *D*, *E*, où les lignes *AC*, *BC* coupent la circonference convexe du cercle.

L'on pourra voir dans la reſolution de ce Problême, 1. qu'il faut tenter pluſieurs manieres pour reſoudre un Problême. 2. Que les lignes, que l'énoncé du Problême preſente, ne ſuffiſent pas toûjours ſeules. 3. Que les deux lignes inconnuës, que l'on choiſit enfin n. 7. ne ſont pas un angle entr'elles.

1. Suppoſons la choſe faite, comme le Problême le demande, que les lignes *AC*, *BC* ſe terminent au point *C*, & que les lignes *AB*, *DE* ſont paralleles. Voilà toutes les lignes, dont le Problême parle.

2. Nommons la ligne connuë *AB*, a; les inconnuës *AC*, z: *BC*, x; *AD*, y; *BE*, v; *DE*, s. Nous aurons encore $DC = AC - AD$, $z - y$; $EC = BC - BE$, $x - v$. L'on donne des noms à toutes ces lignes, parce qu'au commencement l'on ne connoît pas encore les ſeules neceſſaires, & qu'on doit ſe ſervir de toutes, afin de voir ce qui en peut reſulter.

3. Puiſque les lignes *AB*, *DE* ſont paralleles par la ſuppoſition, les triangles *ACB*, *DCE* ſont équiangles 29. 1. Eucl. & par la 2. 6. Eucl. *CD*, $z - y$: *AD*, y:: *CE*, $x - v$: *BE*, v. & 16. 6. Eucl. $vz - yv = xy - vy$, $vz = xy$, $z = \frac{xy}{v}$. De l'Analogie precedente l'on conclut celle-ci *componendo* *CA*, z: *AD*, y:: *CB*, x: *BE*, v. & 16. 6. Eucl. $vz = xy$, même équation qu'auparavant. Enſuite par la 4. 6. Eucl. l'on a ces trois Analogies, la 1e *CA*, z: *CB*, x:: *CD*, $z - y$: *CE*,

Fig. 11. $x - v$, & 16. 6. Eucl. $xz - vz = xz - xy$, $vz = xy$, ce qui n'apporte rien de nouveau. La 2e CA, $z : AB$, $a :: CD$, $z - y : DE$, f. $fz = az - ay$, $ay = az - zf$, $y = \frac{az - fz}{a}$. La 3e CB, $x : AB$, $a :: CE$, $x - v : DE$, f. $fx = ax - av$, $ax - fx = av$, $x = \frac{av}{a - f}$.

4. Nous n'avons trouvé que la valeur de trois inconnuës par ces premieres équations ; ces valeurs ſont $z = \frac{xy}{v}$. $y = \frac{az - fz}{a}$. $x = \frac{av}{a - f}$. Nous ſubſtituerons donc la valeur de x dans celle de z, ce qui donnera $z = \frac{ay}{a - f}$; & dans celle-ci la valeur de y, ce qui ſera $z = \frac{aaz - afz}{aa - af}$, & multipliant tout par $aa - af$, c'eſt $aaz - afz = aaz - afz$, ce qui marque que cette derniere ſubſtitution eſt inutile. Je puis encore mettre la valeur de y dans l'équation $z = \frac{xy}{v}$, il en reſulte $z = \frac{axz - fxz}{av}$, $avz = axz - fxz$, $av = ax - fx$, $x = \frac{av}{a - f}$ équation qui a déja été trouvée.

5. Toutes les équations, qu'on a pu former, gardent deux inconnuës, ce qui ſemble ſignifier que le Problême eſt indeterminé : mais ſi nous nous ſervons de l'équation $x = \frac{av}{a - f}$, dans laquelle v & f ſont arbitraires, & que l'on prenne deux fois BE, v, d'une même longueur determinée, & ED, f de deux longueurs differentes determinées ; l'on verra, que les lignes AD, BE ne ſe termineront pas les deux fois au même point C, comme il arriveroit, ſi le Problême étoit indeterminé.

6. Il nous faut faire quelque choſe de plus : ce qui ſe preſente naturellement, c'eſt de tirer 17. 3. Eucl. des points A, B, les tangentes AF, BG, qui ſeront connuës. Nommons AF, b ; BG, c. 36. 3. Eucl. $AC \times AD = \overline{AF}^2$, $yz = bb$. $BC \times BE = \overline{BG}^2$, $vx = cc$.

L'équation $yz = bb$, donne, $y = \frac{bb}{z}$ comparons les deux valeurs de y, $\frac{bb}{z} = \frac{az - fz}{a}$ multiplions tout par z, & par a, il vient $abb = azz - fzz$; $zz = \frac{abb}{a - f}$, ou il reſte une arbitraire f ; ce qui ne reſout pas le Problême, parce qu'il n'eſt pas vrai, que de quelque grandeur que je faſſe DE, f ; AC, $z = \sqrt{\frac{abb}{a - f}}$ ſoit toûjours telle que AD, BE concourent en un ſeul point C.

* Collect. Math. l. 7. Prop. 107.

7. Nous tenterons donc un autre chemin avec Pappus, * & c'eſt ici la ſeule operation, que l'on produit, lorſqu'on donne au public la reſolution d'un Problême. Ayant tiré les lignes AC, BC, AB, DE ; l'on mene du point A la tangente AF, & par le point D la tangente DH, qui coupe la ligne AB en H.

Nommons les connuës AB, a ; AF, b ; les inconnuës AC, z ; AD, y ; BH, r ; AH eſt $AB - BH$, $a - r$.

8. Les triangles ACB, AHD ſont équiangles, car ils ont l'angle A commun ; enſuite à cauſe que DH eſt touchante, & ED ſecante, l'angle HDE eſt égal à l'ange C, 32. 3. Eucl. Or à cauſe des paralleles DE, AB, les angles alternes HDE, DHA, 29. 1. Eucl. ſont égaux : donc l'angle C eſt égal à l'angle DHA. Et les triangles équiangles donnent

4. 6.

4. 6. Eucl. $AC, z : AB, a :: AH, a - r : AD, y$. & 16. 6. Eucl. $yz = aa - ar, y = \frac{aa-ar}{z}$. D'un autre côté, n. 6. $y = \frac{bb}{z}$. Comparons les deux valeurs de y, $\frac{bb}{z} = \frac{aa-ar}{z}$, $bb = aa - ar$, $ar = aa - bb$; $r = \frac{aa-bb}{a}$. Mettons cette valeur de r à sa place dans la valeur de AH, $a - r$, nous trouverons $a - \frac{aa+bb}{a} = \frac{aa-aa+bb}{a} = \frac{bb}{a} = AH$. Fig. 10.

9. La construction sera telle. Le cercle ECD étant donné avec les deux points A, B: je joins AB, du point A je mene 17. 3. Eucl. AF tangente du cercle en F, je fais 11. 6. Eucl. AH troisiéme proportionelle aux lignes AB, AF, du point H je tire encor HD tangente du cercle en D, & par les points A, D, la ligne AC, je joins BC, DE. La ligne DE est parallele à la ligne AB.

Dém. l'on a fait $AB, a : AF, b :: AF, b : AH, \frac{bb}{a}$. donc 17. 6. Eucl. $\overline{AF}^2 = AB \times AH$. Mais 36. 3. Eucl. $\overline{AF}^2 = AC \times AD$: donc $AB \times AH = AC \times AD$. & 16. 6. Eucl. $AB : AC :: AD : AH$. donc 5. 6. Eucl. Les triangles ACB, ADH sont équiangles, & l'angle C égal à l'angle AHD. Maintenant à cause de la tangente DH, & de la secante DE, 32. 3. Eucl. L'angle HDE est égal à l'angle C: donc les angles alternes AHD, HDE sont égaux, & 28. 1. Eucl. les lignes DE, AB paralleles. Ce qu'il falloit démontrer.

10. Puisque n. 8. $r = \frac{aa-bb}{a}$, la ligne AB, a est plus grande que la ligne AF, b. Que si la ligne AB étoit égale à AF, l'on auroit $r = \frac{aa-bb}{a} = o$, la ligne BH seroit nulle, le point H seroit le même que le point B; ce qui se conclut aussi de ce que $AH = \frac{bb}{a}$ se reduiroit à $\frac{aa}{a} = a$. Il faudroit donc Fig. 12. du point B tirer la touchante BD, & la droite ADC par les points A, D; & joindre BC; alors les lignes DE, AB, seront paralleles. Fig. 12.

Mais si AF, b Fig. 11. est plus grande que AB, a; de l'équation $bb = aa - ar$ n. 8. l'on conclura $-ar = bb - aa$, $-r = \frac{bb-aa}{a}$, ce qui montre, comme on l'expliquera Regl. 10. que BH, r doit être de l'autre côté du point B, qu'on ne l'a supposé dans le calcul Fig. 11. Ainsi comme H a été pris entre B & A Fig. 11. il faudra le mettre de l'autre côté du point B sur la même ligne AB prolongée, comme on le voit Fig. 13. ou l'on fait $BH = \frac{bb-aa}{a}$, du point H l'on mene la tangente HD, par les points A, D l'on tire ADC, l'on joint BC, & les lignes DE, AB sont paralleles. Fig. 13.

PROBLEME II.

ETant donné le plus petit côté d'un triangle rectangle, & la difference des segmens de la base faits par la perpendiculaire abbaissée du sommet de l'angle droit : trouver la difference des côtez, la base, & décrire tout le triangle.

Supposons que le triangle ABC, Fig. 14. rectangle en A, est celui qui Fig. 14.

Fig. 14. eſt demandé, que AD eſt la perpendiculaire, dont il eſt parlé. Du centre A, de l'intervale AB décrivez le cercle BGF; les lignes AB, AF ſont égales, & CF eſt la difference des côtez AB, AC; les ſegmens de la baſe ſont BD, DC; & parceque 3. 3. Eucl. $BD = DE$, EC eſt la difference des ſegmens. Prolongez CA en G.

Par ce Problême on apprendra, qu'une maniere conduit quelquefois à une équation plus ſimple; & qu'il faut auſſi quelquefois tirer des lignes, dont on ne parle point, en propoſant le Problême.

2. Nommons les connuës AB, $a = AF = AG$; EC, b; & les inconnuës CF, x; BE, y. On aura $AC = CF + FA$, $x + a$; $CG = CF + FG$, $x + 2a$; $CB = CE + EB$, $b + y$. Les rectangles $CE \times CB$, $CG \times CF$ ſont égaux au quarré d'une même tangente 36. 3. Eucl. ainſi ils ſont égaux entr'eux: donc $bb + by = xx + 2ax$.

3. Si vous voulez chercher immediatement la valeur de x, vous chercherez d'abord la valeur de y, pour ſubſtituer cette valeur à y. Vous avez $bb + by = ax + 2ax$; donc $by = xx + 2ax - bb$, $y = \frac{xx + 2ax - bb}{b}$. & mettant cette valeur dans CB, $b + y$, vous ferez $b + \frac{xx + 2ax - bb}{b} = \frac{bb + xx + 2ax - bb}{b} = \frac{xx + 2ax}{b} = CB$.

Maintenant puiſque l'angle BAC eſt droit, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{x^4 + 4ax^3 + 4aaxx}{bb} = aa + xx + 2ax + aa = 2aa + xx + 2ax$, & multipliant tout par bb, $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx = 2aabb + bbxx + 2abbx$, qui s'ordonne ainſi $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx - bbxx - 2abbx - 2aabb = 0$.

4. Mais ſi vous voulez vous ſervir d'une autre voye, & connoître immediatement la valeur de y, vous ferez diſparoitre x. Vous avez déja l'équation n. 2. $bb + by = xx + 2ax$, enſuite le triangle rectangle ABC vous donne $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $bb + 2by + yy = 2aa + xx + 2ax$; $xx + 2ax = bb + 2by + yy - 2aa = bb + by$; $yy + by = 2aa$. Mettez $\frac{1}{4}bb$ de chaque côté, $yy + by + \frac{1}{4}bb = 2aa + \frac{1}{4}bb$, extrayez la racine quarrée de chaque côté, c'eſt $y + \frac{1}{2}b = \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, $y = -\frac{1}{2}b + \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & la baſe BC, $b + y = \frac{1}{2}b \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$.

Pour connoître x, vous ſubſtituerez cette valeur de y dans l'équation n. 2. $xx + 2ax = bb + by$, qui ſe changera en $xx + 2ax = +\frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & mettant aa de chaque côté, $xx + 2ax + aa = aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & extrayant la racine quarrée de chaque membre, $x + a = \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$, $x = -a + \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$ qui eſt la même valeur de x, qu'on auroit de l'équation n. 3. $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx - 2abbx - 2aabb = 0$, ſi on l'avoit reſoluë. Cette reſolution ſe fera L. 3. Part. 3. Sect. 4. Art. 3. n. 3.

5. Les Geometres regardent les équations dont l'inconnuë ne monte que juſques au quarré, plus ſimples que celles, où elle monte au quarré de quarré. Les premieres ſont plus aiſées à reſoudre que les ſecondes, ce qu'on verra en comparant les operations que demandent les équations de deux dimenſions, qui ont été faites n. 4. & dont il ſera parlé Part. 2. Art. 1. avec celles qne Mr DESCARTES enſeigne L. 3. Part. 3. Sect. 4. Art. 1. pour les équations de quatre dimenſions. Ainſi n. 4. l'on eſt arrivé à une équation plus ſimple & plus aiſée que n. 3. Fig. 14.

6. Lorſqu'on a la valeur de x, l'on peut trouver le triangle ABC par cette conſtruction Fig. 15. Faites le triangle iſoſcele BKH, rectangle en K, dont $BK = KH = a$. $\overline{BH}^2$ ſera $2aa$. Au point H élevez $HL = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire ſur BH, & joignez BL. $\overline{BL}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HL}^2$, $2aa + \frac{1}{4}bb$, & $BL = \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$. Du centre L à l'intervale LH, décrivez le cercle CHE; prolongez BL en C; vous avez $LE = LC = LH$, $\frac{1}{2}b$, $CE = b$, $BC = CL + LB = \frac{1}{2}b + \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$. Apreſent ſur le diametre BC décrivés le demi-cercle BAC, dans lequel vous inſcrirés $BA = a$; joignés CA, & du centre A, de l'intervale AB, décrivés le cercle BFG. Fig. 15.

Dém. L'angle BAC eſt droit 31. 3. Eucl.; BC eſt $\frac{1}{2}b + \sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$ telle que doit être la baſe du triangle cherchée n. 4. CE eſt b, telle que doit être la difference des ſegmens de la baſe faits par la perpendiculaire; BE eſt $BC - CE$, $\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}b = y$. n. 4. $\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2 = \frac{1}{4}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb} + 2aa + \frac{1}{4}bb - aa = aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, & $AC = \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{aa + \frac{1}{4}bb}}$, & enfin $CF = CA - AF$, $-a + \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{aa + \frac{1}{4}bb}} = x$, comme elle doit être n. 4. Le triangle ABC Fig. 15. eſt donc celui qui eſt demandé.

REGLE IX.

LOrſqu'un Problême renferme pluſieurs cas, il n'eſt entierement reſolu, qu'après qu'on les a tous parcourus. L'on commence la reſolution par les plus ſimples, ſi on les connoît. Après qu'ils ont tous été examinés, ſi leurs reſolutions ne peuvent pas être compriſes ſous une formule générale, on les range en propoſant les premiers ceux, qui ſont les plus ſimples, ou dont les autres dépendent.

Quelquefois on diſtingue tous les cas dès le commencement, ainſi que l'on fera dans le Problême ſuivant; quelquefois on ne les découvre qu'à meſure qu'on les examine. comme on a fait au Problême 1. n. 10. de cette Section. L'on laiſſe quelquefois des cas, qui ſont inutiles au deſſein que l'on a. M. DESCARTES donne des exemples de cette regle au l. 2. Part. 4. en expliquant ſes ovales & leurs uſages.

PROBLEME III.

FIG. 16. ETant donnée Fig. 16. la ligne AB de grandeur & de position, trouver un point D hors de cette ligne, d'où ayant tiré la ligne DC perpendiculaire sur AB, l'on ait trois lignes en proportion continuelle, dont le segment AC soit la premiere, & dont la ligne DC soit une des trois.

Il y a quatre cas, qui viennent de la differente combinaison des lignes. 1. $AC : CD :: CD : AB$. 2. $AC : CD :: CD : CB$. 3. $AC : AB :: AB : CD$. 4. $AC : CB :: CB : CD$.

1. Supposons le point D trouvé, & la ligne DC tirée. Nommons AB, a; AC, x; CB, $a - x$; CD, y.

2. Pour le premier cas. AC, $x : CD$, $y :: CD$, $y : AB$, a. & 16. 6. Eucl. $yy = ax$; à la parabole, qu'il est aisé de décrire.

3. Pour le second cas. AC, $x : CD$, $y :: CD$, $y : CB$, $a - x$. & $yy = ax - xx$; au cercle duquel le diametre est a. Et cela est encore facile à construire.

4. Pour le troisiéme cas. AC, $x : AB$, $a :: AB$, $a : CD$, y: & $xy = aa$, à l'hyperbole entre ses asymptotes, qu'il est aisé de trouver.

5. Pour le quatriéme cas. AC, $x : CB$, $a - x :: CB$, $a - x : CD$, y. & $xy = aa - 2ax + xx$, à l'hyperbole soit par raport à ses diametres, soit par raport à ses asymptotes. Il suffira de construire le Problême par raport à son diametre.

Pour reduire l'équation $xx - 2ax - xy = -aa$, prenons, $x - a - \frac{1}{2}y = z$, ou $-x + a + \frac{1}{2}y = -z$; $z + a + \frac{1}{2}y = x$. & pour x substituons cette valeur, & pour xx, le quarré $zz + 2az + yz + aa + ay + \frac{1}{4}yy$; la premiere équation se changera en celle-ci, $\frac{1}{4}yy + ay = zz$, $yy + 4ay = 4zz$. Faisons encore $y + 2a = v$; $v - 2a = y$, & mettant cette valeur pour y, & le quarré $vv - 4av + 4aa$ pour yy; la reduite sera $vv - 4aa = 4zz$ qui se construira ainsi.

Sur AB élevez au point A la perpendiculaire infinie EAM, coupez $AE = 2AB = 2a$, & $AG = CD$, y; vous aurez $EG = EA + AG$, $2a + y = v$. Ensuite menez l'infinie GI parallele à AB, & BH parallele à AG: vous aurez $GD = AC$, x; $BH = CD$, y; $GH = AB$, a. Par les points E, B tirez encore l'infinie EB. Les triangles EAB, EGI, BHI sont équiangles 29. 1. Eucl. Ainsi EA, $2a : AB$, $a :: EG$, $v : GI$, $\frac{1}{2}v :: BH$, $y : HI$, $\frac{1}{2}y$. D'où il suit que $DI = GH + HI - GD = a + \frac{1}{2}y - x = -z$.

Apresent il faut faire reflexion, que dans l'équation reduite $4zz = vv - 4aa$, que nous construisons, le diametre est $2a = EA$, l'absciſſe est $v = EG$ prise sur ce diametre : mais que l'ordonnée est z ou $-z = DI$, & que ces coordonnées ne se touchent point, & qu'elles ne font pas un angle, comme les lieux Geometriques le demandent. Vous laisserez

donc l'ordonnée DI, où elle ſe trouve, & vous tranſporterez le demi-diametre EA & l'abſciſſe EG ſur la ligne EI, afin que la nouvelle abſciſſe EI faſſe un angle EID avec l'ordonnée ID. FIG. 16.

Dans le triangle rectangle EAB, $\overline{EB}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AB}^2 = 4aa + aa$, & $EB = \sqrt{5aa} = a\sqrt{5}$ ſera le demi-diametre ſubſtitué à la place du demi-axe AB, E étant toûjours le centre de l'hyperbole ; de ſorte que prenant $EF = EB$, vous aurez le diametre determiné $FB = 2\sqrt{5aa}$. De plus dans les triangles ſemblables EAB, EGI, vous avez cette proportion, EA, $2a$: EB, $\sqrt{5aa}$ :: EG, v : EI, $\frac{1}{2}v\sqrt{5}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}vv}$, qui ſera la nouvelle coupée ſubſtituée à la place de la coupée EG, v.

Ce n'eſt pas aſſez pour décrire l'hyperbole, d'avoir le diametre determiné FB : il faut encore connoître le parametre. Dans la premiere équation $4zz = vv - 4aa$, le terme $4zz$ nous aprend, que l'axe $2a$ eſt à ſon parametre, comme 4 à 1. Mais la raiſon n'eſt pas la même dans l'équation, que nous allons faire, & dans laquelle le diametre eſt $2\sqrt{5aa}$, & nous avons $\sqrt{\frac{1}{4}vv}$ pour v. Voici donc la maniere de determiner le parametre. L'ordonnée eſt toûjours z, FI eſt $FE + EI$, $\sqrt{5aa} + \sqrt{\frac{1}{4}vv}$, BI eſt $EI - EB$, $\sqrt{\frac{1}{4}vv} - \sqrt{5aa}$; nommons le parametre p. Par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $2\sqrt{5aa}$ eſt au parametre p : ainſi le rectangle $FI \times BI$, $\frac{1}{4}vv - 5aa$ eſt au quarré zz de l'ordonnée ; & 16. 6. Eucl. $2zz\sqrt{5aa} = \frac{1}{4}pvv - 5aap$, $4zz = \frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}} - \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$.

Puiſque dans les deux équations $4zz = vv - 4aa$, $4zz = \frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}} - \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$, les premiers membres $4zz$ ſont égaux, je conclus que les ſeconds $vv - 4aa$, $\frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}} - \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$ le ſont auſſi. Et ſuppoſant en particulier, que les deux premiers termes ſont égaux : je fais l'équation $vv = \frac{5pvv}{2\sqrt{5aa}}$, d'où il ſuit que le parametre $p = \frac{2}{5}\sqrt{5aa} = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$. Le même ſuit encore de l'égalité des deux derniers termes $4aa = \frac{10aap}{\sqrt{5aa}}$. Avec le diametre determiné & le parametre, l'hyperbole DBd ſe décrira. Je dis que tous les points D, d ſatisfont au Problême.

Dem. 1° au point d. Id eſt $Gd - GH - HI$, $x - a - \frac{1}{2}y = z$; $FI = EI + EF$, $\sqrt{\frac{1}{4}vv} + \sqrt{5aa}$; $BI = EI - EB$, $\sqrt{\frac{1}{4}vv} - \sqrt{5aa}$. Et par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $2\sqrt{5aa}$ eſt au parametre $\frac{2}{5}\sqrt{5aa}$: ainſi $FI \times IB$, $\frac{1}{4}vv - 5aa$ eſt à $\overline{Id}^2$, zz. & 16. 6. Eucl. $2zz\sqrt{5aa} = \frac{1}{2}vv\sqrt{5aa} - 2aa\sqrt{5aa}$, & diviſant par $\sqrt{5aa}$, $2zz = \frac{1}{2}vv - 2aa$, & multipliant par 2, $4zz = vv - 4aa$.

2° Au point D, ID eſt $GH + HI - GD$, $a + \frac{1}{2}y - x = -z$, & par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $2\sqrt{5aa}$ eſt au parametre $\frac{2}{5}\sqrt{5aa}$: ainſi $FI \times IB$, $\frac{1}{4}vv - 5aa$ eſt à $\overline{ID}^2$, zz ; $2zz\sqrt{5aa} = \frac{1}{2}vv\sqrt{5aa} - 2aa\sqrt{5aa}$, $2zz = \frac{1}{2}vv - 2aa$, $4zz = vv - 4aa$. Subſtituons pour zz ſa valeur $xx - 2ax - xy + aa + ay + \frac{1}{4}yy$, & pour vv ſa valeur $4aa + 4ay + yy$, l'équation ſera $4xx - 8ax - 4xy + 4aa + 4ay + yy = 4aa + 4ay + yy - 4aa$, qui

FIG. 16. ſe reduit à $4xx - 8ax - 4xy + 4aa = 0$. $xy = aa - 2ax + xx$ qui eſt l'équation à conſtruire. Enfin parce que la partie BM eſt la ſeule de l'hyperbole, d'où l'on puiſſe tirer les lignes CD ſur la ligne determinée AB, elle eſt auſſi la ſeule, qui ſatisfaſſe au Problême. Ce qu'il falloit démontrer. Au reſte la quantité negative $-z$ dans l'eſpace qui répond à AB finie, & la poſitive $+z$, qui répond à AB infinie; nous aprennent qu'il falloit avoir propoſé AB infinie, afin d'avoir une ſolution poſitive dans l'arc infini Bd.

REGLE X.

LA conſtruction & la démonſtration, que nous venons de faire, ſerviront d'exemple pour cette regle, qui eſt telle.

Après avoir rempli toutes les conditions d'un Problême, & formé la derniere équation, laquelle contient deux inconnuës x, y: ſouvent avant que d'en faire la conſtruction, il faut en ſubſtituer une ou deux autres, & faire une nouvelle équation, qu'on appelle la reduite. Si dans la conſtruction, qui ſe fait enſuite, les deux coordonnées de la reduite ſe touchent en un point & font un angle; il n'y a pas de difficulté. Mais ſi elles ſont tellement ſeparées l'une de l'autre, qu'elles ne faſſent point d'angle: alors on laiſſe celle, qui eſt l'appliquée, dans la poſition, que la conſtruction lui a donnée; mais on tranſporte le diametre & l'abſciſſe ſur une autre ligne, qui ſoit tellement diſpoſée, que les coordonnées faſſent un angle. Cette ligne étant trouvée, on y determine le ſommet, le centre, le diametre, les abſciſſes, ſuivant que la nature de la courbe à décrire, le demande. Le diametre precedent ſert à déterminer la valeur du nouveau diametre, l'abſciſſe precedente ſert auſſi à trouver celle de la nouvelle abſciſſe, par le moyen des triangles rectangles, ou ſemblables. Enſuite formant avec les valeurs de ce nouveau diametre & de cette nouvelle abſciſſe, l'équation propre de la courbe, qu'on doit décrire, on trouve la valeur du parametre. Toutes ces choſes étant determinées, on décrit la courbe, & on fait la demonſtration ſuivant l'équation, que ces dernieres valeurs du diametre, du parametre & des abſciſſes doivent donner; & par les ſubſtitutions on doit retrouver les équations precedentes. Nous trouverons encore pluſieurs exemples de cette regle dans les ſolutions des differens cas du Problême de Pappus, Livre 2, Partie 2.

Il arrive auſſi, qu'on laiſſe la coupée dans la poſition où elle ſe trouve d'abord, & qu'on lui cherche une nouvelle ordonnée correſpondante, comme on le fera, Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 1.

De ſorte que toutes les fois que l'abſciſſe & l'ordonnée de l'équation ne ſe touchent pas: il faut changer la poſition de l'une des deux, & leur faire former un angle. La diſpoſition des lignes fait juger, qu'elle eſt celle, qui doit être tranſportée.

REGLE XI.

APrès que le Problême eſt reſolu, l'on trouve quelquefois une impoſſibilité dans la derniere équation, $z + a = a$, $z = 0$. $z = \sqrt{-a}$. Le tout égal à la partie, une racine imaginaire. Alors le Problême eſt impoſſible.

Quelquefois l'on trouve une équation, dont les deux membres contiennent les mêmes lettres $ab = ab$, & qui, ôtant ab de chaque côté, ſe reduit à $0 = 0$. Ce qui montre, que la queſtion eſt neceſſairement telle qu'on l'a propoſée, & que c'eſt un Theorême, & non pas un Problême, qui a été propoſé. D'un point donné hors d'une ligne donnée abaiſſer une perpendiculaire ſur cette ligne, cette queſtion eſt un Problême, parce que de ce point vous pouvez tirer ſur la ligne donnée des lignes qui ne ſeront pas perpendiculaires; ainſi l'on cherche avec raiſon une methode ſure, pour abaiſſer une perpendiculaire. Mais faire un triangle rectangle, dont le quarré de la baſe ſoit égal aux quarrez pris enſemble des deux autres côtez, cette queſtion eſt un Theorême, parce qu'on ne peut pas s'y tromper, & que tout triangle rectangle a neceſſairement la proprieté, que l'on ſuppoſe ici ne convenir qu'à une eſpece de triangle rectangle.

Quelquefois l'on trouve une grandeur negative égale à une poſitive, $-z = \sqrt{aa - bb}$, $z = -\sqrt{aa - bb}$. Ce qui eſt une marque qu'il faut prendre la quantité z, ſur la même ligne d'un côté oppoſé à celui, où on l'a miſe pendant l'operation. Lorſque dans une équation l'inconnuë a deux dimenſions, elle a deux racines; lorſquelle a trois dimenſions, elle a trois racines, &c. Ces racines peuvent être réelles ou imaginaires, c'eſt-à-dire, impoſſibles; parmi les réelles il peut y en avoir de vrayes & de fauſſes. Lorſqu'elles ſont toutes vrayes, elles ſe prennent du même côté; lorſque les unes ſont vrayes, les autres fauſſes, les vrayes ſe mettent d'un côté, les fauſſes de l'autre. Il n'y a jamais qu'une racine, que l'on cherche, & qui donne la reſolution exacte du Problême; mais les autres en donnent la reſolution dans un ſens, qui ne peut être different de celui du Problême qu'en quelques circonſtances. Et toutes ces differentes ſolutions ſont regardées comme propres du Problême, qui pour lors nous découvre plus qu'on ne demande. Les racines fauſſes nous avertiſſent auſſi, qu'il ne faut que changer des additions en des ſouſtractions, ou des ſouſtractions en des additions pour faire un Problême peu different de celui qui eſt propoſé.

PROBLEME IV.

DU point B Fig. 2. pris hors de la ligne DE, abaiſſer deux perpendiculaires BA, BC ſur la ligne DE. Problême impoſſible. Fig. 2.

Que cela ſoit fait, nommons AB, x; AC, y; BC, z. puiſque l'angle BAC eſt droit, $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$ $zz = xx + yy$, $xx = zz - yy$. Et puiſque l'angle BCA eſt auſſi droit, $\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$,

$xx = zz + yy$. Donc $xx = zz - yy = zz + yy$, & $-yy = yy$. Equation impoſſible, qui aprend qu'il eſt impoſſible de tirer d'un ſeul point deux perpendiculaires ſur une même ligne.

PROBLEME V.

FIG. 1. DIviſer Fig. 1. une ligne AB en deux parties au point C, de telle façon que le quarré de la toute AB ſoit égal aux quarrez des ſegmens AC, CB, & a un rectangle ſous les ſegmens AC, CB. Problême impoſſible.

Que la ligne AB ſoit diviſée en C, comme on le demande, nommons AB, a; AC; x; CB ſera, $a - x$; & par la ſupp. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $+ AC \times CB$, $aa = xx + aa - 2ax + xx + ax - xx$, $- ax + xx = 0$, $ax = xx$, $a = x$, le tout égal à la partie, ce qui prouve l'impoſſibilité du Problême, lequel en effet eſt contraire à la Prop. 4. 2. Eucl.

PROBLEME VI.

FIG. 17. TRouver Fig. 17. un point A au dedans du rectangle donné $MNRP$. d'où ayant tiré aux quatre angles les quatre lignes AM, AN, AP, AR, les quarrez des deux lignes oppoſées, AP, AN ſoient égaux aux quarrez des deux autres lignes oppoſées AM, AR. C'eſt un Theorême.

Suppoſons la choſe faite, & par le point A menons FAK parallele à PM, nommons $MN = PR$, a; $MP = KF$, b; & les inconnuës $PF = MK$, z; $GP = AF$, x; nous aurons $KN = MN - MK$, $a - z = FR$; $AK = KF - AF$, $b - x$. Maintenant $\overline{AP}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{AF}^2$ $zz + xx$; $\overline{AN}^2 = \overline{KN}^2 + \overline{AK}^2$, $aa - 2az + zz + bb - 2bx + xx$; $\overline{AM}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{AK}^2$, $zz + bb - 2bx + xx$; $\overline{AR}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FR}^2$, $xx + aa - 2az + zz$. Et par l'hypotheſe $\overline{AP}^2 + \overline{AN}^2$, $zz + xx + aa - 2az + zz + bb - 2bx + xx = \overline{AM}^2 + \overline{AR}^2$, $zz + bb - 2bx + xx + xx + aa - 2az + zz$; c'eſt-à-dire $0 = 0$, car tous les termes de l'équation s'effacent. D'où il ſuit que c'eſt un Theorême, & que quelque point A, qu'on prenne au dedans du rectangle $MNRP$, les quarrez des deux lignes oppoſées AP, AN ſeront égaux aux quarrez des deux autres lignes oppoſées AM, AR.

PROBLEME VII.

FIG. 18. ETant donnée Fig. 18. la Parabole AD, dont on connoît le parametre p, & un point D pris ſur cette parabole; trouver ſur ſon axe AE, le point B tel, que ſi vous joignez les deux points B, D, qu'au point D, vous éleviez ſur DB la perpendiculaire DE, qui coupe l'axe en E, & qu'enfin du même point D vous abaiſſiez DC perpendiculaire ſur l'axe AE; le ſegment CE de l'axe compris entre les deux perpendiculaires DC, ED, ſoit égal à la moitié du parametre.

Nous trouverons une valeur negative ſeule, qui marquera que pour conſtruire

conſtruire le Problême, l'on doit prendre la grandeur AB d'un côté tout oppoſé à celui, dont on l'a priſe. L'on verra auſſi, qu'au lieu d'une ſouſtraction, il faut faire une addition. FIG. 18.

1. Que le point B ſoit celui que l'on cherche, qu'il ſoit ſur l'axe en dedans de la parabole, que ED ſoit perpendiculaire ſur DB, & DC ſur AE.

Nommons la donnée CE, $\frac{1}{2}p$; les inconnuës AB, z; l'abſciſſe AC, x; l'appliquée CD, y; & $BC = AC - AB$, $x - z$.

Par la Prop. 8. l. 6. Eucl. $EC \times CB = \overline{CD}^2$, $\frac{1}{2}px - \frac{1}{2}pz = yy$, & multipliant par 2, & diviſant par p, $x - z = \frac{2yy}{p}$. D'ailleurs par la nature de la parabole, $p \times AC = \overline{CD}^2$, $px = yy$. Mettez cette valeur de yy à ſa place dans l'équation $x - z = \frac{2yy}{p}$, elle ſe changera en celle-ci $x - z = 2x$, $-z = x$. C'eſt pourquoi puiſque AB eſt $+z$, la quantité $-z$ doit être priſe de l'autre côté de A. Prolongez donc l'axe AE au deſſus du ſommet A, juſqu'à ce que Ab ſoit égal à x, joignez bD, & tirez De perpendiculaire à Db, je dis que le ſegment Ce eſt $\frac{1}{2}p$.

Dém. Nommons Ab, z; AC, x; DC, y; Ce, $\frac{1}{2}p$. L'on aura $bC = bA + AC$, $z + x$, & 8. 6. Eucl. $Ce \times Cb = \overline{CD}^2$, $\frac{1}{2}pz + \frac{1}{2}px = yy$, $z + x = \frac{2yy}{p}$, & par la nature de la parabole $yy = px$; & ſi l'on met px pour yy dans $z + x = \frac{2yy}{p}$, ce ſera $z + x = 2x$, $z = x$. Ce qu'il falloit démontrer.

L'on avoit retranché AB de l'axe AE, en prenant le point B; & en prenant le point b, l'on ajoute Ab au même axe.

PROBLEME VIII.

DIviſer la ligne donnée AB Fig. 19. en moyenne & extrême raiſon, c'eſt-à-dire, en deux parties telles, que la toute ſoit au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre. FIG. 19.

Dans ce Problême la poſition de la racine negative eſt contraire à celle de la poſitive; & en mettant une addition à la place d'une ſouſtraction, l'on change le Problême propoſé en un autre peu different. De plus la ſeule racine poſitive reſout exactement le Problême.

1. Suppoſons que le point C ſoit celui qui diviſe la ligne AB de telle maniere, que la toute AB ſoit au plus grand ſegment BC, comme BC eſt au moindre ſegment CA. Nommons AB, a; BC, x; CA ſera $a - x$. Et par la ſuppoſition $AB, a : BC, x :: BC, x : CA$, $a - x \,.\, xx = aa - ax$, $xx + ax = aa$, & mettant $\frac{1}{4}aa$ dans chaque membre, $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$, dont il faut extraire les racines quarrées.

2. Comme le quarré $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ peut être produit par $x + \frac{1}{2}a$ multipliant $x + \frac{1}{2}a$, ou par $-x - \frac{1}{2}a$ multipliant $-x - \frac{1}{2}a$; il a deux racines, la premiere, $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & cette racine eſt poſitive, parce que ſa valeur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ eſt plus grande que zero. La ſeconde, $-x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, car c'eſt

FIG. 9. l'uſage de donner toûjours le ſigne + à l'inconnuë x : & lorſqu'elle eſt ainſi exprimée, ſi, comme il arrive ici, ſa valeur $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$ eſt moindre que zero, l'on dit que c'eſt une racine negative de l'équation. Mais ſi cette valeur, après que l'inconnuë a pris le ſigne + eſt au deſſus de zero, ainſi qu'on le verra dans le Problême I X. l'on dit que c'eſt une valeur vraye de l'inconnuë, quoique dans l'extraction de la racine, cette même inconnuë ait eu le ſigne —.

3. Pour conſtruire la racine poſitive $x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$: Au point A il faut élever $EA=\frac{1}{2}a$ perpendiculaire à AB, & joindre EB, couper $ED=EA$, faire $BC=BD$; le point cherché eſt C.

Démonſtration. Puiſque l'angle EAB eſt droit, $\overline{EB}^2=\overline{AB}^2+\overline{EA}^2=aa+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa$, & $EB=\sqrt{\frac{1}{4}aa}$. $BD=BE-ED$, $\frac{1}{2}-a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, $=x=BC$. Après cela $CA=a-x=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Mais ces trois quantitez AB, a; BC, $x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$; CA, $a-x=\frac{3}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, ſont telles, que le produit des extrêmes $AB\times CA$ eſt égal au quarré $\overline{BC}^2$ de la moyenne, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}aa-a\sqrt{\frac{1}{4}aa}=\frac{1}{4}aa-a\sqrt{\frac{1}{4}aa}+\frac{1}{4}aa$: donc 17. 6. Eucl. elles ſont en proportion continuë. Ce qu'il falloit démontrer.

4. L'on conſtruira de cette maniere la racine fauſſe $x=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, ou $-x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, parce que $+x$ a été pris ſur la ligne AB, en allant de B vers A, $-x$ ſe prendra ſur la même ligne AB prolongée, en allant de l'autre côté de B vers G. Je fais donc $BF=AE$, $\frac{1}{2}a$; & $FG=EB$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, & la ligne BG eſt $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}=-x$.

Dém. étant $-x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, $a-x$ ſera $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, car ici $a-x$ eſt une addition de a avec $-x$. Et l'on aura ces trois grandeurs en proportion continuë, AB, a; BG, $-x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$; AG, $a-x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, puiſque le produit des extrêmes & le quarré des moyennes ſont $\frac{1}{2}aa+a\sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Si c'eſt la racine fauſſe $x=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$ que l'on conſtruit, c'eſt la même operation, l'on prend $BF=\frac{1}{2}a$, $FG=\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, pour avoir BG, $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}=x$, car $-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$ ſont ici ajoûtées enſemble. Ainſi les grandeurs connuës qui ont —, ſe prennent du côté oppoſé à celui dont on a pris les grandeurs poſitives dans la valeur poſitive.

Dém. $a-x$ eſt $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$, & l'on a ces trois quantitez en proportion continuë, AB, a; BG, $x=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa}$; AG, $a-x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Puiſque le produit des extrêmes eſt égal au quarré des moyennes, $\frac{1}{2}aa+a\sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. L'on changera ce Problême en un autre peu different, ſi l'on met une addition à la place d'une ſouſtraction. Et la racine poſitive ſera la même dans le ſecond Problême que la negative du premier, & au contraire la negative du ſecond ſera la même que la poſitive du premier.

Le premier Problême ſe peut énoncer ainſi. Une ligne AB étant don-

Digitized by Google

née, il la faut couper en deux parties au point C, de telle ſorte que la toute AB ſoit à la retranchée BC, comme la retranchée BC eſt au reſte CA, & il y a ici une ſouſtraction. FIG. 19.

Le ſecond Problême s'exprimera de cette façon. La ligne AB étant donnée, lui en ajoûter une autre BG telle, que la donnée AB ſoit à l'ajoûtée BG, comme l'ajoûtée BG eſt à GA compoſée de la donnée & de l'ajoûtée.

6. Nommons AB, a; BG, x; AG, $a + x$. Par l'hypotheſe AB, $a : BG$, $x :: BG$, $x : AG$, $a + x$. $xx = aa + ax$; $xx - ax = aa$. Et ajoûtant $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{5}{4}aa$; dont les racines ſont, la premiere $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, racine poſitive, la même que la negative du premier problême. Car $-x - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ n. 2. peut ſe reduire à $-x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. La ſeconde $-x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, racine negative, la même que la poſitive du premier Problême, car $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ n. 2. peut ſe reduire à $-x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

7. Pour conſtruire la racine poſitive $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, l'on fait $BF = \frac{1}{2}a$, & $FG = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, BG ſera $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = x$; la ligne cherchée.

Dém. Il y a une proportion continuë entre ces trois grandeurs, AB, a; BG, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AG $a + x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. 17. 6. Eucl. puiſque $\overline{BG}^2 = AB \times GA = \frac{3}{2}aa + a\sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

La conſtruction de cette racine poſitive eſt la même que celle de la negative du Problême précedent.

8. Pour conſtruire la racine negative $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, ou $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, je prends de l'autre côté de B la ligne $BC = BD = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = -x$.

Dém. 17. 6. Eucl. Ces trois grandeurs ſont en proportion continuë AB, a; BC, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AC, $a - x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$: car ici $a - x$ eſt une addition : où ces trois AB, a; BC, $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; AC, $a - x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$: puiſque le rectangle ſous les extrêmes & le quarré des moyennes ſont égaux ; à ſavoir $\frac{3}{2}aa - a\sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Ce qu'il falloit démontrer.

La conſtruction de cette racine negative eſt ſemblable à la conſtruction de la poſitive du Problême precedent.

9. L'on trouve dans ces reſolutions plus que l'on ne cherche.

Dans le premier Problême l'on cherche une ligne, qui doit être retranchée de la ligne AB, la racine poſitive determine cette ligne ; & la negative indique une autre ligne qui doit être ajoûtée à la ligne AB, pour faire un Problême un peu different.

Au contraire dans le ſecond Problême l'on cherche une ligne, qui doit être ajoûtée à la ligne AB, la racine poſitive donne la ligne cherchée ; & la negative montre une autre ligne, qui doit être retranchée de la ligne AB pour faire un Problême auſſi un peu different.

PROBLEME IX.

FIG. 20. ETant donnez Fig. 20. le demi-cercle AEB, & hors de ce cercle la ligne infinie FD parallele au diametre AB; tirer de l'extrêmité A de ce diametre la ligne AD de telle maniere, que la partie AE ſoit égale à la partie ED.

Les deux racines ſe prennent ici du même côté, parce qu'elles ſont toutes deux poſitives. La reſolution donne encore plus que l'on ne demande, Il y aura auſſi pluſieurs cas.

1. Suppoſons la choſe faite. Par le point E tirons FEC perpendiculaire aux paralleles AB, FD. Les deux triangles AEC, FED ſont équiangles 29. 1. Eucl. & parce que les baſes AE, ED ſont égales, ils ſont égaux, 26. 1. Eucl. & $CE = EF$. Nommons les connuës AB, a; CF, b; CE, $\frac{1}{2}b$. Les inconnuës AC, x; CB, $a - x$.

2. Cor. 8. l. 6. Eucl. La ligne EC eſt moyenne proportionelle entre les lignes AC, CB: donc 17. 6. Eucl. $AC \times CB = \overline{EC}^2$, $ax - xx = \frac{1}{4}bb$, $xx - ax = -\frac{1}{4}bb$, $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Dont la premiere racine eſt $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, la ſeconde eſt $-x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$.

3. Vous conſtruirez ainſi la premiere racine $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$. Au centre G élevez GH perpendiculaire au diametre AB, ſur GH comme diametre decrivez le demi-cercle HKG, dans lequel vous inſcrirez $HK = \frac{1}{2}b$, joignez KG, & faites $GC = GK$. Au point C élevez CF perpendiculaire à AB, qui coupera la circonférence AEB au point E, par lequel vous menerez la ligne AED. Vous aurez $AE = ED$; & $GH = GA$, $\frac{1}{2}a$.

Dém. l'angle HKG dans le demi-cercle eſt droit 31. 3. Eucl. donc $\overline{GK}^2 = \overline{GH}^2 - \overline{HK}^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, & $GK = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb} = GC$ par la conſtruction. Ainſi $AC = AG + GC = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb} = x$; & $CB = AB - AC$, $a - x$. Or par la conſtruction EC eſt perpendiculaire à AB, & Cor. 8. l. 6. Eucl. moyenne proportionelle entre AC, CB: donc 17. 6. Eucl. $\overline{EC}^2 = AC \times CB = ax - xx = \frac{1}{4}bb$. n. 2. Donc $EC = \frac{1}{2}b = EF$. C'eſt pourquoi les triangles AEC, FED équiangles 29. 1. Eucl. ont encore les côtez EC, EF égaux: donc 26. 1. Eucl. ils ſont entierement égaux, & les baſes AE, ED ſont égales. Ce qu'il falloit démontrer.

Cette premiere racine eſt poſitive, parce qu'elle s'étend ſur AB, du côté que l'on a pris $+ x$.

4. Vous conſtruirez la ſeconde racine $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, en retranchant de AG, $\frac{1}{2}a$ la ligne $Gc = GC$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, & vous

aurez $Ac = AG - Gc$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, $= x$. Au point c vous éleverez la ligne cf perpendiculaire à AB, & qui coupera la circonference AEB au point e, par où vous menerez Aed, les lignes Ae, ed ſeront égales. FIG. 19.

Dém. La ligne Ac eſt x, donc la ligne eB, $a - x$. Or ce eſt moyenne proportionelle entre Ac, eB; donc $\overline{ce}^2 = Ac \times eB = ax - xx = \frac{1}{4}bb$. n. 2. & $ce = \frac{1}{2}b = ef$.

Les triangles Aec, fed équiangles ont les côtez ce, ef égaux, & $Ae = ed$. Ce qu'il falloit démontrer.

L'on trouveroit la même choſe, ſi l'on conſtruiſoit cette ſeconde racine exprimée par $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$. Puiſque $+x$ a été pris ſur AB en allant de A vers B, $-x$ ſe doit prendre de l'autre côté de A. Soit donc $Ag = GC$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, & $gc = AG$, $\frac{1}{2}a$; l'on aura $-Ac = Ag - gc$, $-x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb} - \frac{1}{2}a$.

Le point c ſera le même dans les deux conſtructions, car Ag & Gc ont été priſes égales à GC, elles ſont donc égales; ajoûtez leur la ligne commune Ac, vous aurez $gc = AG$, $\frac{1}{2}a$. L'uſage eſt de conſtruire $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$, plûtôt que $-x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$.

Parce que tant la valeur de x, que celle de $-x$ eſt toûjours Ae, qui ſe trouve du même côté que AC, cette ſeconde racine s'appelle poſitive comme la premiere AC, & l'on dit que l'équation $xx - ax = -\frac{1}{4}bb$. n. 2. a deux racines poſitives.

5. La reſolution du Problême donne plus que l'on ne cherche. Il falloit trouver une ligne AD tellement diviſée par la circonference du demi-cercle en E, que AE, ED fuſſent égales : & l'on a encore trouvé une autre ligne Ad, qui eſt coupée de la même maniere au point e.

6. Afin que le Problême ſoit poſſible, il faut que la perpendiculaire CF ne ſoit pas plus grande que le diametre AB; car ſi elle étoit plus grande, $\frac{1}{2}b$ ſeroit plus grand que $\frac{1}{2}a$, & $\frac{1}{4}bb$ que $\frac{1}{4}aa$, & le terme $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$ ſeroit une racine imaginaire, qui ſuppoſeroit, que l'on peut tirer la racine quarrée d'une grandeur negative $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, ce qui eſt impoſſible, à cauſe que tous les quarrez ſont poſitifs, $-a$ multipliant $-a$ produit $+aa$, auſſi bien que $+a$ multipliant $+a$.

Lorſque $a = b$, les deux racines ſe reduiſent à $x = \frac{1}{2}a$. Dans ce cas le point E tombe ſur le point H; la perpendiculaire CF tombe ſur GH, & l'on a AG, $x = \frac{1}{2}a$.

PROBLEME X.

ETant données la ſomme 136. des côtez & des diametres d'un Rhombe, & la difference 8 de ſes deux diametres : trouver le côté, & chaque diametre.

La racine qui paroît d'abord ici positive, donne une solution negative, & celle au contraire qui paroît d'abord negative, en donne une positive. Toutes deux sont positives. En mettant une soustraction à la place d'une addition, le Probleme se change en un autre peu different.

FIG. 21. 1. Supposons que Fig. 21. le triangle ACB rectangle en C est un de ceux que les diametres du Rhombe font en se coupant. Nommons la somme 136 des côtez & des diametres $4a$; la difference 8 des diametres, $4b$; la somme des côtez, $4z$; la somme des diametres sera $4a - 4z$.

Lorsqu'on divise une somme $2a = 20$ en deux parties $f = 12$, $g = 8$, dont la difference est $2b = 4$: la plus grande partie $f = 12$ est égale à la moitié de la somme, plus la moitié de la difference; $f = a + b$, $10 + 2 = 12$: la plus petite partie $g = 8$ est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la difference; $g = a - b$, $10 - 2 = 8$. Car si l'on ajoûte les quantitez $a + b$, $a - b$, la somme est $2a$, & la difference $2b$. Ainsi le grand diametre du Rhombe sera $2a - 2z + 2b$; le petit $2a - 2z - 2b$; & AC moitié du grand diametre, $a - z + b$; BC moitié du petit, $a - z - b$; & AB un des quatre côtez, z.

2. Dans le triangle rectangle ACB, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, ce qui s'exprime en termes Analytiques de cette façon, $zz = aa - 2az + 2ab + zz - 2bz + bb + aa - 2az - 2ab + zz + 2bz + bb$, qui se reduit à $zz - 4az = -2aa - 2bb$, & ajoûtant $4aa$ dans chaque membre, $zz - 4az + 4aa = 2aa - 2bb$. La premiere racine est $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroît d'abord vraye parce que l'inconnuë z s'y trouve avec $+$, mais elle devroit plûtôt être appellée negative, parce que le diametre AD, $2a$ étant plus grand que le côté AB, z; la grandeur $z - 2a$ est au dessous de zero. La seconde racine est $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroît fausse, parceque l'inconnuë z s'y trouve avec $-$, mais elle est vraye, parce que le diametre AD, $2a$ étant plus grand que le côté AB, z; la quantité $-z + 2a$ est plus grande que zero. La premiere donnera une solution negative, la seconde une positive.

Dém. La quantité $\sqrt{2aa - 2bb}$ est $= \sqrt{2312 - 8} = \sqrt{2304} = 48$. La seconde racine $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb} = 68 - 48 = 20$; les quatre côtez du Rhombe $4z$, 80; & parceque la somme des côtez & des diametres par la supp. est $4a$, 136; si je soustrais 80 de 136, il restera $4a - 4z = 56$, la somme des diametres; dont le plus grand AD, $2a - 2z + 2b = 32$; le plus petit EB, $2a - 2z - 2b = 24$. Leur difference est 8 suivant l'hypothese, AB, 20; AC, 16; CB, 12. Ainsi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $400 = 256 + 144$.

Prenons maintenant la premiere racine $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb} = 68 + 48 = 116$; les quatre côtez du Rhombe $4z$, 464; & parce que la somme des côtez & des diametres par l'hyp. est $4a$, 136; si je soustrais

464 de 136, il reſtera $4a - 4z = -328$, pour la ſomme des diamètres; dont le plus grand AD, $2a - 2z + 2b = -160$; le plus petit EB, $2a - 2z - 2b = -168$. Leur difference eſt $+8$ ſelon l'hypotheſe, car $+8$ ajoûté à -168, fait -160. Et AB, 116; AC, -80; CB, -84. Ainſi $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $13456 = 7056 + 6400$. FIG. 11.

Il eſt donc vrai que la ſeconde racine $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroît donner z negative, donne une ſolution, dont tous les chifres ſont poſitifs. Au contraire la premiere racine $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, qui paroit donner z poſitive, ne peut reſoudre le Problême, ſans employer des chifres negatifs. Cependant la valeur des deux z eſt poſitive. Ce qu'il falloit démontrer.

3. La ſomme des côtez du Rhombe étoit donnée, ce qui eſt une addition; ſi l'on donne la difference de ces mêmes côtez, ce qui eſt une ſouſtraction, le Problême ſera un peu different, & ſa racine poſitive ſera la même que la negative precedente, comme auſſi ſa racine negative ſera la même que la poſitive precedente. Voici comme le Problême ſe propoſera.

Etant donnée la difference 136 des côtez & des diametres d'un Rhombe, & la difference 8 des deux diametres, trouver le côté & chaque diametre.

4. Nommons 136, $4a$; 8, $4b$; la ſomme des côtez $4z$; la ſomme des diametres $4z - 4a$; le grand diametre $2z - 2a + 2b$ le petit $2z - 2a - 2b$, : & AC, $z - a + b$; BC, $z - a - b$; AB, z. Et 47. 1. Eucl. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ $zz = zz - 2az + 2bz + aa - 2ab + bb + zz - 2az - 2bz + aa + 2ab + bb$; $zz - 4az = -2aa - 2bb$. La même que n. 2. & ſes racines $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$ ou $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb}$; $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$, ou $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb}$.

La racine $z - 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$ pouvoit être appellée negative n. 2. parce que AD, $2a$ étoit plus grande que AB, z: ici elle eſt poſitive, parceque, comme on le verra, z, 116 eſt plus grande, que $2a$, 68. L'on voit encore, que la racine $-z + 2a = \sqrt{2aa - 2bb}$ qui étoit poſitive n. 2. pourroit être ici appellée negative.

Dém. la premiere racine eſt $z = 2a + \sqrt{2aa - 2bb}$, $= 116 = AB$; $4z = 464$; $4z - 4a = 328$; le grand diametre $2z - 2a + 2b = 168$; AC, 84; le petit diametre $2z - 2a - 2b = 160$; $BC = 80$. La difference des diametres AD, 168; BE, 160 eſt 8 ſelon l'hyp. Et 47. 1. Eucl. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, $13456 = 7056 + 6400$.

La ſeconde racine eſt $z = 2a - \sqrt{2aa - 2bb} = 20 = AB$; $4z = 80$; $4z - 4a = -56$; le grand diametre $2z - 2a + 2b = -24$; le petit $2z - 2a - 2b = -32$; dont la difference eſt $+8$, laquelle étant ajoûtée au plus petit -32, fait le plus grand -24, $AC = -12$;

FIG. 12. $BC = -16$. Et 47. 1. Eucl. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$, $400 = 144 + 256$.

Voilà tout ce qu'il falloit démontrer.

REGLE XII.

LOrsqu'on veut qu'une équation ſerve d'exemple, on l'appelle Formule. Il y a des formules, qui mettent d'abord ſous les yeux toutes les combinaiſons que peuvent avoir les termes & les ſignes d'une ſorte d'équations ; il y en a qui renferment tous les cas qui peuvent arriver dans la reſolution & dans la conſtruction d'un Problême. Il y en a qui expriment tous les differens degrez des courbes, à qui on a donné le même nom.

L'équation $x^3 \pm axx \pm abx \pm abc = o$, qui pourroit auſſi s'exprimer ainſi $x^3 \pm_o axx \pm_o abx \pm_o abc = o$, mais l'uſage eſt de ne mettre que les ſignes $\pm$; cette équation, dis-je, repreſente toutes les équations poſſibles de trois dimenſions, dans leſquelles l'inconnuë dans ſa plus haute puiſſance a le ſigne $+$; & les autres termes peuvent avoir l'un des deux ſignes indifferemment, ou être nuls ou évanoüis, ce qui ſe marque ainſi $*$; la lettre a repreſente toute quantité, qui multiplie l'inconnuë au ſecond terme ; les lettres ab repreſentent toute quantité, qui multiplie l'inconnuë x au troiſiéme terme ; & les lettres abc repreſentent toute quantité, qui ne multiplie pas l'inconnuë au quatriéme terme. L'équation $z^3 \pm \frac{f}{c}zz * - ffx = o$ eſt renfermée dans la formule generale ; les quantitez $+f - \frac{d}{c}$ qui multiplient ici zz au ſecond terme répondent à la lettre a de la formule generale, qui multiplie xx ; le troiſiéme terme eſt ici évanoüi ; les quantitez ffx qui compoſent ici le quatriéme terme répondent au quatriéme terme abc de la formule generale. L'équation $xyy - \frac{dd}{x}y \pm \frac{cxx}{ccd} = o$ eſt auſſi compriſe dans la formule generale. Ici le premier terme y^3 eſt nul ; x qui multiplie yy au ſecond terme répond à la quantité a de la formule generale, qui multiplie xx au ſecond terme ; la quantité $-\frac{dd}{x}$ du troiſiéme terme répond aux lettres ab du troiſiéme terme de la formule generale ; les grandeurs $+cxx - ccd$ répondent aux grandeurs abc du quatriéme terme de la formule generale.

Si une formule, qui a deux indeterminées, peut convenir à pluſieurs lignes droites ou courbes, parceque les lignes qui ſont exprimées par ces deux indeterminées, peuvent être tirées ſur chacune de ces lignes droites ou courbes : alors pour appliquer la formule à une courbe en particulier ; vous ſubſtituez à la place d'une des indeterminées, la valeur que cette indeterminée a dans cette courbe. Cette valeur ſe tire ordinairement de l'équation propre de la courbe. C'eſt ce que M. DESCARTES a pratiqué dans ſa fameuſe Methode des Tangentes, L. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 3. & que vous verrez Problême XI. qui ſuit.

Quand vous avez un Problême, où l'on demande un point, une ligne, qui

qui peuvent avoir differente poſition, vous reſolvez tous les cas ; aprés quoi ſi vous voulez en donner la ſolution, par une formule generale, vous propoſez d'abord la reſolution la plus compoſée, c'eſt-à-dire, celle qui a le plus de termes, dont chaque terme contient un plus grand nombre de lettres, & dont la conſtruction demande un plus grand nombre de lignes. Enſuite vous appliquez la formule à chaque cas particulier, en effaçant les termes, où ſe trouvent les lettres, qui repreſentent des lignes, leſquelles diſparoiſſent à meſure que les cas deviennent plus ſimples. Et cela vous évite la peine du calcul. M. DESCARTES en a des exemples dans toute la reſolution du Problême de Pappus, L. 2. Part. 2. Sect. 2. Vous en trouverez un dans le Problême XII. qui ſuit.

* Lorſqu'on veut que la ſolution d'un Problême ſerve de formule, M. DESCARTES dit, qu'il faut retenir juſqu'à la fin toutes les mêmes lettres qu'on a poſées dès le commencement, c'eſt-à-dire, qu'il ne faut pas pour abreger faire des ſubſtitutions ſemblables à celle-ci $aab + \frac{acd}{f} - 42 \frac{ssn}{m} - n^3 = ggh$, & employer dans le calcul ggh pour les quatre termes, auſquels on l'a égalé. Ou bien ſi on change ainſi quelques lettres pour la facilité du calcul, il les faut remettre à la fin, à cauſe qu'ordinairement pluſieurs s'effacent. L'on apperçoit auſſi mieux, lorſqu'on ne fait point de changement, les differentes combinaiſons & les differens raports, que les lettres & les lignes, qui ſervent à la reſolution & à la conſtruction d'un Problême, ont entr'elles. * *Tom. 3. Lett. 8.*

Les Problêmes ſuivans éclairciront cette regle.

PROBLEME XI.

UNe courbe AD Fig. 18. étant donnée, dont AC eſt un diametre quelconque : trouver ſur cette courbe le point D tel, que l'appliquée DC à ce diametre ſoit égale à ſon abſciſſe AC correſpondante. FIG. 18.

Ce Problême fournira une formule generale, qui s'appliquera à differentes courbes, en ſubſtituant à la place d'une des inconnuës qui repreſente l'appliquée de la courbe, la valeur de cette appliquée tirée de l'équation conſtitutive de chaque courbe.

1. Soit D le point cherché. Nommons l'abſciſſe AC, x ; l'appliquée CD, y. L'hypotheſe donne $CD = AC$, $y = x$, qui ſera la formule generale.

2. Cette formule s'applique à la parabole, en prenant la valeur de y dans l'équation à la parabole $yy = px$, & c'eſt $y = \sqrt{px}$. Subſtituez cette valeur de y à ſa place dans la formule $y = x$; vous aurez $\sqrt{px} = x$; & quarrant les deux membres $px = xx$, $x = p$. Ce qui ſignifie, que ſi l'on coupe l'abſciſſe AC, x égale au parametre, & que par le point C l'on mene CD appliquée au diametre AC, l'on aura $AC = CD$.

3. Vous appliquerez la formule au cercle, en tirant la valeur de y de

FIG. 18. l'équation $yy = 2ax - xx$, & ce ſera $y = \sqrt{2ax - xx}$; que vous ſubſtituerez à la place de y dans la formule pour avoir $\sqrt{2ax - xx} = x$, dont les quarrez ſont $2ax - xx = xx$, $2ax = 2xx$, $x = a$. D'où il ſuit que $2a$ étant le diametre, a le rayon, l'abſciſſe x ſera égale au rayon, & qu'il n'y a que le centre du cercle, où l'abſciſſe ſoit égale à l'appliquée correſpondante.

4. L'équation à l'ellipſe eſt $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$; $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$; $y = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{d}} = x$; $\frac{2apx - pxx}{d} = xx$; $2ap - px = dx$, $dx + px = 2ap$, $x = \frac{2ap}{d+p}$. Ce qui prouve qu'en faiſant, comme $d + p$ la ſomme du diametre & du parametre eſt à $2a$ le diametre : de même le parametre p, eſt à une quatriéme ligne $\frac{2ap}{d+p} = x$, ce ſera l'abſciſſe AC, qui ſera égale à ſon appliquée correſpondante CD.

5. L'équation à l'hyperbole par raport à ſes diametres $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$, $yy = \frac{2apx + pxx}{d}$ donne $y = \sqrt{\frac{2apx + pxx}{d}} = x$; $2apx + pxx = dxx$; $2ap + px = dx$. Maintenant ſi l'on ſuppoſe le diametre d plus grand que le parametre, c'eſt $dx - px = 2ap$; $x = \frac{2ap}{d-p}$. C'eſt pourquoi il faut faire, comme $d - p$ le diametre moins le parametre eſt au diamêtre $2a$: de même le parametre p eſt à une quatriéme ligne $\frac{2ap}{d-p} = x$, l'abſciſſe cherchée, laquelle a une ordonnée correſpondante qui lui eſt égale.

Mais ſi le parametre p eſt plus grand que le diametre d, l'équation $2ap + px = dx$ ſe changera en $px - dx = -2ap$; $x = \frac{-2ap}{p-d}$, ou $-x = \frac{2ap}{p-d}$, qui étant une grandeur negative, avertit qu'il n'y a point d'appliquée telle, qu'on la deſire dans l'hyperbole, où on l'a cherchée ; mais qu'il faut prendre de l'autre côté du ſommet ſur le même axe, une ligne $= \frac{2ap}{p-d}$ & que l'on trouvera dans l'hyperbole oppoſée la ſolution du Problême.

6. Pour la ſeconde parabole cubique $axx = y^3$, il n'y a qu'à faire $axx = x^3$, $x = a$ le parametre, ainſi la coupée étant priſe égale au parametre, l'ordonnée leur ſera auſſi égale.

L'équation de la premiere parabole cubique $aax = y^3$ ſe change en $aax = x^3$, $x = a$. De ſorte que le même arrive ſur cet article aux deux paraboles cubiques, qu'à la parabole ordinaire.

7. La même methode s'étend à l'équation $xy = ab$ de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, $y = \frac{ab}{x} = x$, $ab = xx$, $x = \sqrt{ab}$. Ainſi l'abſciſſe qui ſera moyenne proportionelle entre les grandeurs a & b aura une appliquée correſpondante, qui lui ſera égale.

8. Elle peut encore s'appliquer aux lieux à la ligne droite, dont l'équation eſt $y = \frac{bx}{a} = x$; $bx = ax$, $b = a$. D'où l'on conclut, que l'on n'aura point de coupée x égale à ſon appliquée correſpondante y, que lorſque a ſera égale à b.

PROBLEME XII.

UNe parabole KDB Fig. 22. étant donnée avec ſon axe CKF, & ſon parametre KP infiniment prolongez, & un point A dans l'eſpace infini PKF: tirer du point A la droite ſecante ADB ſur la partie infinie KDB de telle ſorte que la partie AD ſoit égale à la partie DB. FIG. 22.

L'on trouvera ici une formule compoſée, qui deviendra plus ſimple à meſure qu'on l'appliquera à des cas particuliers, pour leſquels il faut moins de lignes.

1. Tirez AF perpendiculaire à l'axe FG, AH parallele au même axe, & les appliquées DC, BG, & ſuppoſez que les points D, B, ſont ceux que vous cherchez. Nommez les connuës AF, b; FK, c; le parametre de la parabole p; les inconnuës $AD = DB$, z; AB, $2z$; KC, x; KG, v; DC, y; BG, f; vous aurez $FC = FK + KC$, $c + x = AE$; $FG = FK + KG$, $c + v = AH$; $DE = DC - EC$, $y - b$; $BH = BG - HG$, $f - b$.

2. Dans les triangles équiangles 29. 1. Eucl. ADE, ABH, vous avez $AD, z : DE, y - b :: AB, 2z ; BH, f - b$. $fz - bz = 2yz - 2bz$, $f = 2y - b = BG$. $AD, z : AE, c + x :: AB, 2z : AH, c + v$. $cz + vz = 2cz + 2xz$, $v = c + 2x = KG$. Par la nature de la parabole, $p \times KC = \overline{CD}^2$, $px = yy$, $y = \sqrt{px}$. & $p \times KG = \overline{GB}^2$, $cp + 2px = 4yy - 4by + bb$; pour y mettez ſa valeur; & vous aurez $cp + 2px = 4px - 4b\sqrt{px} + bb$, $4b\sqrt{px} = 2px + bb - cp$. Quarrez les deux membres, $16bbpx = 4ppxx + 4bbpx - 4cppx + b^4 - 2bbcp + ccpp . xx - \frac{2bbx}{p} - cx = \frac{bbc}{2p} - \frac{b^4}{4pp} + \frac{1}{4}cc$. Mettez de part & d'autre $\frac{2b^4}{4pp} + \frac{2bbc}{2p} + \frac{1}{4}cc$, & vous aurez $xx - \frac{2bbx}{p} - cx + \frac{2b^4}{4pp} + \frac{2bbc}{2p} + \frac{1}{4}cc = \frac{2b^4}{4pp} + \frac{2bbc}{2p} + \frac{1}{4}cc - \frac{b^4}{4pp} + \frac{bbc}{2p} - \frac{1}{4}cc = \frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}$. Extrayez la racine quarrée, $x - \frac{2bb}{2p} - \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$; $x = \frac{2}{2}\frac{bb}{p} + \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$, qui ſera la formule generale la plus compoſée de ce Problême.

Pour la conſtruire, il n'y a qu'à couper KC, $x = \frac{2bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$, & appliquer CD au point C, & par les points A, D, mener ADB.

4. Que le point donné ſoit F pris ſur l'axe. Alors, comme on le voit Fig. 23. le point A tombe ſur F, la ligne AH ſur l'axe FG, & AF, $b = o$. C'eſt pourquoi dans la formule $x = \frac{2bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2bb + 2cp}$ l'on efface les termes, où b ſe rencontre, parceque une quantité multipliée par zero, eſt égale à zero. Il reſte $x = \frac{1}{2}c$ qui ſe conſtruit en prenant $KC = \frac{1}{2}c$, en appliquant CD, & en tirant FDB. FIG. 23.

Cela exempte du calcul, qu'il auroit fallu faire pour ce cas particulier, de cette façon. Nommons FK, c; le parametre; p; $FD = DB$, z; FB,

Fig. 23. $2z$; KC, x, KG, v; DC, y; BG, f; $FC = FK + KC$, $c + x$; $FG = FK + KG$, $c + u$.

Les triangles ſemblables FCD, FGB donnent ces Analogies. FD, z: DC, y:: FB, $2z$: BG, f; $fz = 2yz$, $f = 2y = BG$, FD. z: FC, $c + x$:: FB: $2z$: FG, $c + v$; & $cz + vz = 2cz + 2xz$; $v = c + 2x = KG$.

Maintenant par la nature de la parabole $p \times KC = \overline{CD}^2$, $px = yy$; & $p \times KG = \overline{GB}^2$, $cp + 2px = 4yy$. Donc $yy = \frac{1}{4}cp + \frac{1}{2}px = px$; $\frac{1}{2}px = \frac{1}{4}cp$; $x = \frac{1}{2}c$. La même valeur, que l'on a d'abord trouvée, en effaçant dans la formule generale tous les termes, ou $b = o$ ſe rencontroit.

5. Mettons le point donné ſur le parametre en a, qui n'eſt pas le ſommet Fig. 22. la quantité FK, c eſt nulle, effacez donc tous les termes, dans leſquels c ſe trouve dans la formule $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2bb + 2cp}$, & vous aurez $x = \frac{3bb}{p} + \frac{bb}{p}\sqrt{2}$. Faites $KC = x$, &c.

Le calcul, qu'on s'épargne, donneroit la même valeur de x. Aprés avoir ſuppoſé la choſe faite, & que la parabole eſt coupée, comme il faut aux points D, d par la ligne aDd laquelle n'eſt pas tirée; menez ah parallele à KC, & les ordonnées DC, dg. Nommez aK, $b = eC = hg$; le parametre, p; $aD = Dd$, z; ad, $2z$; KC, $x = ae$; Kg, $v = ah$; DC, y; dg, f; $De = DC - eC$, $y - b$; $dh = dg - gh$, $f - b$;

Les triangles équiangles aDe, adh donnent ces Analogies, aD, z: De, $y - b$:: ad, $2z$: dh, $f - b$. $fz - bz = 2yz - 2bz$; $f = 2y - b = dg$. De plus aD, z: ae, x:: ad, $2z$: ah, v. $vz = 2xz$; $v = 2x = Kg$. Maintenant par la nature de la parabole $p \times KC = \overline{DC}^2$, $px = yy$, $y = \sqrt{px}$. & $p \times Kg = \overline{dg}^2$, $2px = 4yy - 4by + bb$; $2y - b = \sqrt{2px}$, $y = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2px} = \sqrt{px}$; $\sqrt{px} - \frac{1}{2}\sqrt{2px} = \frac{1}{2}b$; dont les quarrez ſont $px - \sqrt{2ppxx} + \frac{1}{2}px = \frac{1}{4}bb$; $\frac{3}{2}px - \sqrt{2ppxx} = \frac{1}{4}bb$; $\frac{3}{2}px - \frac{1}{4}bb = \sqrt{2ppxx}$, dont les quarrez ſont $\frac{9}{4}ppxx - \frac{3}{4}bbpx + \frac{1}{16}b^4 = 2ppxx$; $\frac{1}{4}ppxx - \frac{3}{4}bbpx = -\frac{1}{16}b^4$. Diviſons tout par $\frac{1}{4}pp$, $xx - \frac{3bb}{p}x = -\frac{1}{4}\frac{b^4}{pp}$; $xx - \frac{3bb}{p}x + \frac{9b^4}{4pp} = \frac{9b^4}{4pp} - \frac{b^4}{4pp} = \frac{2b^4}{pp}$; $x - \frac{3bb}{2p} = \sqrt{\frac{2b^4}{pp}}$; $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{bb}{p}\sqrt{2}$. La même valeur que l'on avoit trouvée auparavant independamment du calcul.

6. Suppoſons que le point donné eſt le ſommet K; les lignes AF, b; FK, c diſparoiſſent, & ſi l'on efface les termes où elles ſe trouvent dans la formule $x = \frac{3bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{2b^4}{pp} + \frac{2bbc}{p}}$, elle ſe reduit à $x = o$. Ce qui marque qu'il eſt impoſſible, qu'une droite tirée du ſommet K, ſur la partie infinie KDd de la parabole la coupe de la façon qu'on le demande ici. En effet, une telle ligne coupera la parabole en un point ſeulement.

7. Au reſte en parcourant les differens cas d'un Problême; rarement on fait une nouvelle Figure 23e pour un cas particulier; rarement on tire de

nouvelles lignes ah, dg Fig. 22. mais à moins, que de grandes difficultez ne le demandent ; on ſe contente de la figure, qui ſert à la ſolution generale.

PROBLEME XIII.

ETant donné le triangle rectiligne BAC Fig. 14. trouver ſon aire. Ce Problême remet les lettres, dont on avoit abregé la valeur ; afin de faire une formule generale. FIG. 14.

1. Du ſommet A j'abaiſſe AD perpendiculaire ſur CB, & cette perpendiculaire eſt auſſi connuë. C'eſt pourquoi j'aurai l'aire du triangle BAC, en multipliant la moitié de la perpendiculaire AD par la baſe BC, ou la moitié de CB par DA, & l'aire ſera $\frac{1}{2} AD \times BC$, ou $\frac{1}{2} BC \times AD$.

2. Mais ſi l'on exige que les trois côtez ſoient exprimez dans la valeur de l'aire. Je nomme AB, a; AC, b; BC, c; AD, d; BD, z; $DC, c - z$; & l'aire y.

$\overline{AD}^2$, $dd = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$, $aa - zz = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, $bb - cc + 2cz - zz$; équations qui ſe reduiſent à $2cz = aa - bb + cc$; $z = \frac{aa - bb + cc}{2c}$ que je nomme f, pour abreger ; & je mets cette valeur de z dans l'équation $dd = aa - zz$, pour avoir $dd = aa - ff$, $d = \sqrt{aa - ff} = AD$, que je multiplie par $\frac{1}{2} BC$, $\frac{1}{2} c$; le produit eſt $\frac{1}{2} c \sqrt{aa - ff} = y$ aire du triangle. Ce qui ſuffit, ſi je ne veux reſoudre le Problême que par rapport au triangle donné ABC, puiſque f renferme l'expreſſion des trois côtez.

3. Mais s'il faut faire une formule generale pour toute ſorte de triangles, & faire ſervir cette ſolution particuliere pour un exemple qui ſerve à la reſolution de tout autre triangle ; de ſorte que les lettres a, b, c, qui ſignifient ici les côtez determinez AB, AC, BC, repreſentent les trois côtez de toute ſorte de triangles ; & que d qui ne ſignifie maintenant que la perpendiculaire AD, repreſente la perpendiculaire abaiſſée ſur le côté d'un triangle quelconque : dans l'équation $y = \frac{1}{2} c \sqrt{aa - ff}$ je remets pour ff ſa valeur $\frac{a^4 - 2aabb + 2aacc + b^4 - 2bbcc + c^4}{4cc}$, ce qui donne $y = \frac{1}{2} c \sqrt{aa - \frac{a^4 + 2aabb - 2aacc - b^4 + 2bbcc - c^4}{4cc}} = \frac{1}{4} \sqrt{2aacc - a^4 + 2aabb - b^4 + 2bbcc - c^4}$, formule generale pour toute ſorte de triangles rectilignes.

REGLE XII.

NOn ſeulement on peut ſuppoſer que quelque quantité eſt égale à zero, ou nulle dans une équation, comme nous l'avons fait dans le Problême XII. mais encore on peut ſuppoſer qu'une quantité y eſt infinie, les autres reſtant finies.

1. Le terme dans lequel la quantité infinie multiplie, eſt infini ; ce qui s'entend du numerateur, lorſque le terme eſt une fraction ; car le rectan-

gle, dont un côté fini eſt multiplié par un autre côté infini, eſt un rectangle infiniment étendu. Les termes de l'équation, où cette quantité infinie ne ſe trouve pas, ſont finis, & on les efface : parceque le fini comparé avec l'infini eſt nul ou zero.

FIG. 22. Soit Problême XII. Fig. 22. FK, c infinie, l'équation $x = \frac{2bb}{2p} + \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2bb + 2cp}$ ſe reduit à $x = \frac{1}{2}c + \frac{b}{p}\sqrt{2cp}$, & cette valeur infinie de x prouve que ſi le point F étoit élevé à une diſtance infinie, la ligne AD ne couperoit la parabole qu'à une diſtance infinie.

Soit l'équation $yy + bb = 2ax - xy$, dans laquelle on ſuppoſe x infinie; elle ſe reduit à $o = 2ax - xy$, & diviſant par x, $2a - y = o$, $y = 2a$. Ce qui marque, que y eſt $2a$, lorſque x eſt infinie.

2. Les équations telles, que $yy = 2ax + xx$, ne peuvent pas convenir à tous les points de leur courbe, à moins que l'une augmentant l'autre n'augmente auſſi; & que l'une diminuant, l'autre ne diminuë encore. Ainſi dés que vous ſuppoſerez l'une des deux infinie ou zero, ſa coordonnée ſera au même point infinie ou zero.

3. Les équations telles que $xy = ab$, ne ſçauroient convenir à tous les points de leurs courbes, à moins que l'une croiſſant, l'autre ne decroiſſe, & mutuellement : car ſans cela l'égalité ne ſubſiſtera pas. Ayant mis l'équation ſous cette forme $y = \frac{ab}{x}$; ſi l'on ſuppoſe x infinie, y eſt zero; parceque ſa valeur $\frac{ab}{x} = o$; car une fraction, dont le dominateur eſt infini, devient infiniment petite ou nulle. Si l'on ſuppoſe $x = o$, y eſt infiniment grande, parceque ſa valeur $\frac{ab}{x}$ eſt telle; car une fraction, dont le denominateur eſt zero, devient infiniment grande. C'eſt ce qui ſera expliqué plus au long, L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Regle IV. Et c'eſt ce qui arrive à l'hyperbole entre ſes aſymptotes : car y eſt zero au point infiniment éloigné, ou x eſt infinie, & y eſt infinie au ſommet des aſymptotes, ou $x = o$.

4. L'équation $yy = 2ax - xx$ au cercle étant propoſée; ſoit 1° $x = o$; il reſte $yy = o$, $y = o$; ce qui prouve qu'au ſommet, ou $x = o$, on a auſſi $y = o$. Soit 2° $y = o$; il reſte $o = 2ax - xx$, qui peut ſe diviſer par $x = o$, & il reſte $2a - x = o$, qui donne $x = 2a$: D'où l'on conclut, qu'il y a deux valeurs de x, qui répondent à $y = o$; & qu'à l'un des ſommets, où $x = o$, on a auſſi $y = o$; & qu'à l'autre ſommet, où $x = 2a$ le diametre, on a encore $y = o$; c'eſt-à-dire, qu'aux deux extrémitez du diametre, il n'y a point d'appliquée, & que la courbe eſt fermée.

5. On peut ſuppoſer $x = \infty$ dans l'équation $yy = 2ax + xx$, & on ne le peut pas dans l'équation $yy = 2ax - xx$. Cette difference ſe connoît, parceque quelque valeur que vous donniez à x dans la premiere, y aura toûjours une valeur réelle : au lieu que dans la ſeconde, dès que vous ferez x negative, ou plus grande que $2a$, y aura une valeur imaginaire.

PARTIE SECONDE.

Methode pour reſoudre les Problémes de la Geometrie ordinaire, ou les Problémes plans.

M. DESCARTES.

ET que ſi elle peut être reſoluë par la Geometrie ordinaire, c'eſt-à-dire, en ne ſe ſervant que de lignes droites & circulaires tracées ſur une ſuperficie plate, lorſque la derniere équation aura été entierement demêlée, il n'y reſtera tout au plus qu'un quarré inconnu égal à ce qui ſe produit de l'Addition, ou Souſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connuë, & de quelqu'autre quantité auſſi connuë. *Quels ſont les Problémes plans.*

Et lors cette racine ou ligne inconnuë ſe trouve aiſément. Car ſi j'ai par exemple $z^2 = az + bb$, je fais Fig. 24. le triangle rectangle NLM, dont le côté LM eſt égal à b racine quarré de la quantité connuë bb, & l'autre LN, eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connuë, qui étoit multipliée par z, que je ſuppoſe être la ligne inconnuë. Puis prolongeant MN la baſe de ce triangle juſques à O, en ſorte que NO ſoit égale à NL, la toute OM eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette ſorte, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. *Comment ils ſe reſolvent.* Fig. 24.

Que ſi j'ai $yy = -ay + bb$, & que y ſoit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, & de ſa baſe MN j'ôte NP égale à NL, & le reſte PM eſt y la racine cherchée. De façon que j'ai $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de même ſi j'avois $x^4 = -ax^2 + b^2$, PM ſeroit x^2, & j'aurois $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

Enfin ſi j'ai $z^2 = az - bb$, je fais NL Fig. 25. égale à $\frac{1}{2}a$, & LM égale à b comme devant, puis au lieu de joindre les points M, N, je tire MQR parallele à LN, & du centre N par L ayant décrit un cercle, qui la coupe aux points Q & R, la ligne cherchée z eſt MQ, ou bien MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons à ſçavoir $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et ſi le cer- Fig. 25.

Fig. 25. cle, qui ayant ſon centre au point N, paſſe par le point L, ne coupe, ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut aſſurer, que la conſtruction du Problême propoſé eſt impoſſible.

Au reſte ces mêmes racines ſe peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, & j'ai ſeulement voulu mettre ceux-ci, comme fort ſimples, afin de faire voir qu'on peut conſtruire tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire, ſans faire autre choſe, que le peu, qui eſt compris dans les quatre Figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les Anciens ayent remarqué; car autrement ils n'euſſent pas pris la peine d'en écrire tant de gros Livres, où le ſeul ordre de leurs Propoſitions nous fait connoître, qu'ils n'ont point eu la vraye Methode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont ſeulement ramaſſé celles, qu'ils ont rencontrées.

M. DESCARTES appelle Geometrie ordinaire celle, qui dans la reſolution de ſes Problêmes, ne ſe ſert que de la regle & du compas, il l'appelle encore * ailleurs Geometrie ſimple. Les Problêmes plans ſont ceux dans la reſolution & dans la conſtruction deſquels on ne ſe ſert que de lignes droites ou circulaires, ſeparément ou enſemble. Ainſi les Problêmes plans regardent la Geometrie ordinaire. 1. L'on expliquera la reſolution des Problêmes, que l'on vient de rapporter. 2. L'on donnera une autre maniere de les reſoudre. 3. L'on examinera, ſi tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire ſe peuvent conſtruire par ce qui a été dit juſqu'à preſent dans cet Ouvrage.

* *Liv. 1. Part. 3. Sect. 2.*

ARTICLE I.

Explication de la Reſolution des Problêmes, que l'on vient de rapporter.

IL faut expliquer en premier lieu l'operation de l'Algebre en lettres, en ſecond lieu celle de la Geometrie en lignes.

1. Lorſque vous êtes arrivé à la fin du calcul, ſi le Problême eſt plan, vôtre derniere équation eſt une de celles, que renferme cette formule generale $zz = \pm az \pm bb$. En ſuppoſant que le ſecond terme peut être nul, vôtre derniere équation ſera une ces ſix. $zz = bb$, $zz = -bb$; $zz = az + bb$, $zz = -az + bb$, $zz = az - bb$, $zz = -az - bb$. Mr DESCARTES ne fait aucune mention des deux premieres, parce que la premiere par l'extraction de racine devient $z = b$, qui eſt trop facile; la ſeconde eſt imaginaire & impoſſible; ni de la derniere, parce qu'elle

n'a

n'a que des racines fauſſes, & qu'il ne propoſe ici, même dans les trois équations qu'il a examinées, que des racines vrayes. En effet, comme on l'a dit, Part. 1. Sect. 4. Regl. X. Il n'y a jamais qu'une racine que l'on cherche, & qui donne la ſolution exacte du Problême; & c'eſt une racine vraye. En ſuppoſant que le troiſiéme terme compoſé ſeulement de quantitez connuës ſoit nul, vôtre derniere équation ſera $zz = \pm az$, qui étant diviſée par z, deviendra $z = \pm a$, qui eſt trop facile, pour que M. DESCARTES en parle.

Pour les autres équations, où les trois termes ſe trouvent $zz = \pm az \pm bb$, vous ordonnerez ainſi les termes $zz \pm az = \pm bb$; vous ajoûterez de chaque côté $\frac{1}{4}aa$, quarré de $\frac{1}{2}a$, qui eſt la moitié de la quantité connuë a, qui multiplie l'inconnuë z dans le ſecond terme az; vous aurez $zz \pm az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa \pm bb$, dont le premier membre eſt un quarré parfait. Vous extrairez la racine quarrée des deux membres $\pm z \pm \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm bb}$. Vous ne laiſſez que $+ z$ dans l'un des côtez, ſa valeur ſera $z = \pm \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa \pm bb}$, comme on va le voir en particulier.

Soit propoſée l'équation $zz = az + bb$. j'ordonne les termes $zz - az = bb$; je mets $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$, qui a deux racines.

La premiere eſt $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $z - \frac{1}{2}a$ multipliant $z - \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$; & l'on a, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Soit $a = 12$, $\frac{1}{2}a = 6$, $b = 8$. z ſera $= 6 + \sqrt{36 + 64} = 6 + \sqrt{100} = 6 + 10 = 16$.

La ſeconde racine eſt $-z + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $-z + \frac{1}{2}a$ multipliant $-z + \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$; & l'on a $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. $z = 6 - \sqrt{36 + 64} = 6 - \sqrt{100} = 6 - 10 = -4$.

Les deux racines s'expriment ainſi $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; la premiere $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ eſt vraye, la ſeconde $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ eſt fauſſe, parceque la partie negative $-\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ eſt plus grande que la poſitive $\frac{1}{2}a$; car ſi vous les quarrez, c'eſt $\frac{1}{4}aa + bb$ d'un côté, & de l'autre $\frac{1}{4}aa$. Or ſi le premier quarré eſt plus grand que le ſecond, la premiere racine eſt auſſi plus grande que la ſeconde.

Soit propoſée l'équation $yy = -ay + bb$, l'on fait de la même maniere $yy + ay = bb$, $yy + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$, qui a auſſi deux racines.

La premiere eſt $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $y + \frac{1}{2}a$ multipliant $y + \frac{1}{2}a$ produit $yy + ay + \frac{1}{4}aa$. $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; en nombres $y = -6 + \sqrt{100} = -6 + 10 = 4$.

La ſeconde racine eſt $-y - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque $-y - \frac{1}{2}a$ multipliant $-y - \frac{1}{2}a$ produit $yy + ay + \frac{1}{4}aa$. $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. En nombres $y = -6 - \sqrt{100} = -16$.

Les deux racines s'expriment de cette façon $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

La premiere $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ eſt vraye, parceque la partie poſitive $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ eſt plus grande que la negative $\frac{1}{2}a$; car ſi on les quarre, c'eſt $\frac{1}{4}aa + bb$ & $\frac{1}{4}aa$. La ſeconde $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ eſt fauſſe.

Soit propoſée l'équation $zz = az - bb$. L'on doit faire $zz - az = -bb$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, qui a deux racines.

La premiere eſt $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, parceque $z - \frac{1}{2}a$ multipliant $z - \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$. $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres ſoit $a = 20$, $\frac{1}{2}a = 10$, $b = 6$. $z = 10 + \sqrt{100 - 36} = 10 + \sqrt{64} = 10 + 8 = 18$.

La ſeconde racine eſt $-z + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, parceque $-z + \frac{1}{2}a$ multipliant $-z + \frac{1}{2}a$ produit $zz - az + \frac{1}{4}aa$. $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres $z = 10 - \sqrt{64} = 10 - 8 = 2$.

Les deux racines s'expriment ainſi $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Elles ſont toutes deux vrayes, lorſque $\frac{1}{2}a$ eſt plus grand que b; comme on vient de le montrer dans les exemples, que l'on a rapporté en nombres.

Mais ſi $\frac{1}{2}a$ eſt plus petit que b les deux racines ſeront imaginaires, car ce qui ſe trouve ſous le ſigne radical dans $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ eſt negatif, ſoit en nombres $\frac{1}{2}a$, 6; b; 10; $z = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ ſera $z = 6 \pm \sqrt{-64}$.

Lorſque $\frac{1}{2}a = b$, ce qui eſt ſous le ſigne radical ſera nul, & $z = \frac{1}{2}a$. Et l'équation aura deux racines vrayes, & égales.

Soit propoſée l'équation $yy = -ay - bb$; $yy + ay = -bb$; $yy + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$.

La premiere racine eſt $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres ſoit $\frac{1}{2}a$, 10; b, 8. $y = -10 + \sqrt{100 - 64} = -10 + \sqrt{36} = -10 + 6 = -4$.

La ſeconde racine eſt $-y - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. En nombres $y = -10 - 6 = -16$.

Les deux racines s'expriment ainſi, $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Elles ſont toutes deux fauſſes, parce que $\frac{1}{2}a$ qui eſt negatif eſt plus grand que $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ dans $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Pour l'autre $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, elle eſt évidemment fauſſe. Que ſi $\frac{1}{2}a$ eſt moindre que b, elles ſont encore imaginaires. Mais lorſque $\frac{1}{2}a = b$, elles ſont toutes deux égales & ſe reduiſent à $y = -\frac{1}{2}a$.

L'on opere ſur l'équation $x^4 = -axx + bb$, comme l'on a fait ſur les équations, où x ne montoit qu'au quarré. Ainſi après l'avoir diſpoſé de la ſorte $x^4 + axx = bb$, il faut ajoûter $\frac{1}{4}aa$ de chaque côté, ce qui donne $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$; & extraire les deux racines quarrées.

La premiere qui eſt vraye, ſera $xx + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, parceque

$xx + \frac{1}{2}a$ multipliant $xx + \frac{1}{2}a$, produit $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa$; enſuite l'on écrit $xx = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & ſi l'on extrait encore la racine quarrée de chaque membre, l'on aura $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Soit $\frac{1}{2}a = 6$, $b = 8$. $x = \sqrt{-6 + \sqrt{36 + 64}} = \sqrt{-6 + \sqrt{100}} = \sqrt{-6 + 10} = \sqrt{4} = 2$. La ſeconde racine, qui eſt fauſſe, ſera $-xx - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $xx = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. $x = \sqrt{-6 - \sqrt{100}} = \sqrt{-6 - 10} = \sqrt{-16}$, qui eſt encore imaginaire. Les deux racines s'expriment ainſi $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. on auroit pu en trouver quatre $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$, parce que les racines du quarré xx ſont $\pm x$.

L'on extrait les racines de toutes les équations, lorſque les expoſans des trois termes ſont en proportion continuë arithmetique dont un eſt zero; mais les racines ne ſont pas toûjours toutes quarrées. Soit propoſée l'équation $x^6 - 2ax^3 = bb$, les expoſans des termes ſont 6, 3, 0, en proportion arithmetique continuë, puiſque le double du terme moyen eſt égal à la ſomme des extrêmes. Ajoûtez aa dans les deux membres, vous ferez $x^6 - 2ax^3 + aa = aa + bb$, dont la premiere racine quarrée eſt $x^3 - a = \sqrt{aa + bb}$, parceque $x^3 - a$ multipliant $x^3 - a$ produit $x^6 - 2ax^3 + aa$, $x^3 = a + \sqrt{aa + bb}$, dont vous pouvez encore extraire la racine cubique $x = \sqrt{C. a + \sqrt{aa + bb}}$.

La ſeconde racine quarrée de $x^6 - 2ax^3 + aa = aa + bb$, eſt $-x^3 + a = \sqrt{aa + bb}$, $x^3 = a - \sqrt{aa + bb}$, & la racine cubique $x = \sqrt{C. a - \sqrt{aa + bb}}$.

Les deux racines ſeront $x = \sqrt{C. a \pm \sqrt{aa + bb}}$. Mais cette racine ne peut pas ſe connoître par la regle & le compas ſeulement; ainſi le Problême n'eſt pas plan. Il l'auroit été, ſi l'on avoit pu extraire la racine quarrée de $x^3 - a = \sqrt{aa + bb}$. V. L. 3. Part. 3. Sect. 3. Art. 1. n. 2.

La Methode pour reſoudre les équations quarrées, de laquelle on vient de parler, demande que toutes les grandeurs, qui multiplient au ſecond terme l'inconnuë, dont on cherche la valeur, ſoient exprimées par une ſeule lettre connuë, & que toutes les grandeurs, qui ne multiplient pas l'inconnuë, & qui compoſent le troiſiéme terme, ſoient exprimées par un quarré connu. C'eſt pourquoi lorſqu'il y a pluſieurs ſeconds ou troiſiémes termes, dans leſquels ils ſe trouve des inconnuës: comme dans l'équation $zz = 2cdz - cxz - abc + cdx$.

L'on commence par determiner l'indeterminée x à repreſenter une quantité arbitraire g; ce qui reduit l'équation à n'avoir que z d'inconnuë, & c'eſt $zz = 2cdz - cgz - abc + cdg$: Enſuite l'on cherche $+f = +2cd - cg$, ſi $2cd$ eſt plus grand que cg, $2d$ plus grand que g; ou

$-f$, ſi $2d$ eſt moindre que g ; l'on cherche auſſi $+hh$ ou $-hh = -abc + cdg$, ſelon que cdg eſt plus grand ou moindre que abc. Alors l'équation propoſée eſt réduite à $zz = \pm gz \pm hh$, & elle eſt telle que M. DESCARTES la demande.

2. Aprés avoir montré comment l'Algebre donne les racines des équations quarrées, voyons comment la Geometrie les peut exprimer en lignes pour reſoudre les Problêmes plans.

La racine vraye $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ de l'équation $zz = az + bb$ ſe trouve de cette ſorte Fig. 24. Faites le triangle rectangle NLM, dont le côté LM eſt égal à b, le côté $NL = \frac{1}{2}a$; & dont la ligne NM eſt la baſe : enſuite du point N comme centre, de l'intervale NL décrivez le cercle LPO, & prolongez MN en O. La ligne MO eſt z.

Dém. $\overline{MN}^2 = \overline{NL}^2 + \overline{LM}^2$, $\frac{1}{4}aa + bb$, & $MN = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. $NO = NL$, $\frac{1}{2}a$: donc la toute $MO = NO + NM$, $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine fauſſe $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ de la même équation $zz = az + bb$ ſe trouvera aiſément. Il faut ſur MN couper $MH = NL$, $\frac{1}{2}a$; & après avoir prolongé NM du côté de K, prendre $HK = NM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. La ligne MK eſt z.

Dém. MK eſt $+ MH - HK$, $+ \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine vraye $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ de l'équation, $yy = -ay + bb$ ſe trouve comme la vraye $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ excepté que l'on ne prolonge pas MN en O. La ligne MP eſt y.

Dém. MP eſt $MN - NP$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = y$. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine fauſſe $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ de l'équation $yy = -ay + bb$ ſe trouve en prenant $MF = NL$, $FG = MN$, la ligne MG eſt y.

Dém. $MG = MF + FG$, $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = y$: car les quantitez qui ont été priſes en allant de M vers O étant poſitives ; celles qui ſe prennent de l'autre côté en allant vers G, ſont negatives. Ce qu'il falloit démontrer.

Il eſt évident que la racine fauſſe $y = MG$ eſt égale à la racine vraye $z = MO$, puiſque on a pris $MF = NL = NO$, & $FG = MN$. La racine fauſſe $z = MK$ eſt auſſi égale à la racine vraye $y = MP$: car $MP = MN - NP$, & MK eſt la ligne $HK = MN$, dont on a retranché $MH = NP$.

La premiere racine vraye, qui s'appelle la plus grande vraye, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de l'équation $zz = az - bb$ ſe trouve de cette maniere Fig. 25. Soit $NL = \frac{1}{2}a$, $LM = b$, l'angle NLM droit ; tirez l'infinie

Fig. 25.

MR parallele à NL, l'angle LMR eſt auſſi droit 29. 1. Eucl. Du point N comme centre & de l'intervale NL decrivez le cercle LQR, qui coupe la droite MR aux points Q, R. Joignez NQ, & menez NP perpendiculaire ſur MR. La ligne MR eſt z. Fig. 25.

Dém. 34. 1. Eucl. $NP = LM$, b ; $PM = NL$, $\frac{1}{2}a$; $NQ = NL$, $\frac{1}{2}a$. Et 3. 3. Eucl. $PQ = PR$. Maintenant dans le triangle NPQ rectangle en P, $\overline{PQ}^2 = \overline{NQ}^2 - \overline{NP}^2$, $\frac{1}{4}aa - bb$, & PQ, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = PR$: donc $MR = MP + PR$, $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

La ſeconde racine vraye, qui s'appelle la plus petite vraye, $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de la même équation $zz = az - bb$, eſt MQ.

Dém. $MQ = MP - PQ$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = z$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorſque $\frac{1}{2}a = b$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} = o$, les deux racines vrayes & égales ſont $z = \frac{1}{2}a$, dont on connoît d'abord la valeur. Mais il faut montrer, que ſi on vouloit la chercher dans cette figure, la ligne qui l'exprimeroit toucheroit le cercle. Pour cela faites Lm, $b = NL$, $\frac{1}{2}a$, & le cercle LQR étant décrit, tirez Np parallele à Lm ; Np ſera rayon du cercle, égale au rayon NL & à la ligne Lm. Joignez mp, elle eſt $z = \frac{1}{2}a$ & touchante du cercle en p.

Dém. Les lignes Lm, Np ſont paralleles & égales : dont 33. 1. Eucl. Les lignes NL, mp ſont auſſi paralleles & égales ; donc $mp = \frac{1}{2}a$. De plus dans le parallelogramme $NLmp$ l'angle NLm eſt droit : donc 34. 1. Eucl. l'angle mpN eſt auſſi droit ; & 16. 3. Eucl. mp eſt touchante en p. Ce qu'il falloit démontrer.

Quand NL, $\frac{1}{2}a$ eſt moindre que LG, b ; la parallele GH ne touchera, ni ne coupera pas le cercle, & rien ne determinera la valeur de z ſur la ligne GH. Ainſi l'on voit que la figure de la Geometrie nous avertiroit de l'impoſſibilité du Problême, ſi nous ne nous en étions pas apperçus par l'examen de l'équation Algebrique.

Si l'on prolongeoit la ligne RM vers S, & que l'on prît une ligne égale à MR ; l'on auroit la plus grande racine fauſſe $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de l'équation $yy = -ay - bb$. Et ſi l'on prenoit une ligne égale à MQ ; elle ſeroit la plus petite racine fauſſe $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de la même équation.

Lorſque les deux racines ſont $y = -\frac{1}{2}a$, la ligne ſera égale à mp ; lorſque $\frac{1}{2}a$ ſera moindre que b, la ligne MS ne touchera, ni ne coupera le cercle.

Les racines $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ de l'éqnation $yy = -ay - bb$ ſont les mêmes lignes que les precedentes : mais comme elles ſont toutes

FIG. 25. deux fauſſes, il les faut prendre de l'autre côté du point *M*. M. DESCARTES n'en parle point, parce que les racines fauſſes ne donnent pas une ſolutiou exacte du Problême.

La racine $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ de l'équation $x^4 = -ax^2 + bb$ ſe trouvera Fig. 7. ſi je prens $GH = MP$ Fig. 24. $= -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & qu'après lui avoir ajoûté $GF = \frac{1}{2}a$, que je prens pour l'unité, je décrive ſur le diametre *FH* le demi-cercle *FIH*. Car la perpendiculaire *IG* eſt *x*.

Dém. 13. 6. Eucl. *IG* eſt moyenne proportionelle entre l'unité *FG*, $\frac{1}{2}a$, & le quarré GH, $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} = xx$: Mais la racine *x* eſt moyenne proportionelle entre l'unité & ſon quarré *xx*; car $1 : x :: x : \frac{xx}{1} = xx$: donc la ligne *IG* eſt *x*. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 24. L'on pourroit Fig. 24. décrire un cercle ſur le diametre *NM*, & élever au point *P* une perpendiculaire juſqu'à la circonference : cette perpendiculaire ſeroit *x*.

Pour ce qui regarde $x = \sqrt{C.\ a + \sqrt{aa + bb}}$, racine de $x^6 - 2ax^3 = bb$, il faut extraire une racine cubique; c'eſt ce qu'on fera L. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 1.

Si dans toutes ces équations il y avoit le plan *cd*, au lieu du quarré *bb*: vous prendriez une moyenne proportionelle entre *c* & *d*, laquelle vous nommeriez *b*; & vous auriez $c : b :: b : d$, & $cd = bb$. Il ne reſteroit plus qu'à ſubſtituer *bb* à la place de *cd*.

Si au lieu de *bb*, il y avoit ſeulement *c*: vous prendriez une moyenne proportionnelle entre $\frac{1}{2}a$, que nous avons ſuppoſée être l'unité, & *c*; pour avoir $1 : b :: b : c$, & $c = bb$.

ARTICLE II.

Autres manieres de reſoudre les Problêmes plans.

L'Algebre & la Geometrie fourniſſent également d'autres methodes pour reſoudre les Problêmes plans.

1. M. DESCARTES donne L. 3. Part. 2. Sect. 2. Art. 3. une regle pour transformer les équations de toutes ſortes de degrez par l'évanoüiſſement du ſecond terme. Cette regle peut s'appliquer aux équations du ſecond degré de cette ſorte.

Soit propoſée l'équation $zz = az + bb$, ou $zz - az = bb$. L'on joint l'inconnuë *z* avec la moitié de la quantité connuë *a*, qui multiplie l'inconnuë *z* au ſecond terme, & l'on donne à cette moitié le ſigne, qu'elle a dans l'équation ainſi ordonnée $zz - az = bb$: ainſi l'on prend ici $z - \frac{1}{2}a$, que l'on égale à une nouvelle inconnuë *x*; c'eſt $z - \frac{1}{2}a = x$, $x + \frac{1}{2}a = z$. Enſuite l'on ſubſtituë dans l'équation pro-

posée, à la place de zz, sa nouvelle valeur $xx + ax + \frac{1}{4}aa$ quarré de $x + \frac{1}{2}a = z$; & à la place de z sa valeur $x + \frac{1}{2}a$, de sorte que pour $-az$ l'on a $-ax - \frac{1}{2}aa$. L'on ajoûte les valeurs $xx + ax + \frac{1}{4}aa$, $-ax - \frac{1}{2}aa$, la somme est $xx - \frac{1}{4}aa = zz - az = bb$.

$$\begin{array}{r} zz = xx + ax + \frac{1}{4}aa \\ -az = \quad -ax - \frac{1}{2}aa \\ \hline zz - az = xx^{*} - \frac{1}{4}aa = bb \end{array}$$

La transformée sera donc $xx - \frac{1}{4}aa = bb$; $xx = \frac{1}{4}aa + bb$; $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Maintenant je remets pour x sa valeur $z - \frac{1}{2}a$, pour avoir $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, comme on l'a trouvé Art. 1. n. 1.

Soit proposée l'équation $yy = -ay + bb$, *ou* $yy + ay = bb$. Vous ferez $y + \frac{1}{2}a = v$, $v - \frac{1}{2}a = y$; vous substituerez dans l'équation proposée à la place de yy sa valeur $vv - av + \frac{1}{4}aa$; & à la place de y sa valeur $v - \frac{1}{2}a$; vous ajoûterez les valeurs $vv - av + \frac{1}{4}aa$, $+av - \frac{1}{2}aa$, & vous aurez $vv - \frac{1}{4}aa = yy + ay = bb$. La transformée sera donc $vv - \frac{1}{4}aa = bb$; $vv = \frac{1}{4}aa + bb$; $v = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; remettez pour v sa valeur $y + \frac{1}{2}a$, vous trouverez $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Comme Art. 1. n. 1.

$$\begin{array}{r} yy = vv - av + \frac{1}{4}aa \\ +ay = \quad +av - \frac{1}{2}aa \\ \hline yy + ay = vv^{*} - \frac{1}{4}aa = bb \end{array}$$

Soit proposée l'équation $x^4 = -ax^2 + bb$, ou $x^4 + ax^2 = bb$, Nous ferons $xx + \frac{1}{2}a = z$, $z - \frac{1}{2}a = xx$. Nous mettrons $zz - az + \frac{1}{4}aa$ valeur de x^4 à sa place dans la proposée, & $+az - \frac{1}{2}aa$. Valeur de $+axx$. Nous ajoûterons les deux valeurs, la somme sera $zz - \frac{1}{4}aa = x^4 + axx = bb$. La transformée est donc $zz - \frac{1}{4}aa = bb$; $zz = \frac{1}{4}aa + bb$; $z = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nous remettrons pour z sa valeur $xx + \frac{1}{2}a$, & nous trouverons $xx + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; $xx = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Comme Art. 1. n. 1.

$$\begin{array}{r} x^4 = zz - az + \frac{1}{4}aa \\ +axx = \quad +az - \frac{1}{2}aa \\ \hline x^4 + axx = zz^{*} - \frac{1}{4}aa \end{array}$$

2. L'équation $zz = az + bb$ peut se construire avec une hyperbole équilatere. Soit Fig. 99. AN, $\frac{1}{2}a = An$, & l'axe determiné Nn, a; sur l'axe conjugué coupez $AD = b$; menez DC parallele à l'axe AB, & CB parallele & égale à AD. Je dis que nB est z. Car NB sera $nB - Nn$, $z - a$; & par la nature de l'hyperbole équilatere, $nB \times NB = \overline{CB}^2$, $zz - az = bb$, $zz = az + bb$. FIG. 99.

NB est z pour l'équation $zz = -az + bb$, que je mets à la place de $yy = -ay + bb$. Car nB sera $nN + NB$, $z + a$; & par la nature de la même hyperbole, $nB \times NB = \overline{CB}^2$, $zz + az = bb$, $zz = -az + bb$.

FIG. 86. L'équation $zz = az - bb$ peut ſe conſtruire avec le cercle Fig. 86. dont le rayon EA, $\frac{1}{2}a = Ae$, le diametre Ee, a, menez la tangente $EF = b$, $FC\,c$ parallele au diametre Ee, & enfin les ordonnées CD, cd du même côté de l'axe, elles ſont paralleles & égales à EF. Je dis 1° que eD eſt la plus grande valeur vraye de z. Car ED ſera $Ee - eD$, $a - z$; & par la nature du cercle $eD \times ED = \overline{CD}^2$, $az - zz = bb$, $zz = az - bb$. 2° ed eſt la moindre valeur vraye de z, car Ed ſera $Ee - ed$, $a - z$; & $ed \times Ed = \overline{cd}^2$, $az - zz = bb$, $zz = az - bb$.

De plus ſi l'on fait $\frac{1}{4}a : b :: b : c$, on aura $\frac{1}{4}ac = bb$; & ſubſtituant
FIG. 79. $\frac{1}{4}ac$ pour bb, les trois équations ſe conſtruiront avec la parabole Fig. 79. de laquelle $\frac{1}{2}a$ eſt le parametre, NK l'axe, ſur lequel vous couperez $IN = \frac{1}{2}a$, $IK = \frac{1}{2}c$. Par la nature de la parabole $\overline{AI}^2 =$ le parametre $\frac{1}{2}a \times NI$, $\frac{1}{2}a = \frac{1}{4}aa$, ainſi on a encore AI, $\frac{1}{2}a = IE = BK = KF$; & $NK = NI + IK$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$.

1. CB eſt z pour l'équation $zz = az + \frac{1}{4}ac$. Car CK eſt $CB - BK$, $z - \frac{1}{2}a$, & par la nature de la parabole, $\overline{CK}^2 = \frac{1}{2}a \times NK$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ac$, $zz = az + \frac{1}{4}ac$.

CF eſt z pour l'équation $zz = -az + \frac{1}{4}ac$. Car CK eſt $CF + FK$, $z + \frac{1}{2}a$, & $\overline{CK}^2 = \frac{1}{2}a \times NK$, $zz + az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ac$, $zz = -az + \frac{1}{4}ac$.

L'équation $zz = az - \frac{1}{4}ac$ ſe conſtruira dans l'eſpace ANE, dans lequel étant $NI = \frac{1}{2}a$, $Ik = \frac{1}{2}c$; on aura Nk, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$, & les deux fc, fc ſont z. Car la plus grande fc étant z, Ck eſt $fc - fk$, $z - \frac{1}{2}a$, & par la nature de la parabole, $\overline{ck}^2 = \frac{1}{2}a \times Nk$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ac$, $zz = az - \frac{1}{4}ac$. La moindre fc étant z, ck eſt $fk - fc$, $\frac{1}{2}a - z$, & $\overline{ck}^2 = \frac{1}{2}a \times Nk$, $zz - az + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ac$, $zz = az - \frac{1}{4}ac$. Lorſque $a = c$, l'équation eſt $zz - az + \frac{1}{4}aa = 0$, & les deux valeurs de z ſont égales à $\frac{1}{2}a$. Lorſque $c > a$, l'équation devient $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}ac}$ racine imaginaire, en effet Ik, $\frac{1}{2}c$ étant plus grande que IN, $\frac{1}{2}a$, le point k tombe au delà du ſommet N dehors de la parabole, où il ne peut y avoir de valeur pour z, puiſqu'il n'y a point là d'ordonnée.

3. La Methode que nous mettons ici pour trouver les lignes, qui ſoient les racines des Problèmes plans; n'exige pas, comme celle de M. DESCARTES, Art. 1. n. 2. que le dernier terme de l'équation ſoit un quarré connu bb; mais ſoit qu'il y ait un quarré connu bb, ou un plan connu bc, l'on trouvera également la racine cherchée.

FIG. 26. 27. Il faut auparavant prouver ce Theorême, Fig. 26. 27. Si les cercles concentriques ABC, GEF ſont coupez par une ligne droite quelconque GH; l'on aura $AG = BH$, $GB = AH$.

Dém. 1° Que la ligne GH paſſe par le centre commun D Fig. 27. $DG = DH$ dans le cercle GEF; $DA = DB$ dans le cercle ABC : donc

Axiom.

Axiom. 3. L. 1. Eucl. $AG = BH$; & Axiom. 2. L. 1. Eucl. $GB = AH$. Fig. 26.

2° Que la ligne BH Fig. 26. ne paſſe pas par le centre commun D. De ce centre D tirez DI perpendiculaire ſur BH. 3. 3. Eucl. $IG = IH$ dans le cercle GEF, $IA = IB$ dans le cercle ABC: donc Axiom. 3. 1. Eucl. $AG = BH$; & Axiom. 2. 1. Eucl. $GB = AH$. Ce qu'il falloit démontrer. 27.

Soit propoſée l'équation $zz - az = bc$. Tirez Fig. 26. les infinies EF, HG faiſant un angle quelconque FAH. Sur une des lignes GH coupez $AB = a$, & ſur l'autre EF prenez $AF = b$; $FC = c$. Faites par la 25. 3. Eucl. paſſer un cercle ABC par les trois points A, B, C, dont le centre ſoit D: de ce centre & de l'intervale DF décrivez le cercle concentrique GEF. Je dis que AH eſt la racine poſitive z, & AG la negative $-z$.

Dém. L'on a $EA = CF$, c; ſoit AH, $z = GB$; l'on aura $AG = GB - AB$; $z - a$. & 35. 3. Eucl. $AH \times AG = AF \times AE$, $zz - az = bc$. Soit maintenant AG, $-z = BH$; l'on aura $AH = AB + BH$, $a - z$. Et $AG \times AH = AF \times AE$, $-az + zz = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit propoſée l'équation $zz - az = bb$. Après avoir tiré Fig. 27. les infinies AB, EF perpendiculaires l'une à l'autre. Vous ferez $AE = AF$, b; AB, a; vous diviſerez AB en deux parties égales au point D; & de D comme centre vous décrirez à l'intervale DA le cercle ABC; & à l'intervale DE le cercle DEF. Le cercle interieur paſſe par B, car $DB = DA$; le cercle exterieur paſſe par F, car 3. 3. Eucl. $AF = AE$, & les triangles DAE, DAF ont les angles en A égaux, les côtez AE, AF égaux, AD commun: donc $DE = DF$, qui ſeront deux rayons du même cercle. Je dis que AH eſt $+ z$; & AG, $- z$.

Dém. ſoit AH, $z = BG$; AG ſera $BG - AB$, $z - a$. Et 35. 3. Eucl. $AH \times AG = AE \times AF$, $zz - az = bb$. Soit AG, $-z = BH$; AH ſera $AB + BH$, $a - z$; & $AG \times AH = AE \times AF$, $-az + zz = bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit propoſée l'équation $yy + ay = bc$. Je dis que Fig. 26. AG eſt la racine vraye $+y$; & AH la fauſſe $-y$.

Dém. Soit AG, $+y = BH$; AH ſera $AB + BH$, $a + y$. Et $AG \times AH = AF \times AE$, $ay + yy = bc$. Soit à preſent AH, $-y = BG$; AG eſt $BG - BA$, $-y - a$. Et $AH \times AG = AF \times AE$, $yy + ay = bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit propoſée l'équation $yy + ay = bb$. Je dis que Fig. 27. AG eſt la racine poſitive $+y$; & AH la negative $-y$.

Dém. Soit AG, $+y = BH$, AH ſera $AB + BH$, $a + y$. Et $AG \times AH = AE \times AF$, $ay + yy = bb$. Soit AH, $-y = BG$; AG ſera $BG - BA$, $-y - a$. Et $AH \times AG = AE \times AF$, $yy + ay = bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit propoſée l'équation $zz - az = -bc$. Tirons Fig. 28. les infinies Fig. 28.

FIG. 28. AB, AC faiſant un angle quelconque BAC, ſur l'une des lignes prenons $AB = a$; & ſur l'autre $AF = b$; $FC = c$. Enſuite 25. 3. Eucl. décrivons un cercle par les trois points A, B, C, dont le centre ſoit D ; & du même centre & de l'intervale DF, le cercle EHF. Je dis que AH eſt la plus grande racine vraye z ; & AG la plus petite racine vraye z. L'on a $AE = FC$, c.

Dém. Soit AH, z ; BH eſt $AB - AH$, $a - z = AG$. Et les rectangles $AH \times AG$, $AF \times AE$ étant 36. 3. Eucl. égaux au quarré d'une même tangente, ſont auſſi égaux entr'eux. C'eſt-à-dire, en termes analytiques $az - zz = bc$; $zz - az = -bc$. Aprés cela ſoit AG, $z = BH$; AH ſera $AB - BH$, $a - z$. Et $AG \times AH = AF \times AE$, $az - zz = bc$; $\zeta\zeta - a\zeta = -bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 29. Soit propoſée l'équation $\zeta\zeta - a\zeta = -bb$, étant $\frac{1}{2}a$ plus grand que b. Au point C de la ligne $AC = b$ Fig. 29. l'on éleve $CD = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ perpendiculaire à AC ; par les points A, D l'on tire la droite ADB, & l'on fait $DB = AD$. Du point D comme centre, de l'intervale DC l'on décrit le cercle CGH, & de l'intervale DA le cercle AB. Par la ſupp. le quarré de DC eſt $\frac{1}{4}aa - bb$ le quarré de AC eſt bb : mais le quarré de AD leur eſt égal, parceque l'angle ACD eſt droit : donc le quarré de AD eſt $\frac{1}{4}aa - bb + bb = \frac{1}{4}aa$, & $AD = \frac{1}{2}a = DB$, & $AB = a$. De plus 16. 3. Eucl. AC touche le cercle GCH en D. Je dis que AH eſt la plus grande racine vraye, ζ, & AG la plus petite vraye ζ.

Dém. Soit AH, ζ ; BH eſt $AB - AH$, $a - \zeta = AG$. Et 36. 3. Eucl. $AG \times AH = \overline{AC}^2$, $a\zeta - \zeta\zeta = bb$; $\zeta\zeta - a\zeta = -bb$. Enſuite ſoit AG, $\zeta = BH$; AH eſt $AB - BH$, $a - \zeta$, & $AG \times AH$, $= \overline{AC}^2$, $a\zeta - \zeta\zeta = bb$; $\zeta\zeta - a\zeta = -bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

FIG. 30. Lorſque $\frac{1}{2}a = b$; les lignes $AB = a$, $AC = b$ Fig. 30. font un angle quelconque BAC ; je diviſe AB en deux parties égales au point G ; à ce même point G j'éleve GD perpendiculaire à AB, & au point C la perpendiculaire CD ſur AC ; du point D, & de l'intervale DG je décris un cercle, qui paſſera par C ; puiſque ayant tiré DA, les triangles DAG, DAC ont les côtez AG, $\frac{1}{2}a$, AC, b égaux ſupp. le côté AD commun, les angles en C & G droits : mais les quarrez $\overline{CD}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GA}^2$ parcequ'ils ſont égaux à $\overline{DA}^2$: donc ôtant les quarrez égaux. $\overline{CA}^2$, $\overline{GA}^2$, il reſtera $\overline{CD}^2 = \overline{DG}^2$, & $CD = DG$. & le cercle paſſe par C. Je dis que AG eſt z, c'eſt-à-dire, les deux vrayes racines égales de l'équation.

Dém. Puiſque ſupp. $\frac{1}{2}a = b$, l'équation propoſée $zz - az = -bb$ ſe peut changer en $zz - 2bz + bb = o$. Extrayez la racine quarrée $\zeta - b = o$; $\zeta = b$; $zz = bb$. Mais le quarré de chacune des tangentes AG, AC 36. 3. Eucl. ſont égaux à un même rectangle ; ils ſont donc égaux entr'eux, & $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2$ $zz = bb$; $\zeta = b = \frac{1}{2}a$. Ce qu'il falloit démontrer.

Digitized by Google

Lorſque $\frac{1}{2}a$ ſera plus petit que b, la ligne AD, $\frac{1}{2}a$ Fig. 29. ne ſera Fig. 29.
plus la baſe, ou le plus grand côté du triangle rectangle ACD, puiſque le côté AC eſt b. De même Fig. 30. les lignes AG, $\frac{1}{2}a$; AC, b n'étant Fig. 30.
pas égales, elles ne toucheront plus toutes deux enſemble le cercle GC. Et la ſolution du Problême eſt impoſſible dans ces deux Figures.

Soit propoſée l'équation $yy + ay = -bc$. Je dis que Fig. 28. AH Fig. 28.
eſt la plus grande racine fauſſe $-y$; & AG la plus petite fauſſe $-y$.

Dém. Soit $AH - y$; BH eſt $AB - AH$, $a + y = AG$. Et 35. 3. Eucl. $AH \times AG = AF \times AE$, $-ay - yy = bc$; $yy + ay = -bc$. Soit maintenant AG, $-y = BH$; AH eſt $AB - BH$, $a + y$. Et $AH \times AG = AF \times AE$, $-ay - yy = bc$; $yy + ay = -bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Soit propoſée l'équation $yy + ay = -bb$. Si $\frac{1}{2}a$ eſt plus grande que b, l'on trouvera Fig. 29. que AH eſt la plus grande racine fauſſe, & AG la Fig. 29.
plus petite, de la même façon que l'on a trouvé que AH étoit la plus grande racine vraye & AG la plus petite racine vraye de l'équation $zz - az = -bb$. Si $\frac{1}{2}a = b$, l'on trouvera Fig. 30. que AG eſt la double racine fauſſe, comme on a vû qu'elle étoit la double racine vraye égale de l'équation $zz - az = -bb$. Si $\frac{1}{2}a$ eſt plus petite que b, l'on prouvera que le Problême eſt impoſſible, comme on l'a montré pour l'équation $zz - az = -bb$.

ARTICLE III.

Tous les Problémes de la Geometrie ordinaire peuvent ſe conſtruire par les choſes, que M. DESCARTES *a dit juſqu'à preſent.*

1. M. DESCARTES n'a parlé juſqu'à preſent, que de l'Addition, de la Souſtraction, de la Multiplication, de la Diviſion, de l'Extraction de la racine quarrée des lignes, & de la Reſolution des Problêmes plans. Pour expliquer les Regles qu'il a données là-deſſus, il n'a employé que quatre Figures, la 6e, la 7e, la 24e, & la 25e, qui ne ſont compoſées, que de lignes droites & de circulaires; c'eſt-à-dire, qu'il ne s'eſt ſervi que de la Regle & du Compas.

2. Tous les Problêmes, dont la derniere équation contient une inconnuë, qui n'a qu'une, ou deux dimenſions, ſe peuvent reſoudre par une ou pluſieurs des operations, que l'on vient de rapporter. Car ſi 1° l'inconnuë a une ſeule dimenſion, l'équation ſera une de celles-ci, $x = \pm a$, $x = \pm a \pm b$, $x = \pm \frac{a}{b}$, $x = \pm \frac{ab}{c}$; & un lieu à la ligne droite. $x = \frac{ab}{y}$ ſe reduit à $x = \frac{ab}{c}$, lorſque l'on a determiné l'inconnuë y à être une grandeur arbitraire & connuë c; Et le lieu à l'hyperbole entre ſes aſymptotes $x = \frac{ab}{y}$ ſe reduit à $x = \frac{ab}{c}$, lieu à la ligne droite. Or il eſt évident que toutes ces équations ne demandent autre choſe qu'une addi-

FIG. 28. tion, ou une ſouſtraction, ou une multiplication, ou une diviſion de lignes. Si 2° l'inconnuë a deux dimenſions; l'équation ſera une de celles qui ſont renfermées dans cette formule $xx = \pm ax \pm bb$, en ſuppoſant que le ſecond terme peut être évanoüi; les lieux Geometriques à la parabole, au cercle, à l'ellipſe, à l'hyperbole par rapport à ſes diametres ſe reduiſent à cette formule, après que l'on a determiné une des inconnuës, & que l'on a ſubſtitué, s'il eſt neceſſaire, un quarré connu à la place d'un plan auſſi connu. Car l'équation à la parabole $yy = ax$, ſi pour l'inconnuë x l'on ſubſtituë une connuë a, ou b, ſe reduit à celles-ci $yy = aa$, $yy = ab$. Or il eſt certain qu'il ne faut pour reſoudre ces deux équations, qu'extraire une racine quarrée, puiſque Fig. 7. ſi l'on prend la ligne $FG = a$ pour l'unité, & la ligne $GH = b$; la perpendiculaire GI ſera y racine quarrée de ab, comme on l'a montré, Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. Et la racine quarrée y ſera extraite de l'équation $yy = ab$. Il n'eſt pas neceſſaire de rien dire de l'équation $yy = aa$, $y = a$. L'équation au cercle $yy = aa - xx$ ſe peut changer en $yy = aa - bb$, ſi $b = x$, & en prenant c moyenne proportionelle aux deux $a + b$, $a - b$, l'on aura, $a + b : c :: c : a - b$, $aa - bb = cc$, & c peut ſe trouver Fig. 7. Maintenant ſubſtituant cc pour $aa - bb$, l'équation $yy = aa - bb$ ſera $yy = cc$, $y = c$. Pour l'équation au cercle $yy = 2ax - xx$, $xx = 2ax - yy$, ſi pour y je mets d, elle ſera $xx = 2ax - dd$, qui eſt contenuë dans la formule $xx = \pm ax \pm bb$ des Problêmes plans. L'équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = aa - xx$, $xx = aa - \frac{d}{p}yy$, en déterminant y à être c, deviendra $xx = aa - \frac{cc\,d}{p}$, & prenant f moyenne proportionelle entre cc & $\frac{d}{p}$, $xx = aa - ff$; & prenant encore une moyenne proportionelle g entre $a + f$ & $a - f$; l'équation ſera $xx = gg$, $x = g$. L'équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$, $xx = 2ax - \frac{d}{p}yy$, en mettant ff pour $\frac{d}{p}yy$, ſe transformera en $xx = 2ax - ff$, qui eſt encore renfermée dans la formule $xx = \pm ax \pm bb$. Enfin parce que les équations à l'hyperbole par ſes diametres ne different des équations à l'ellipſe, que par les ſignes; l'on prouvera le même des premieres, que des ſecondes.

Et comme toutes les équations, dont l'inconnuë a une ou deux dimenſions, ſont celles, que nous venons de rapporter, il ſuit que ces équations où les Problêmes, dont elles ſont les dernieres équations, ſe peuvent tous conſtruire par les choſes que Mr DESCARTES a dit juſques à preſent, & pour leſquelles il n'a employé que quatre Figures.

3. Mais ſont-ce là tous les Problêmes de la Geometrie ordinaire? Les Geometres avant M. DESCARTES n'ont-ils pas traité des Sections Coniques, & ne s'en ſont-ils pas ſervi pour reſoudre & pour conſtruire des Problêmes? Ce que M. DESCARTES aſſure ici eſt pourtant vrai des Problêmes de la Geometrie ordinaire, en la prenant pour la Geometrie

a Fig. 2.

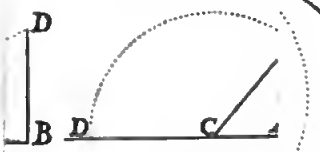


Fig. 8.

Fig. 6.

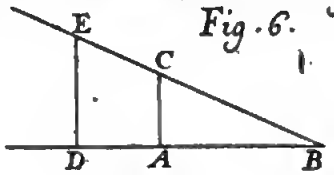
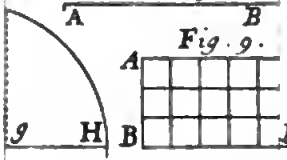


Fig. 9.



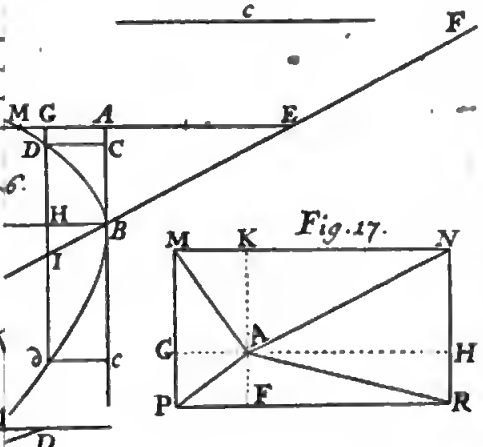


Fig. 11.

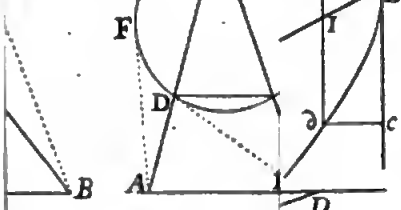


Fig. 17.

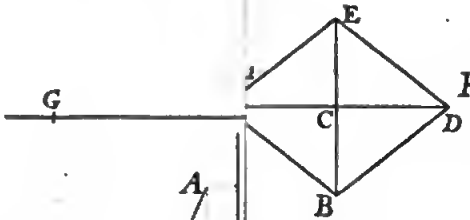


Fig. 26.

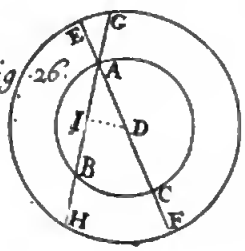


Fig. 22.

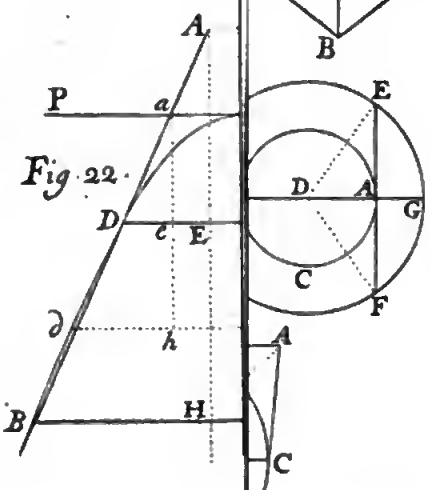
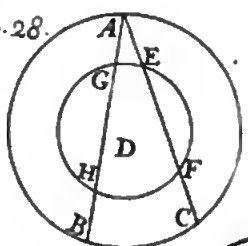


Fig. 28.



Foex. Fecit.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

des Anciens & de tous les Geometres qui l'ont precedé. Dont la raiſon eſt qu'avant M. DESCARTES on n'appelloit lignes Geometriques que la droite & la circulaire ; toute autre étoit méchanique ; les ſeuls Problèmes, pour la reſolution & pour la conſtruction deſquels on n'employoit que la ligne droite & le cercle, étoient reſous & conſtruits geometriquement, les autres l'étoient mechaniquement. En un mot la ſeule ſcience, qui n'employoit que la ligne droite & le cercle, la Regle & le Compas, étoit nommée Geometrie. Ceci ſera expliqué plus au long, L. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 2.

PARTIE TROISIE'ME.

Le commencement de la Queſtion de Pappus.

SECTION I.

La Queſtion de Pappus eſt propoſée..

M. DESCARTES.

ET on le peut voir auſſi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de ſon ſeptiéme Livre, ou après s'être arrêté quelque tems à denombrer tout ce qui avoit été écrit en Geometrie par ceux qui l'avoient precedé, il parle enfin d'une queſtion, qu'il dit que ni Euclide, ni Apollonius, ni aucun autre n'avoient ſçu entierement reſoudre, & voici ſes mots. *Exemple tiré de Pappus.*

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius : ſed neque paululùm quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Et un peu après il explique ainſi quelle eſt cette queſtion.

At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi. Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio

rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ : punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est, unam ex tribus conicis Sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur ; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit : similiter punctum datam coni Sectionem positione continget. Siquidem igitur ad duas tantùm locus planus ostensus est. Quòd si ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantùm dictas ; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat : earum unam neque primam, & quæ manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hæ sunt.

Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio solidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus & datâ quâpiam lineâ, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur ; rursus punctum continget positione datam lineam. Quòd si ad plures quàm sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quàm tribus dimensionibus.

Où je vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faïsoient les Anciens d'user des termes de l'Arithmetique en la Geometrie, qui ne pouvoit proceder, que de ce qu'ils ne voyoient pas assez clairement leur rapport, causoit beaucoup d'obscurité & d'embarras en la façon, dont ils s'expliquoient. Car Pappus poursuit en cette sorte.

Acquiescunt autem his, qui paulò ante talia interpretati sunt, neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continetur.

Licebit autem per conjunctas proportiones hæc & dicere, & demonstrare universè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio conjuncta ex eâ, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam,

ſi ſint ſeptem ; ſi verò octo , & reliqua ad reliquam ; punctum continget poſitione datas lineas. Et ſimiliter quotcunque ſint impares vel pares multitudine , cùm hæc , ut dixi , loco ad quatuor lineas reſpondeant , nullum igitur poſuerunt , ita ut linea nota ſit , &c.

La queſtion donc , qui avoit été commencée à reſoudre par Euclide, & pourſuivie par Apollonius , ſans avoir été achevée par perſonne , étoit telle.

Ayant trois ou quatre ou plus grand nombre de lignes droites données par poſition; premierement on demande un point, duquel on puiſſe tirer autant d'autres lignes droites , une ſur chacune des données , qui faſſent avec elles des angles donnez , & que le rectangle contenu en deux de celles, qui ſeront ainſi tirées d'un même point , ait la proportion donnée avec le quarré de la troiſiéme , s'il n'y en a que trois ; ou bien avec le rectangle des deux autres , s'il y en a quatre ; ou bien s'il y en a cinq , que le parallelepipede compoſé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipede compoſé des deux qui reſtent , & d'une autre ligne donnée. Ou s'il y en a ſix , que le parallelepipede compoſé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipede des trois autres. Ou s'il y en a ſept, que ce qui ſe produit , lorſqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre , ait la raiſon donnée avec ce qui ſe produit par la multiplication des trois autres , & encore d'une autre ligne donnée. Ou s'il y en a huit , que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres. Et ainſi cette queſtion ſe peut étendre à tout autre nombre de lignes.

Puis à cauſe qu'il y a toûjours une infinité de divers points , qui peuvent ſatisfaire à ce qui eſt ici demandé , il eſt auſſi requis de connoître , & de tracer la ligne , dans laquelle ils doivent tous ſe trouver. Et Pappus dit, que lorſqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données , c'eſt en une des trois Sections coniques ; mais il n'entreprend point de la determiner , ni de la décrire ; non plus que d'expliquer celles , où tous ces points ſe doivent trouver , lorſque la queſtion eſt propoſée en un plus grand nombre de lignes. Seulement il ajoûte que les Anciens en avoient imaginé une, qu'ils

montroient y être utile, mais qui ſembloit la plus manifeſte, & qui n'étoit pas toutesfois la premiere. Ce qui m'a donné occaſion d'eſſayer, ſi par la Methode, dont je me ſers, on peut aller auſſi loin qu'ils ont été.

Après avoir expliqué quelques endroits de cette Section, j'examinerai ſi, lorſque la queſtion de Pappus ne ſuppoſe que deux lignes données de poſition, le lieu eſt plan, ainſi que l'aſſure Pappus : *Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus oſtenſus eſt.*

ARTICLE I.

Explication.

1. PAppus eſt un Mathematicien d'Alexandrie, qui vivoit environ l'an 400. de l'Ere chrétienne, & qui a compoſé huit Livres des Collections Mathematiques. Au commencement du Livre ſeptiéme il écrit pluſieurs choſes ſur les lieux Geometriques, ſur la maniere de les reſoudre & de les conſtruire ; il rapporte les Livres d'Euclide, d'Apollonius, d'Ariſtée, d'Eratoſthenes ſur cette matiere. C'eſt dans ce qu'il dit ſur les Sections coniques d'Apollonius, que l'on trouve les choſes que M. DESCARTES en cite ici.

2. M. DESCARTES en donnant d'abord la reſolution du Problême de Pappus, prétend commencer ſa Geometrie par l'endroit, où les Anciens & les Modernes avoient fini la leur. Car il aſſure dans * une de ſes Lettres, que non ſeulement tous les Geometres juſques à Pappus n'avoient pû reſoudre ce fameux Problême, ainſi que cet Auteur l'aſſure ; mais encore qu'aucun depuis Pappus ne l'avoit ſçû trouver, puiſque aucun n'en a écrit, quoique les plus habiles des Modernes l'ayent cherché.

* *Tom 3. Lett. 73. au Pere Merſenne.*

L'on lit encore dans une ** autre Lettre de M. DESCARTES écrite quatre ans avant que ſa Geometrie fût imprimée, qu'il n'avoit travaillé que cinq ou ſix ſemaines à la ſolution qu'il donne de cette queſtion.

** *Tom. 2. Lett. 71. au P. Merſenne.*

3. Dans ces termes de Pappus : *Punctum datam coni Sectionem continget, punctum continget poſitione datam lineam*, le mot *continget*, ſignifie le même que *eſt*, *invenitur in coni Sectione*, *in lineâ datâ.* Ces lignes s'appellent lieux ; & lieux ſolides, lorſqu'elles ſont une des trois Sections coniques ; lieux plans, lorſqu'elles ſont une ligne droite ou un cercle. La ligne cherchée eſt appellée donnée : ce que Pappus fait en pluſieurs autres endroits de ſes Collections, où il appelle donné ou connu, ce qui ſe trouve par les choſes, qui ſont données.

Proportio conjuncta eſt la même choſe que *ratio compoſita.* Def. 5. L. 6. Eucl. Les parallelogrammes équiangles ſont 23. 6. Eucl. en raiſon compoſée de la

la raiſon de leurs côtez, c'eſt-à-dire, que la raiſon d'un parallelogramme à un autre s'exprime par le produit, qui ſe fait, lorſqu'on multiplie entr'eux les expoſans de la raiſon, que chaque côté d'un parallelogramme a avec chaque côté de l'autre, ſoient deux parallelogrammes équiangles bc, fg; que la raiſon du côté $b = 6$ au côté $f = 3$ ſoit double, & ſon expoſant 2; la raiſon du côté $c = 12$ au côté $g = 4$ triple, & ſon expoſant 3; le produit de l'expoſant 2 par l'expoſant 3 eſt 6, qui exprime la raiſon du premier parallelogramme $cb = 72$ au ſecond $fg = 12$: en effet 72 contient 6 fois 12.

Le même ſe trouve dans les parallelepipedes rectangles. Soient les parallelepipedes rectangles abc, def; que la raiſon du côté $a = 1$ au côté $d = 3$ ſoit ſouſtriple, & ſon expoſant $\frac{1}{3}$; la raiſon du côté $b = 4$ au côté $e = 2$ double, & ſon expoſant 2; la raiſon du côté $c = 4$ au côté $f = 8$ ſoûdouble & ſon expoſant $\frac{1}{2}$; le produit de la multiplication des trois expoſans $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$, eſt $\frac{1}{3}$ qui exprime la raiſon du premier ſolide $abc = 16$ au ſecond $def = 48$: en effet 16 eſt un tiers de 48.

Que l'on expoſe les quantitez $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 6$, dont le produit $abcd = 180$, & les quantitez $e = 4$, $f = 9$; $g = 10$, $h = 12$, dont le produit $efgh = 4320$: la raiſon du premier produit au ſecond eſt comme 1 à 24, la même, que la raiſon compoſée de la raiſon des côtez; car la raiſon de $a = 2$ à $e = 4$ eſt ſoûdouble, & ſon expoſant $\frac{1}{2}$; la raiſon de $b = 3$ à $f = 9$ eſt ſoûtriple, & ſon expoſant $\frac{1}{3}$; la raiſon de $c = 5$ à $g = 10$ eſt ſoûdouble, & ſon expoſant $\frac{1}{2}$; la raiſon de $d = 6$ à $h = 12$ eſt encore ſoûdouble, & ſon expoſant $\frac{1}{2}$. Multiplions entr'eux les expoſans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; le produit eſt $\frac{1}{24}$, qui ſignifie que le premier produit $abcd$ eſt une vingt-quatriéme du ſecond produit $efgh$, ou que $abcd$ eſt contenu vingt-quatre fois dans $efgh$.

Et comme la proportion de chaque côté d'un produit à chaque côté de l'autre peut varier de toutes façons: il ſuit, que les produits peuvent avoir telle proportion donnée, que l'on voudra. Ainſi c'eſt la même choſe de dire avec M. DESCARTES, que le produit $abcd$ de la multiplication des quatre premieres lignes ait la proportion donnée avec le produit $efgh$ des quatre autres; ou de dire avec Pappus, ſi l'on donne la raiſon compoſée des raiſons de a à e, de b à f, de c à g, de d à h; *Et data ſit proportio conjuncta ex eâ, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad reliquam.*

4. Ces nombres $1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.$ &c. ſont en progreſſion Geometrique continuë. Le ſecond eſt la racine, ou une grandeur d'une dimenſion, exprimée Algebriquement par une lettre b; le troiſiéme eſt le quarré du ſecond, & une grandeur de deux dimenſions, exprimée par bb; le quatriéme eſt le cube du ſecond, & une grandeur de trois dimenſions, b^3; le cinquiéme eſt le quarré de quarré du ſecond, & une gran-

deur de quatre dimenſions, b^4; le ſixiéme eſt le premier ſurſolide du ſecond, & une grandeur de cinq dimenſions, b^5; le ſeptiéme le quarré cube du ſecond, & une grandeur de ſix dimenſions, b^6 &c. Dans l'Arithmetique l'on peut donc avoir des grandeurs de toute ſorte de dimenſions ou degrez à l'infini, parceque la progreſſion Geometrique croiſſante peut toûjours augmenter. Mais la Geometrie ordinaire ne peut reconnoître que trois eſpeces de quantitez; la premiere eſt la ligne, qui ſe produit par le mouvement du point; la ſeconde eſt la ſurface, qui ſe produit de la multiplication d'une ligne par une autre ligne, ou par le mouvement d'une ligne ſur une autre; la troiſiéme eſt le ſolide, qui ſe produit de la multiplication d'une ligne par une ſurface, ou par le mouvement d'une ſurface le long d'une ligne. L'on ne trouve donc ici, que des quantitez de trois dimenſions, la ligne qui en a une, la longueur; la ſurface, qui en a deux, la longueur & la largeur; le ſolide, qui en a trois, la longueur, la largeur, & la profondeur. C'eſt pourquoi Pappus regarde avec les Anciens un produit de quatre, cinq, &c. dimenſions, comme quelque choſe d'inintelligible: *Non adhuc habent dicere, an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus. Acquieſcunt autem his, qui paulò ante talia interpretati ſunt; neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes, quod his continetur.* Mais la Geometrie de M. DESCARTES qui exprime ordinairement tout par des lignes, fournit dans le produit de ſa multiplication de lignes, des grandeurs de toutes ſortes de dimenſions. L'on y voit des lignes, qui ſont des quarrez, ou qui ont deux dimenſions; des lignes, qui ſont des cubes, ou ſont de trois dimenſions; des lignes, qui ſont des quarrez de quarrez, ou qui montent au quatriéme degré, à quatre dimenſions; &c.

Et quiconque ſçait, en quoi conſiſte la multiplication des lignes, dont il a été parlé, Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 2. comprend aiſément, ce que veut dire dans cette Geometrie un quarré de quarré, ou une grandeur de quatre dimenſions; un quarré de cube, ou une quantité du ſixiéme degré; &c. Et voilà pourquoi M. DESCARTES a dit, Part. 1. Sect. 2. qu'il ne craindra pas d'introduire les termes d'Arithmetique dans la Geometrie, afin de ſe rendre plus intelligible.

5. Les Problêmes indeterminez ne ſont entierement conſtruits, qu'après que l'on a fait deux choſes: la premiere, c'eſt de trouver un point, d'où l'on puiſſe tirer les lignes, qui ſatisfont à la queſtion; la ſeconde, c'eſt que, comme il y a une infinité de points, d'où l'on peut tirer les lignes, que le Problême demande; il faut determiner & décrire la ligne droite ou courbe, que tous ces points compoſent, & dans laquelle ils ſe trouvent. En un mot l'on doit trouver le lieu Geometrique cherché. C'eſt principalement en cela que M. DESCARTES l'emporte dans la reſolution, qu'il donne au Problême de Pappus, ſur tous les Geometres, qui l'ont precedé.

Digitized by Google

ARTICLE II.

Si le lieu eſt plan, lorſque les lignes données dans le Probléme de Pappus, ne ſont que deux.

LA queſtion de Pappus ſuppoſe un Theorême de Trigonometrie, que je vais démontrer, avant que d'examiner les cas, où il y a deux lignes données dans cette fameuſe queſtion. Je parle ici de ces cas, parceque M. DESCARTES n'en dit mot dans ſa Geometrie; & parceque étant faciles, ils diſpoſent à la ſolution, que l'on trouvera des autres cas dans la ſuite. Au reſte j'ai reſolu avec ce ſeul Theorême tous ceux de ces Commentaires, qui dépendent de la Trigonometrie; ceux même qu'elle reſout d'une autre maniere.

Theorême de Trigonometrie.

Dans tout triangle rectiligne les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez.

Déf. Le ſinus droit, ou le ſinus Fig. 31. de l'arc EB, ou de l'angle ECB, c'eſt la droite EG tirée d'une des extrêmitez E de cet arc perpendiculairement ſur le diametre CB, qui paſſe par l'autre extrêmité B du même arc EB. FIG. 31.

La même ligne droite EG eſt le ſinus de l'arc EDA, ou de l'angle ACE parcequ'elle eſt tirée d'une des extrêmitez E de cet arc perpendiculairement ſur le diametre ACB, qui paſſe par l'autre extrêmité A du même arc EDA. De ſorte que les deux arcs EB, EDA, qui ſont enſemble le demi-cercle BDA ont le même ſinus EG.

Appliquez cette définition aux quarts de cercle DB, DA; vous verrez que le rayon DC eſt leur ſinus, que l'on appelle ſinus total: de ſorte que le rayon d'un cercle eſt le ſinus de l'angle droit.

Dém. 1. Dans un triangle rectangle ACB. Fig. 32. Du point D milieu de la baſe AB, & de l'intervale DA, décrivez un cercle, qui 31. 3. Eucl. paſſera par le ſommet C de l'angle droit. Du même centre D tirez ſur les autres côtez les perpendiculaires DEF, DGH, qui 3. 3. Eucl. diviſeront les côtez en deux parties égales: de ſorte que 4. 1. Eucl. les triangles DEA, DEC ſeront égaux, auſſi bien que les triangles DGC, DGB; c'eſt pourquoi les angles ADF, CDF & leurs arcs AF, FC ſont égaux, comme auſſi les angles CDH BDH & leurs arcs CH, BH. Maintenant par la déf. du ſinus, AD moitié de la baſe AB eſt le ſinus de ſon angle oppoſé ACB, qui eſt droit; AE moitié du côté AC eſt le ſinus de l'angle ADF, qui étant la moitié de l'angle ADC au centre, eſt égal 20. 3. Eucl. à l'angle ABC à la circonference: ainſi AE eſt ſinus de l'angle ABC oppoſé au côté AC. L'on prouvera de même; que GC moitié du côté BC eſt le ſinus de l'angle BAC oppoſé au côté BC. Or comme la baſe AB FIG. 32.

Fig. 32. eſt au côté *AC* ; ainſi *AD* moitié de la baſe & ſinus de l'angle droit *ACB* à qui il eſt oppoſé, eſt à *AE* moitié du côté *AC* oppoſé à l'angle *ABC*, & ſinus de cet angle. Et comme *AC* eſt à *CB* ; de même *AE* moitié de *AC* eſt à *GC* moitié du côté *CB* oppoſé à l'angle *CAB* : donc les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez dans un triangle rectangle.

Fig. 33. 2. Dans un triangle acutangle *ABC* Fig. 33. ſoit décrit un cercle autour du triangle 5. 4. Eucl. & du centre *F* abbaiſſez des perpendiculaires ſur les côtez. Comme auparavant l'on fera voir, que les côtez & les arcs ſont diviſez en deux parties égales ; que les angles *AFG*, *BFG*, *BFH*, *CFH*, *AFL*, *CFL* ſont égaux ; que *AD* eſt le ſinus de l'angle oppoſé *ACB*, *BE* le ſinus de l'angle oppoſé *BAC*, *CK* le ſinus de l'angle oppoſé *CBA*. Enfin l'on conclura ainſi, comme le côté *AB* eſt au côté *BC* ; de même *AD* moitié de *AB* & ſinus de l'angle oppoſé *ACB* eſt à *BE* moitié de *BC* & ſinus de l'angle oppoſé *BAC*. Et comme *BC* eſt à *CA* ; de même *BE* eſt à *CK* moitié du côté *AC* & ſinus de l'angle oppoſé *ABC* : donc les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez dans un triangle acutangle.

Fig. 34. 3. Dans un triangle obtuſangle *ABC* Fig. 34. ſoit auſſi décrit un cercle autour du triangle ; du centre *D* tirez ſur les côtez les perpendiculaires *DF*, *DL*, *DH*, qui diviſeront les côtez & les arcs en deux parties égales ; tirez encore les rayons *DA*, *DB*, *DC* ; & les lignes, *AI*, *CI*. La ligne *AE* eſt le ſinus de l'angle *ADF*, égal 20. 3. Eucl. à l'angle *BCA* oppoſé au côté *BA* ; la ligne *BG* eſt le ſinus de l'angle *BDH* égal à l'angle *BAC* oppoſé au côté *BC* ; la ligne *AK* eſt le ſinus de l'angle *ADL* égal à l'angle *AIC* : mais 22. 3. Eucl. les angles *AIC*, *ABC* ſont égaux à deux droits, & leur meſure totale eſt un demicercle : donc def. du ſinus, ils ont le même ſinus *AK*, & l'angle obtus *ABC* a pour ſinus la ligne *AK* moitié du côté *AC* oppoſé à l'angle *ABC*. Enfin comme *AB* eſt à *BC* : de même *AE* moitié de *AB*, & ſinus de l'angle *ACB* eſt à *BG* moitié du côté *BC*, & ſinus de l'angle *BAC*, auquel le côté *BC* eſt oppoſé. Et comme *BC* eſt à *CA* : de même *BG* eſt à *AK* moitié du côté *AC* & ſinus de l'angle *ABC* auquel le côté *AC* eſt oppoſé. Donc les côtez ſont proportionels aux ſinus de leurs angles oppoſez dans un triangle obtuſangle. Ce qu'il falloit démontrer.

Dans les trois cas on auroit pû dire, comme un côté eſt à ſa moitié, qui eſt le ſinus de l'angle oppoſé : de même un autre côté eſt à ſa moitié ſinus de l'angle oppoſé.

PROBLEME.

Fig. 35. DEux lignes *AB*, *AD* Fig. 35. étant données de poſition, (elles ſe coupent perpendiculairement ;) l'on demande un point *C*, duquel on puiſſe

tirer les deux lignes CB, CD; CB ſur BA faiſant avec elle l'angle donné CBF de 60. degrez; CD perpendiculaire ſur AD. De plus on demande, & ceci peut ſe propoſer de differentes manieres : ou 1. que le rectangle ſous CB & une donnée m, ſoit égal au rectangle ſous CD, & une autre donnée n. ou 2. que le quarré de CB ſoit égal au quarré de CD. ou 3. que le quarré de CB ſoit égal au rectangle ſous CD & une donnée m. ou 4. que le rectangle ſous CB & CD ſoit égal au rectangle des données m, n. Commençons par le calcul qui eſt commun aux quatre cas. Fig. 35.

1. Je ſuppoſe la choſe faite, & après avoir produit la ligne CB, juſqu'à ce qu'elle coupe la ligne AD en E; je nomme CB, y; AB, x. Après cela je conſidere le triangle ABE, dont je connois tous les angles. Car l'angle EAB eſt droit par la ſupp. l'angle ABE eſt égal à l'angle CBF donné de 60. deg. L'angle AEB eſt de 30. degrez. Le ſinus total, ou de l'angle droit EAB eſt 100000, le ſinus de l'angle AEB de 30. deg. eſt 50000, le premier eſt au ſecond, comme $2 = c$ à $1 = z$. L'on peut mettre la raiſon de c à z, ou de z à c pour la raiſon des ſinus. z comme vous le voyez, repreſente ici une grandeur connuë.

Le Theorême de Trigonometrie donne cette analogie. Comme le ſinus de l'angle AEB eſt au ſinus total de l'angle EAB, ou comme z eſt à c: de même le côté AB, x eſt au côté BE, $\frac{cx}{z}$. Et $CE = CB + BE$, $y + \frac{cx}{z} = \frac{zy+cx}{z}$.

Enſuite je viens au triangle CDE, dont je connois auſſi tous les angles; car CDE eſt droit ſupp. CED vient d'être connu de 30. degrez. Donc auſſi par le Theorême comme le ſinus total de l'angle CDE eſt au ſinus de l'angle CED, ou comme c à z: de même CE, $\frac{zy+cx}{z}$ eſt à CD, $\frac{zy+cx}{c}$. Voilà ce qu'il y a de commun pour tous les cas.

2. L'on demande en premier lieu que le rectangle ſous CB, & une donnée m ſoit égal au rectangle ſous CD & une autre donnée n: c'eſt-à-dire, $my = \frac{nzy+cnx}{c}$. & $cmy = nzy + cnx$, $cmy - nzy = cnx$; $y = \frac{cnx}{cm-nz}$. Subſtituons les valeurs de c & de z, nous aurons $y = \frac{2nx}{2m-n}$, lieu à la ligne droite.

Pour la conſtruction, ſur AB je coupe $AF = 2m - n$, du point F je tire la ligne $FG = 2n$, de ſorte que l'angle GFK ſoit de 60. degrez; par les points G, A je mene l'infinie GA, qui eſt le lieu cherché.

Dém. Dans l'angle DAF je choiſis le point C, je mene CB parallele à GF, & CD perpendiculaire ſur AD. Je nomme AB, x; CB, y. A cauſe des paralleles CB, GF, les triangles ACB, AGF ſont équiangles. Donc AF, $2m - n$: FG, $2n$:: AB, x: BC, y. $2my - ny = 2nx$, $y = \frac{2nx}{2m-n}$. Dans l'angle HAE, du point c pris à volonté je mene cb parallele à GF, & cd perpendiculaire ſur AD. Et parceque les $+x$ ont été pris ſur AK en allant de A vers K, les Ab pris de l'autre côté, en allant de A vers H ſeront $-x$; les CB ſont $+y$ étant pris d'un côté de la ligne AB,

FIG 35. les cb pris de l'autre côté dans l'angle HAE ſeront $-y = \frac{-2nx}{2m-n}$. Les triangles AGF, Acb ſont encore équiangles AF, $2m-n : FG$, $2n :: Ab$, $-x : cb$, $-y$. $-2my+ny = -2nx$; $2my-ny = 2nx$; $y = \frac{2nx}{2m-n}$. Donc l'on trouve l'équation cherchée dans tous les points de la ligne infinie AG, excepté au point A, où les x & les y commencent. Ce qu'il, &c.

3. L'on demande en ſecond lieu, que le quarré de CB ſoit égal au quarré de CD, c'eſt-à-dire, $yy = \frac{zzyy+2czyx+ccxx}{cc}$. $ccyy-zzyy-2czyx = ccxx$. $yy - \frac{2czxy}{cc-zz} = \frac{ccxx}{cc-zz}$. Mettons de chaque côté $\frac{+cczzxx}{c^4-2cczz+z^4}$, nous aurons $yy\frac{2czxy}{cc-zz} + \frac{cczzxx}{c^4-2cczz+z^4} = \frac{ccxx}{cc-zz} + \frac{ccxx}{cc-zz}$ extrayons la racine quarrée $y - \frac{czx}{cc-zz} = \sqrt{\frac{c^4xx}{c^4-2cczz+z^4}} = \frac{ccx}{cc-zz}$; $y = \frac{ccx+czx}{cc-zz}$. où mettant pour c & z leur valeur; $y = 2x$. lieu à la ligne droite.

La conſtruction ſe fera ainſi. Fig. 35. ſoient priſes $AF = cc-zz = 3$; $FG = cc+cz = 6$; que l'angle GFK ſoit de 60. degrez. L'infinie GA eſt le lieu cherché. Nommons AB, x; BC, y, qui eſt parallele à FG; Ab, $-x$; cb, $-y$.

Dém. Dans les triangles équiangles AFG, ABC; AF, $cc-zz : FG$, $cc+cz :: AB$, $x : BC$, y. & $ccy-zzy = ccx+czx$; $y = \frac{ccx+czx}{cc-zz}$. Dans les triangles équiangles AFG, Abc; AF, $cc-zz : FG$, $cc+cz :: Ab$, $-x : bc$, $-y$. & $-ccy+zzy = -ccx+czx$; $ccy-zzy = ccx+czx$; $y = \frac{ccx+czx}{cc-zz}$. Ce qu'il, &c.

4. L'on demande en troiſiéme lieu, que le quarré de CB ſoit égal au rectangle de CD & d'une ligne connuë m, c'eſt à dire $yy = \frac{mzy+cmx}{c} = \frac{mz}{c}y + mx$. $yy - \frac{mz}{c}y = mx$. Prenons $y - \frac{mz}{2c} = v$, $v + \frac{mz}{2c} = y$, Subſtituons pour yy ſa valeur $vv + \frac{mzv}{c} + \frac{mmzz}{4cc}$, & pour $-\frac{mz}{c}y$ ſa valeur $-\frac{mzv}{c} - \frac{mmzz}{2cc}$; la reduite ſera $vv - \frac{mmzz}{4cc} = mx$; $vv = \frac{mmzz}{4cc} + mx$, & ſubſtituant pour c, & pour m qui ſont égales & pour z leur valeur, $vv = \frac{1}{4} + 2x$. lieu à la parabole.

FIG. 36. Sa conſtruction ſera telle Fig. 36. ſur BC coupez $BH = \frac{mz}{2c}$, & l'on aura $CH = CB - BH$, $y - \frac{mz}{2c} = v$. Par le point H menez FH parallele à AB, ſur FH prenez $FG = \frac{mzz}{4cc}$. Enfin ſur le diametre GH décrivez une parabole dont le point G eſt le ſommet, CH une appliquée, la quantité m le parametre. La parabole décrite CGc eſt le lieu cherché.

Dém. A cauſe des paralleles AB, FH, les triangles EAB, EFH ſont équiangles. EB, $\frac{cx}{z}$, n. 1. : AB, $x :: EH = EB+BH$, $\frac{cx}{z} + \frac{mz}{2c} : FH$, $x + \frac{mzz}{2cc}$. Et $GH = FH - FG$, $x + \frac{mzz}{2cc} - \frac{mzz}{4cc} = x + \frac{mzz}{4cc}$. Maintenant par la nature de la parabole, le parametre $m \times GH = \overline{CH}^2$, $mx + \frac{mmzz}{4cc} = vv$. Mettez pour vv ſa valeur, $mx + \frac{mmzz}{4cc} = yy - \frac{mzy}{c} + \frac{mmzz}{4cc}$; $yy - \frac{mzy}{c} = mx$.

Au point c, $cB = -y$, $cH = cB + BH$, $-y + \frac{mz}{2c} = -v$. Et

par la nature de la parabole l'on aura encore le parametre $m \times GH = \overline{CH}^2$, $mx + \frac{mmzz}{4cc} = vv$, qui ſe reduit, comme auparavant à $yy - \frac{mzy}{c} = mx$. Il eſt aiſé de montrer, que cette derniere équation ſe trouve dans tous les points de la parabole CGc, & qu'ainſi elle eſt le lieu cherché. Ce qu'il, &c. FIG. 36.

5. L'on demande en quatriéme lieu que le rectangle ſous CB & CD ſoit égal à un rectangle ſous les données $m = 2$, $n = 1$, c'eſt-à-dire, $\frac{zyy + czy}{c} = mn \cdot zyy + cxy = cmn$, $yy + \frac{cxy}{z} = \frac{cmn}{z}$. Si l'on fait $y + \frac{cx}{2z} = v$, $v - \frac{cx}{2z} = y$, & que l'on ſubſtituë pour yy ſa valeur $vv - \frac{cxv}{z} + \frac{ccxx}{4zz}$, & pour $+\frac{cxy}{z}$ ſa valeur $+\frac{cxv}{z} - \frac{ccxx}{2zz}$, la reduite ſera $vv - \frac{ccxx}{4zz} = \frac{cmn}{z}$; $vv = \frac{ccxx}{4zz} + \frac{cmn}{z}$; multipliez par $4zz$, diviſez par cc; $\frac{4zzvv}{cc} = xx + \frac{4mnz}{c}$ & ſubſtituant la valeur des lettres x, m, n, z, $vv = xx + 4$. ou $xx = vv - 4$; étant $u = y + \frac{cx}{2z} = y + x$.

Voici ſa conſtruction Fig. 37. Il faut ſur CE, prendre $BH = \frac{cx}{2z} = x$; par les points A, H tirer l'infinie AH; le triangle ABH eſt équilateral & le côté $AH = x$, parceque $AB = BH$, x; donc les angles BAH, BHA ſont égaux & de 60. degrez, l'angle ABH étant ſupp. de 60. deg. Enſuite par le point A l'on doit mener l'infinie AF parallele à CH, couper $AG = AL = m = 2$, & décrire l'hyperbole équilatere cGC, dont le ſommet eſt G, les appliquées CF paralleles à AH, le diametre determiné LG, le centre A. Je dis qu'elle eſt le lieu cherché. FIG. 37.

Dém. Conſtr. $AHCF$ eſt un parallelogramme, donc $CF = AH$, x; $AF = CH = CB + BH$, $y + x = v$; $LF = LA + AF$, $2 + y + x = 2 + u$. $GF = AF - AG$, $v - 2$. Or par la nature de l'hyperbole équilatere $\overline{CF}^2 = LF \times GF$, $xx = vv - 4$. De même ſi l'on tire ch parallele à AF, dans le parallelogramme $AFch$, l'on a $ch = AF$, v; $cF = Ah$, $-x$, ce qui donnera la même équation; dans laquelle ſi pour 4, l'on ſubſtituë $\frac{4mnz}{c}$; pour vv, $yy + \frac{cxy}{z} + \frac{ccxx}{4zz}$, & que l'on multiplie cette valeur de vv par $\frac{4zz}{cc} = 1$ parceque $\frac{4zz}{cc}$ multiplioit vv, l'on formera l'équation $xx = \frac{4zzyy}{cc} + \frac{4zxy}{c} + xx - \frac{4mnz}{c}$; $\frac{4zzyy}{cc} + \frac{4zxy}{c} = \frac{4mnz}{c}$; & ſi l'on diviſe par $\frac{4zz}{cc}$, l'on fait $yy + \frac{cxy}{z} = \frac{cmn}{z}$, qui eſt l'équation à conſtruire. Ce qu'il falloit démontrer.

6. Vous voyez que le Problême de Pappus, lorſqu'il eſt propoſé d'une certaine maniere, eſt un lieu plan, comme n. 2. & 3. ou que c'eſt un lieu à la ligne droite: & que lorſqu'il eſt propoſé d'une autre maniere, il eſt un lieu ſolide, c'eſt-à-dire, un lieu à une Section conique, comme n. 4. c'eſt un lieu à la parabole; & n. 5. c'eſt un lieu à l'hyperbole.

Dans tous les cas, que l'on vient d'examiner, l'on a mis une proportion conſtante & déterminée entre les quarrez & les rectangles: mais ſi l'on mettoit une proportion indeterminée, les lieux monteroient à des degrez plus élevez. Comme ſi n. 3. l'on demandoit que le quarré de CB fût au quarré de CD, comme x eſt à y; l'on auroit l'équation $y^3 = \frac{zzxyy + 2czzxy + ccx^3}{cc}$.

SECTION II.

Réponſe à la Queſtion de Pappus.

M. DESCARTES rapporte ici en peu de mots la ſolution entiere qu'il a trouvé de la queſtion de Pappus, en quelque nombre de lignes qu'elle ſoit propoſée, & quelque poſition qu'ayent ces lignes.

En premier lieu il dit, comment on peut trouver tous les points, qui donnent la ſolution d'un Problème indeterminé; en ſecond lieu il détermine la ligne, où tous ces points ſe trouvent. Mais, parce qu'on verra ailleurs les raiſons & les exemples de ce qu'il avance ici, je renverrai à ces endroits là l'explication de cette Section. Les points cherchez ſe trouvent de cette maniere.

M. DESCARTES.

Réponſe à la Queſtion de Pappus.

Et premierement j'ai trouvé que cette queſtion n'étant propoſée qu'en trois, ou quatre, ou cinq lignes, on peut toûjours trouver les points cherchez par la Geometrie ſimple, c'eſt-à-dire, en ne ſe ſervant que de la Regle & du Compas, ni ne faiſant autre choſe que ce qui a déja été dit.

La raiſon de ceci ſe trouvera Sect. 4. & 5. Art. 1. n. 3. 4. Les exemples L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Excepté ſeulement lorſqu'il y a cinq lignes données, ſi elles ſont toutes paralleles. Auquel cas, comme auſſi lorſque la queſtion eſt propoſée en ſix, ou 7. ou 8. ou 9. lignes, on peut toûjours trouver les points cherchez par la Geometrie des ſolides, c'eſt-à-dire, en y employant quelqu'une des trois Sections Coniques.

La raiſon en eſt rapportée, Sect. 4. & 5. n. 5. 6. 7. 8. 9. 10. Les exemples ſont L. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2.

Excepté ſeulement lorſqu'il y a neuf lignes données, ſi elles ſont toutes paralleles. Auquel cas derechef, & encore en 10, 11, 12, ou 13 lignes, on peut trouver les points cherchez par le moyen d'une ligne courbe, qui ſoit d'un degré plus compoſée que les Sections Coniques.

Vous en trouverez la raiſon, Sect. 4. & 5. n. 12. 13. 14.

Excepté en treize, ſi elles ſont toutes paralleles, auquel cas, & en quatorze, 15, 16, & 17. il y faudra employer une ligne courbe

courbe encore d'un degré plus compoſée que la precedente, & ainſi à l'infini.

Voyez-en la raiſon, Sect. 4. & 5. n. 15.

Voici quelles ſont les lignes, dans leſquelles tous les points, qui ſatisfont à ce qui eſt propoſé, ſe trouvent. Voyez L. 2. Part. 2. Sect. 1.

Puis j'ai trouvé auſſi, que lorſqu'il n'y a que trois ou quatre lignes données, les points cherchez ſe rencontrent tous non ſeulement en l'une des trois Sections Coniques, mais quelquefois auſſi en la circonference d'un cercle, ou en une ligne droite.

Les exemples ſeront en grand nombre, L. 2. Part. 2. Sect. 2.

Et que lorſqu'il y en a cinq, ou ſix, ou ſept, ou huit; tous ces points ſe rencontrent en quelqu'une des lignes, qui ſont d'un degré plus compoſées, que les Sections Coniques, & il eſt impoſſible d'en imaginer aucune, qui ne ſoit utile à cette queſtion.

Voyez L. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 2. L. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2.

Mais ils peuvent auſſi derechef ſe rencontrer en une Section Conique, ou en un cercle, ou en une ligne droite.

Voyez L. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 4.

Et s'il y en a neuf, ou 10, ou 11, ou 12, ces points ſe rencontrent en une ligne, qui ne peut être, que d'un degré, plus compoſée, que les precedentes; mais toutes celles, qui ſont d'un degré plus compoſées, y peuvent ſervir. Et ainſi à l'infini.

Au reſte la premiere & la plus ſimple de toutes, après les Sections Coniques, eſt celle qu'on peut décrire par l'interſection d'une parabole, & d'une ligne droite, en la façon, qui ſera tantôt expliquée.

A ſçavoir Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 3.

En ſorte que je penſe avoir entierement ſatisfait à ce que Pappus nous dit avoir été cherché par les Anciens, & je tâcherai d'en mettre la Démonſtration en peu de mots, car il m'ennuye déja d'en tant écrire.

SECTION III.

Le commencement du calcul pour le Problème de Pappus.

LA reſolution du Problème de Pappus propoſé en quatre lignes droites données de poſition commence ici. Je joindrai à chaque endroit en particulier l'éclairciſſement neceſſaire.

M. DESCARTES.

Fig. 38. Soient Fig. 38. AB, AD, EF, GH, &c. pluſieurs lignes données par poſition, & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données comme CB, CD, CF, & CH, en ſorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, &c. ſoient donnez, & que ce qui eſt produit par la multiplication d'une partie de ces lignes, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la queſtion plus difficile.

Comment on doit poſer les termes pour venir à l'équation en cet exemple.

Premierement je ſuppoſe la choſe comme déja faite, & pour me démêler de la confuſion de toutes ces lignes, je conſidere l'une des données, & l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB, & CB, comme les principales, & auſquelles je tâche de rapporter ainſi toutes les autres. Que le ſegment de la ligne AB, qui eſt entre les points A & B, ſoit nommé x, & que BC ſoit nommé y, & que toutes les autres lignes données ſoient prolongées, juſques à ce qu'elles coupent ces deux auſſi prolongées, s'il eſt beſoin, & ſi elles ne leur ſont point paralleles; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, & BC, aux points R, S, T.

Les lignes ſont données de poſition & non pas de grandeur, c'eſt-à-dire, que la ſituation, où elles ſont les unes à l'égard des autres, eſt déterminée; mais que leur longueur ne l'eſt pas: ainſi l'on peut les prolonger, autant qu'on le juge à propos. Si donc la ligne EF, par exemple, n'étoit tirée que depuis F juſques à E, il faudroit la continuer juſqu'à S. Elles peuvent auſſi ſe trouver prolongées au delà de R, S, T. Lorſqu'une ligne donnée eſt parallele à CB ou à AB, comme elle ne peut les cou-

per, on ne la prolongera pas pour cette raiſon, mais on doit quelquefois le faire pour d'autres. Voyez Part. 1. Sect. 4. Regl. 8. n. 2. De plus les lignes étant données de poſition, les angles qu'elles font en ſe coupant, ſont auſſi donnez, auſſi bien que les ſegmens, qu'elles font les unes ſur les autres. Fig. 38.

Puis à cauſe que tous les angles du triangle ARB ſont donnez, la proportion, qui eſt entre les côtez AB & BR eſt auſſi donnée, & je la poſe comme z à b, de façon que AB étant x, RB ſera $\frac{bx}{z}$, & la toute CR ſera $y + \frac{bx}{z}$, à cauſe que le point B tombe entre C & R; car ſi R tomboit entre C & B, CR ſeroit $y - \frac{bx}{z}$, & ſi C tomboit entre B & R, CR ſeroit $-y + \frac{bx}{z}$.

Tous les angles du triangle ARB ſont donnez parce que 1° l'angle ABR eſt le complement à deux droits de l'angle donné CBA: donc il eſt connu. 2° L'angle RAB eſt connu & donné, parceque les lignes AD, AB, qui le font, ſont données de poſition. 3° L'angle ARB eſt le complement à deux droits des deux angles RAB, RBA connus.

Quand on connoît les angles, l'on connoît leurs ſinus, & la raiſon qui eſt entre ces ſinus, & par le Theorême de Trigonometrie, la raiſon qui eſt entre les côtez oppoſez à ces ſinus. La raiſon connuë, qui eſt entre les côtez AB, BR peut s'exprimer par les lettres z, b; & l'on peut dire, comme z eſt à b: ainſi le côté AB, x, eſt au côté BR, $\frac{bx}{z}$. Et $CR = CB + BR$, $y + \frac{bx}{z}$, ou $\frac{zy+bx}{z}$. où z, qui ſert ordinairement à marquer des grandeurs inconnuës, en ſignifie une connuë.

Si R tomboit entre C & B Fig. 39. l'on auroit $CR = CB - BR$, $y - \frac{bx}{z}$. Si c tomboit entre B & R ce ſeroit $cR = BR - cB$, $\frac{bx}{z} - y$, ou $-y + \frac{bx}{z}$. Fig. 39.

Tout de même les trois angles du triangle DRC Fig. 38. ſont donnez, & par conſequent auſſi la proportion, qui eſt entre les côtez CR & CD, que je poſe comme z à c; de façon que CR étant $y + \frac{bx}{z}$, CD ſera $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Fig. 38

Dans le triangle DRC l'on connoît 1° l'angle DRC, qui eſt le même que l'angle ARB, que l'on vient de connoître. 2° L'angle CDR eſt déterminé par la queſtion, car c'eſt celui que la ligne CD doit faire avec la donnée AD, 3° L'angle DCR eſt connu, 32. 1. Eucl.

La Trigonometrie fournit donc encore le moyen de ſçavoir la proportion du côté CR au côté CD, que je mets comme z à c; & je fais, comme z eſt à c; de même CR, $\frac{zy+bx}{z}$ eſt à CD, $\frac{czy+bcx}{zz} = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$.

Après cela pourceque les lignes AB, AD, & EF ſont données par poſition, la diſtance qui eſt entre les points A & E eſt auſſi

donnée, & ſi on la nomme, k, on aura EB égal à $k+x$; mais ce ſeroit $k-x$; ſi le point B tomboit entre E & A; & $-k+x$, ſi E tomboit entre A & B.

Fig. 38. $EB = EA + AB$, $k+x$, Fig. 39. $EB = EA - AB$, $k-x$. Et ſi le point E tomboit en e, $eB = AB - eA$, $x-k$, ou $-k+x$.

Et pourceque les angles du triangle Fig. 38. ESB ſont tous donnez, la proportion de BE à BS eſt auſſi donnée, & je la poſe comme z à d; ſi bien que BS eſt $\frac{dk+dx}{z}$, & la toute CS eſt $\frac{zy+dk+dx}{z}$; mais ce ſeroit $\frac{zy-dk-dx}{z}$, ſi le point S tomboit entre B & C; & ce ſeroit $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, ſi C tomboit entre B & S.

Les trois angles du triangle EBS ſont donnez, car 1° l'angle EBS eſt le même, que l'angle ABR déja connu. 2° Parceque la poſition des lignes AB, EF eſt donnée, l'angle BES; qu'elles ſont en ſe coupant, eſt auſſi donné & connu. 3° L'angle ESB eſt connu 32. 1. Eucl.

Les angles du triangle EBS étant connus, par la Trigonometrie leurs ſinus, la raiſon des ſinus, & la raiſon des côtez ſont auſſi connus. Je mets donc la raiſon du côté BE, au côté BS, comme z à d, & je fais cette Analogie, comme z eſt à d: de même le côté BE, $k+x$, eſt au côté BS $\frac{dk+dx}{z}$. Et $CS = CB + BS$, $y + \frac{dk+dx}{z}$, ou $\frac{zy+dk+dx}{z}$. Il eſt aiſé de voir, que ſi Fig. 39. le point S tomboit entre B & C, l'on auroit $CS = CB - BS$, $y - \frac{dk-dx}{z}$ ou $\frac{zy-dk-dx}{z}$. Et que ſi le point e tomboit entre B & S, l'on auroit $eS = BS - eB$, $\frac{dk+dx}{z} - y$, ou $\frac{dk+dx-dy}{z}$, ou $-\frac{zy+dk+dx}{z}$.

De plus les trois angles du triangle FSC ſont donnez, & enſuite la proportion de CS à CF, qui ſoit comme z à e, & la toute CF ſera $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$.

L'angle CSF eſt le même que l'angle BSE connu dans le triangle EBS; l'angle CFS eſt celui, que CF doit faire avec la donnée EF, & il a été déterminé en propoſant la queſtion; l'autre angle FCS eſt auſſi connu 32. 1. Eucl.

Je connois donc, comme dans les triangles précedens, le rapport du côté CS au côté CF, que je poſe comme z à e; & je dis, $z : e :: CS$, $\frac{zy+dk+dx}{z} : CF$, $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$.

En même façon AG, que je nomme l, eſt donnée, & BG eſt $l-x$; & à cauſe du triangle BGT, la proportion de BG à BT eſt auſſi donnée, qui ſoit comme z à f; & BT ſera $\frac{fl-fx}{z}$; & $CT = \frac{zy+fl-fx}{z}$.

AG eſt donnée, parce que c'eſt la partie de la ligne AB donnée de poſi-

tion, qui eſt priſe entre les lignes AD, GH auſſi données de poſition. FIG. 39. AG eſt nommée l; & $BG = AG - AB$, $l - x$.

Les angles du triangle BGT ſont connus, car l'angle BGT eſt celui, qui ſe fait par la rencontre des lignes AB, GH données de poſition; l'angle TBG eſt 15. 1. Eucl. égal à l'angle CBA, que la ligne CB doit faire avec la donnée AB, & que la queſtion a déterminé; le troiſiéme angle BTG eſt auſſi connu 32. 1. Eucl.

La proportion des côtez BG, BT connuë par la Trigonometrie, ſoit comme z à f; l'on fait $z : f :: BG, l - x : BT, \frac{fl - fx}{z}$; & $CT = CB + BT$, $y + \frac{fl - fx}{z}$ ou $\frac{zy + fl - fx}{z}$.

Puis derechef la proportion de TC à CH eſt donnée, à cauſe du triangle TCH, & la poſant comme z à g, on aura $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$.

Les angles du triangle TCH ſont donnez, car l'angle CTH vient d'être connu ſous le nom de BTG; l'angle CHT eſt celui, que la ligne CH doit faire avec la donnée GH, & il a été donné par la queſtion; le troiſiéme eſt leur complement à deux droits.

Que la proportion du côté CT au côté CH, connuë par la Trigonometrie, ſoit comme z à g; & que l'on faſſe $z : g :: CT, \frac{zy + fl - fx}{z} : CH, \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$.

M. DESCARTES ſe contente ici d'avoir trouvé la valeur des quatre lignes cherchées CB, CD, CF, CH: il achevera la ſolution du Problême, Liv. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. 2. &c.

La quantité z a commencé la raiſon des côtez de tous les triangles.

L'on pourroit commencer une raiſon par une quantité, & une autre raiſon par une autre; mais il vaut mieux n'introduire qu'une lettre z, que pluſieurs dans le calcul. Lorſque z repreſente l'unité, comme elle le fait ici, cela donne de la facilité non ſeulement pour le calcul, où elle pourroit être omiſe dans les termes, dans leſquels elle multiplie, ou diviſe; mais encore quand il faut déterminer la valeur de ces mêmes termes: parce que l'unité ne fait aucun changement à la valeur des quantitez, qu'elle multiplie, ou qu'elle diviſe.

SECTION IV.

Reflexions ſur le Calcul precedent.

M. DESCARTES.

ET ainſi vous voyez, qu'en tel nombre de lignes données par poſition, qu'on puiſſe avoir, toutes les lignes tirées deſſus du point C à angles donnez, ſuivant la teneur de la queſtion, ſe peuvent toûjours exprimer chacune par trois termes, dont l'un eſt compoſé de la quantité inconnuë y multipliée ou diviſée par quelqu'autre connuë; & l'autre, de la quantité inconnuë x, auſſi multipliée ou diviſée par quelqu'autre connuë, & la troiſiéme d'une quantité toute connuë, excepté ſeulement ſi elles ſont paralleles, ou bien à la ligne AB, auquel cas le terme compoſé de la quantité x ſera nul; ou bien à la ligne CB, auquel cas celui qui eſt compoſé de la quantité y ſera nul; ainſi qu'il eſt trop manifeſte, pour que je m'arrête à l'expliquer. Et pour les ſignes + & −, qui ſe joignent à ces termes, ils peuvent être changez en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyez auſſi, que multipliant pluſieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantitez x & y, qui ſe trouvent dans le produit, n'y peuvent avoir que chacune autant de dimenſions, qu'il y a eu de lignes, à l'explication deſquelles elles ſervent, qui ont été ainſi multipliées; en ſorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimenſions, en ce qui ne ſera produit que par la multiplication de deux lignes; ni plus de trois, en ce qui ne ſera produit que par la multiplication de trois; & ainſi à l'infini.

La valeur des lignes tirées du point C ſur les données, n'aura pas plus de trois termes, mais elle peut en avoir moins. Les inconnuës ne peuvent avoir dans chaque terme qu'autant de dimenſions, qu'il y a de lignes multipliées pour le produire, parceque ces inconnuës n'ont qu'une dimenſion dans chacune des lignes, qu'on doit multiplier: or x, y ſe multipliant, ne peuvent produire qu'une quantité de deux dimenſions xy; y multipliant y, ne peut produire que le quarré yy; de même ſi ces inconnuës, x, y, y

ſe multiplient, comme il arrive quand on cherche le produit de trois lignes, elle donneront une grandeur de trois dimenſions xyy, *&c.* Mais les inconnuës peuvent avoir moins de dimenſions dans un terme, qu'il n'y a eu de lignes multipliées pour le produire, & c'eſt lors qu'une des lignes eſt connuë ou donnée. Pour les ſignes ils varieront de toutes les manieres imaginables, à cauſe des poſitions differentes poſſibles des lignes données. Voyez les Exemples de L.2. Part.2.Sect.2.& 3.de L.3. Part.4.Sect.4. Art.2.

Lorſque toutes les lignes données ſont paralleles entr'elles,il n'y a qu'une inconnuë dans la valeur des lignes, que l'on tire du point C ſur les données.

PROBLEME.

SOient données les trois lignes paralleles Fig. 40. AB, DR, SE; il faut trouver le point C, d'où l'on puiſſe tirer la ligne CB ſur AB faiſant l'angle donné CBA; la ligne CD ſur DR faiſant l'angle donné CDR; la ligne CE ſur SE faiſant l'angle donné CES: il faut de plus que le quarré de CD ſoit égal au rectangle $CB \times CE$. FIG. 40.

Je prolonge CB, juſqu'à ce qu'elle coupe les deux autres paralleles en R & en S. Les paralleles étant données, leur diſtance eſt connuë. Nommons BR, b; BS, c; & l'inconnuë CB, y; nous aurons $CR = CB + BR$, $y + b$; $CS = CB + BS$, $y + c$. $z = 1$.

Dans le triangle CRD nous connoiſſons tous les angles, car 1° l'angle CRD eſt égal à l'angle CBA que la queſtion a determiné. 2° L'angle CDR eſt celui, que la ligne CD doit faire avec DR, & que la queſtion a auſſi déterminé. 3° L'angle DCR eſt connu 32. 1. Eucl. Si nous connoiſſons les angles, par la Trigonometrie nous connoiſſons leurs ſinus, la raiſon de ces ſinus, & la raiſon des côtez oppoſez aux angles. Soit la raiſon du côté CR au côté CD, comme z à d; nous aurons cette analogie $z : d :: CR, y + b : CD, \frac{dy + bd}{z}$.

Nous connoiſſons auſſi tous les angles du triangle CSE, car 1° l'angle CSE eſt égal à l'angle CBA, 2° l'angle CES eſt celui, que la ligne CE doit faire avec la donnée ES. 3° L'angle SCE eſt le complement des deux autres à deux droits. Par la Trigonometrie nous connoiſſons la raiſon du côté CS au côté CE; que ce ſoit comme z à e; nous ferons $z : e :: CS, y + c : CE, \frac{ey + ce}{z}$. La valeur des lignes cherchées CB, CD, CE ne contient donc qu'une ſeule inconnuë y, lorſque les lignes données ſont paralleles entr'elles.

La ſeule inconnuë dont on ſe ſert alors, peut indifferemment ſe nommer y ou x, quelque ſituation qu'ayent les lignes données : & la diſtinction entre les lignes paralleles à AB, & les lignes paralleles à CB eſt nulle en ce ſens. Cette diſtinction ſe fait pourtant dans le Problême de Pappus, dans lequel M. DESCARTES ſuppoſe, que les lignes exprimées par x ſont dans une poſition à peu près horizontale, & que les lignes exprimées

FIG. 40. par y approchent de la verticale : ainſi lorſque les paralleles données ſont poſées horizontalement, comme Fig. 40. l'on dit qu'elles ſont paralleles à AB, ou aux x ; & la lettre x n'eſt pas employée dans la valeur des lignes cherchées. Lorſque les paralleles données ſont miſes verticalement ; l'on dit qu'elles ſont paralleles à CB, ou aux y ; & l'on ne ſe ſert pas de la lettre x dans l'expreſſion de la valeur des lignes cherchées.

Achevons le Problême. L'on demande $\overline{CD}^2 = CB \times CE$, $\frac{ddyy + 2bddy + bbdd}{zz} = \frac{eyy + cey}{z}$; $ddyy + 2bddy + bbdd = ezyy + cezy$; $ddyy - ezyy + 2bddy - cezy = -bbdd$; $yy + \frac{2bddy - cezy}{dd - ez} = \frac{-bbdd}{dd - ez}$. Et ajoûtant de chaque côté $\frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}ccezz}{d^4 - 2ddez + eezz}$, l'on fait $yy + \frac{2bddy - cezy}{dd - ez} + \frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}ccezz}{d^4 - 2ddez + eezz} = \frac{-bbdd}{dd - ez} + \frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}ccezz}{d^4 - 2ddez + eezz}$. Ce dernier membre étant reduit à la même denomination, l'équation eſt $yy + \frac{2bddy - cezy}{dd - ez} + \frac{bbd^4 - bcddez + \frac{1}{4}ccezz}{d^4 - 2ddez + eezz} = \frac{bbddez - bcddez + \frac{1}{4}ccezz}{d^4 - 2ddez + e^2zz}$, dont la racine quarrée eſt $y = -bdd + \frac{1}{2}cez + \sqrt{\frac{bbddez - bcddez + \frac{1}{4}ccezz}{d^4 - 2ddez + eezz}}$ à la ligne droite. $z = 1$; $d = 2$; $e = 3$.

C'eſt pourquoi ſi ſur la ligne SB prolongée je prends $CB = y$, & que par le point C je mene l'infinie Cc parallele à AB, elle ſera le lieu cherché, & tous ſes points comme c ſatisferont au Problême ; ce qui eſt évident puiſque $cb = CB$, 34. 1. Eucl. ; le triangle crd égal au triangle CRD, le triangle cfe égal au triangle CSE, parceque CD & cd, CE & ce ſont paralleles. L'on peut donc faire au point c le même calcul qu'au point C.

SECTION V.

Comment on connoît de quel degré eſt un Problême, & comment on trouve tous les points, qui ſatisfont à un Problême.

M. DESCARTES.

Comment on trouve que ce Problême eſt plan, lorſqu'il n'eſt

DE plus à cauſe que pour determiner le point C, il n'y a qu'une ſeule condition qui ſoit requiſe, à ſavoir que ce qui eſt produit par la multiplication d'un certain nombre de ces lignes ſoit égal, ou (ce qui n'eſt de rien plus malaiſé) ait la proportion donnée, à ce qui eſt produit par la multiplication des autres ; on peut prendre

prendre à diſcretion l'une des deux quantitez inconnuës x ou y, & chercher l'autre par cette équation ; en laquelle il eſt évident, que lorſque la queſtion n'eſt point propoſée en plus de cinq lignes, la quantité x, qui ne ſert point à l'expreſſion de la premiere peut toûjours n'y avoir que deux dimenſions. De façon que prenant une quantité connuë pour y, il ne reſtera que $xx = +$ ou $- ax +$ ou $- bb$: & ainſi on pourra trouver la quantité x avec la Regle & le Compas, en la façon tantôt expliquée. Même prenant ſucceſſivement infinies diverſes grandeurs pour la ligne y, on en trouvera auſſi infinies pour la ligne x ; & ainſi on aura une infinité de divers points, tels que celui, qui eſt marqué C, par le moyen deſquels on décrira la ligne courbe demandée.

point propoſé en plus de cinq lignes.

Il ſe peut faire auſſi, la queſtion étant propoſée en ſix, ou plus grand nombre de lignes ; s'il y en a entre les données, qui ſoient paralleles à BA, ou BC, que l'une des deux quantitez x ou y n'ait que deux dimenſions en l'équation, & ainſi qu'on puiſſe trouver le point C avec la Regle & le Compas.

Mais au contraire, ſi elles ſont toutes paralleles, encore que la queſtion ne ſoit propoſée qu'en cinq lignes, ce point C ne pourra être ainſi trouvé, à cauſe que la quantité x ne ſe trouvant point en toute l'équation, il ne ſera plus permis de prendre une quantité connuë, pour celle qui eſt nommée y, mais ce ſera elle, qu'il faudra chercher. Et pour ce qu'elle aura trois dimenſions, on ne la pourra trouver, qu'en tirant la racine d'une équation cubique, ce qui ne ſe peut generalement faire, ſans qu'on y employe pour le moins une Section conique. Et encore qu'il y ait juſques à neuf lignes données, pourveu qu'elles ne ſoient point toutes paralleles, on peut toûjours faire, que l'équation ne monte que juſques au quarré de quarré. Au moyen de quoi on la peut auſſi toûjours reſoudre par les Sections coniques, en la façon que j'expliquerai ci-après. Et encore qu'il y en ait juſques à treize, on peut toûjours faire, qu'elle ne monte que juſques au quarré de cube. Enſuite de quoi, on la peut reſoudre par le moyen d'une ligne, qui n'eſt que d'un degré plus compoſée que les Sections coniques, en la façon

que j'expliquerai auſſi ci-après. Et ceci eſt la premiere partie de ce que j'avois ici à démontrer : mais avant que je paſſe à la ſeconde, il eſt beſoin que je die quelque choſe en general de la nature des lignes courbes.

Cette Section aura deux Articles, qui expliqueront les deux parties du Titre.

ARTICLE I.

Comment on connoît de quel degré eſt un Problême.

1. TOutes les fois que la derniere équation d'un Problême peut ſe reduire à $yy = \pm ay \pm bb$, ou $xx \pm ax \pm bb$, l'on pourra trouver la quantité inconnuë y ou x par la Regle & le Compas, comme M. DESCARTES l'a enſeigné Part. 2. Lorſque l'une des inconnuës ne va que juſques à ſon quarré, l'équation pourra toûjours ſe reduire à une de ces formules. Par exemple nous trouverons L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. que la multiplication de la ligne CB Fig. 38. par la ligne CF, & celle de la ligne CD par la ligne CH donnent deux produits, dont on compoſe cette équation

Fig. 38.

$$yy = \frac{\begin{array}{ccc} & -dezzxy & \\ -dekzzy & & +bcfglx \\ & -cfgzxy & \\ +cfglzy & & -bcfgxx \\ & +bcgzxy & \end{array}}{ez^3 - cgzz}$$

Determinons l'inconnuë x à être la grandeur connuë & determinée h, l'équation ſera celle, qui ſuit, dans laquelle il ne reſte que y d'inconnuë.

$$yy = \frac{\begin{array}{ccc} & -dezzhy & \\ -dekzzy & & +bcfglh \\ & -cfgzhy & \\ +cfglzy & & -bcfghh \\ & +bcgzhy & \end{array}}{ez^3 - cgzz}$$

Faiſons $\frac{-dekzz+cfglz-dezzh-cfgzh+bcgzh}{ez^3-cgzz} = -a$; $\frac{bcfglh-bcfghh}{ez^3-cgzz} = mm$; l'équation ſe reduira à $yy = -ay + mm$, $yy + ay + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + mm$, $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + mm}$, & la valeur de y eſt connuë dans le cas, où $x = h$.

Part. 3. Sect. 1.

2. Dans ce Problême de Pappus * l'on multiplie les lignes données, ou deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c. en ajoûtant une ligne connuë, lorſque le nombre des cherchées eſt impair : & l'on fait toûjours deux produits. La raiſon de l'un de ces produits à l'autre peut être conſtante, ou variable. Je m'explique. La raiſon eſt conſtante, ſi elle eſt

la même dans tous les points ; qui ſatisfont au Problême, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que tous les points du cercle *NCc* Fig. 90. ſatisfont au Problême ; que ſi à un point *C* le produit $CB \times CF$ eſt égal au produit $CD \times CH$, il faut que à tous les autres points *c*, *c*, qui ſatisfont au Problême, le produit de $cb \times cf$ ſoit toûjours égal au produit $cd \times ch$; & que ſi au point *C* le produit $CB \times CF$ eſt double du produit $CD \times CH$, il faut que à tous les autres points *c*, *c*, le produit $cb \times cf$ ſoit toûjours double du produit $cd \times ch$: & ſi au point *C* le produit $CB \times CF$ eſt triple, &c. Alors la raiſon d'un produit à un autre eſt conſtante ; & comme une connuë $b = 1$ à une connuë $c = 1$, ou comme une connuë $b = 2$ à une connuë $c = 1$. &c. Fig. 90.

Mais ſi l'on demandoit que le premier produit fût au ſecond, comme une variable x à une variable y, ou comme le quarré xx au quarré yy, ou que le premier produit $\pm$ une quantité variable fût égal au ſecond $\pm$ une quantité conſtante, &c. Lorſque ces quantitez x, y vont en augmentant, ou en diminuant, les produits feroient de même ; & après avoir été l'un double de l'autre, ils pourroient être l'un triple, quadruple, &c. de l'autre. Alors la raiſon des produits ſeroit variable, & ne ſeroit plus conſtamment, comme une connuë à une connuë, mais comme une indeterminée à une autre indeterminée.

L'on pourroit encore exiger, que les produits fuſſent entr'eux, comme une conſtante b à une variable x. Alors la raiſon, qui ſeroit entre les produits, ne ſeroit pas conſtante.

Comme ces produits, ainſi que l'aſſure * M. DESCARTES avec Pappus, peuvent être en raiſon donnée quelconque, la raiſon que le premier a au ſecond peut être variable, auſſi bien que conſtante. Il faut donc obſerver, que lorſque Mr DESCARTES a ici determiné le degré d'un Problême, il a toûjours ſuppoſé, que la raiſon d'un produit à un autre eſt conſtante. * Part. 3. Sect 1. 3. 5. & Tom. 3. Lett. 81.

3. Lorſque la queſtion de Pappus eſt propoſée en trois, ou quatre lignes, & que la raiſon du produit de deux lignes au produit de deux autres eſt conſtante, les inconnuës ne peuvent monter qu'à leur quarré comme on l'a dit Sect. 4. & comme on le verra dans preſque tous les Exemples du L. 2. Part. 2. Sect. 2. Ainſi tous ces cas ſe reſoudront par la Regle & le Compas, puiſqu'ils ſe rapportent à la formule $zz = \pm az \pm bb$, comme on a dit n. 1. & qu'ils ſont des Problêmes plans.

Et comme il peut ſe trouver dans les équations, qui reſultent des deux produits, que l'on ait $+yy$, $-yy$; $+\frac{axx}{b}$, $-\frac{axx}{b}$; &c. qui ſe détruiſent ; le lieu pourra être à la ligne droite, & ſera toûjours un Problême plan, qui pourra ſe conſtruire avec la Regle & le Compas. Car l'équation pourra être $ay - xy + mm = o$, & mettant b pour x, $ay - by + mm = o$, $y = \frac{mm}{b-a}$.

Ut Exempli causâ ſi rectangulum ex FC in CD debeat eſſe majus, quàm rectangulum ex CB in CH quâdam datâ quantitate, vel quid ſimile.

FIG. 40. Mais ſi la raiſon du premier produit au ſecond eſt variable, outre les deux inconnuës, que la multiplication des deux lignes cherchées introduit dans quelques termes du produit, il y en entrera encore neceſſairement quelqu'autre, ce qui fera monter l'équation au troiſiéme, quatriéme, &c. degré. Par exemple, ſi dans le Problême de la Section 4e, où les cherchées ſont CB, y; $CD, \frac{dy+bd}{z}$; $CE, \frac{ey+ce}{z}$; l'on avoit demandé, que le quarré de CD fût au rectangle $CB \times CE$, comme le quarré yy eſt à une connuë a; l'on auroit trouvé $\frac{addyy+2abddy+abbdd}{zz} = \frac{ey^4+cey^3}{z}$; $addyy + 2abddy + abbdd = ezy^4 + cezy^3$; $ezy^4 + cezy^3 - addyy - 2abddy - abbdd = 0$; $y^4 + cy^3 \overline{=} \frac{addyy-2abddy-abbdd}{ez} = 0$. qui eſt une équation de quatre dimenſions, qui ne peut pas ſe conſtruire par la Regle & le Compas; mais qui demande une Section conique, comme on le verra Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 2.

Il peut encore arriver, le Problême étant propoſé en trois, ou quatre lignes, que les quarrez xx, yy des inconnuës ne ſoient pas dans l'équation, mais que le rectangle xy de ces mêmes inconnués y ſoit; comme il arriveroit dans l'équation n. 1. Alors, comme on l'apprend dans les Traitez des lieux Geometriques, ce peut être un lieu à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, & l'on en donnera des exemples Liv. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 8. M. DESCARTES * reconnoît dans une de ſes Lettres, qu'il a omis ce cas dans la reſolution generale, qu'il a donné du Problême de Pappus.

* Tom 3. Lett. 1. à M. de Beaune

4. Lorſque la queſtion eſt propoſée en cinq lignes, qui ne ſont pas toutes paralleles entr'elles; alors, comme il y en a quelques-unes qui ſe coupent, l'on aura l'inconnuë AB, x, avec CB, y auſſi inconnuë: & ſi la raiſon d'un produit de trois lignes cherchées au produit des deux autres cherchées & d'une donnée eſt conſtante; l'une des deux inconnuës, comme y peut monter au cube y^3, parceque trois lignes, qui ſe multiplient, auront chacune y dans quelqu'un de leurs termes; tandis que l'autre x ne ſera élevé, que juſqu'à ſon quarré xx, parceque des trois lignes, qui ſe multiplient, il n'y en aura que deux, qui ayent l'inconnuë x; la troiſiéme étant une ligne donnée. C'eſt pourquoi l'on doit chercher l'inconnuë x, & prendre pour y une determinée b, & pour y^3, le cube b^3; afin que la ſeule inconnuë x, qui reſte dans l'équation ne montant au plus qu'au quarré, le Problême ſoit plan, & puiſſe ſe conſtruire avec la Regle & le Compas, ſuivant la methode de Part. 2. Les exemples ſont Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 4. Apreſent deux Exemples éclairciront la choſe. Soit 1e l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 4a^3 = axy$, vous ordonnez ainſi les termes $x = \frac{y^3-2ayy-aay+4a^3}{ay}$ & faiſant $y = a$, vous avez $x = \frac{a^3-2a^3-a^3+4a^3}{aa} = 2a$ valeur de x, lorſque y eſt égale à a. Soit 2e l'équation $y^3 + 2ayy = axy + axx$; vous arrangez ainſi les termes xx

FIG. 122.

$+xy = \frac{y^3+2ayy}{a}$, & ſi $y=a$, $xx+ax = 3aa$, $xx+ax+\frac{1}{4}aa$ FIG. 121.
$= 3aa+\frac{1}{4}aa = \frac{13}{4}aa$, $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{13}{4}aa} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{13}$ valeur de x, lorſqu'on ſuppoſe $y=a$.

Si la raiſon d'un produit à un autre étoit variable, par exemple comme yy à xx, y^3 à x^3, &c. il eſt évident que les inconnuës pourroient être élevées au cinquiéme, ſixiéme, &c. degré.

Il peut arriver auſſi, qu'une des inconnuës x n'ait qu'une, ou deux dimenſions, & que le Problême ſoit plan, alors il ſe conſtruira par une ligne droite, ou une circulaire. Les Exemples ſe trouvent l. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 2.

5. Lorſque la queſtion eſt propoſée en cinq lignes toutes paralleles entr'elles, une ſeule inconnuë y ſe trouve dans l'équation, & cette inconnuë montera juſqu'au cube y^3, parceque trois lignes, dans leſquelles y ſe trouve, ſe multiplieront. Alors la valeur de y ne peut être connuë, que par une extraction de racine cubique, laquelle extraction demande ordinairement une Section conique. Comme on le verra Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1.

Quelquefois l'on n'a pas beſoin de Section conique. Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1.

Et ſi l'on demandoit qu'un produit fût à un autre, comme yy à y^3 &c. l'on voit aiſément, que l'inconnuë iroit à une dimenſion plus élevée, que n'eſt le cube.

6. A plus forte raiſon, quand le Problême eſt propoſé en ſix, ou plus grand nombre de lignes, toutes paralleles entr'elles, l'on ne pourra pas le reſoudre, comme les Problêmes plans, Part. 2. L. 1. Mais s'il y a 6. 7. 8. lignes paralleles données, il faut ordinairement des Sections coniques. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. Vous trouverez au même Art. §. 5. qu'étant données huit paralleles, l'équation s'abaiſſe au ſecond degré.

L'équation montera juſqu'à une dimenſion bien plus haute encore, ſi les produits n'ont pas entr'eux une raiſon conſtante.

Il ſe peut faire auſſi, la queſtion étant propoſée en ſix, ou plus grand nombre de lignes, s'il y en a entre les données, qui ſoient paralleles à BA, ou à BC; que les quantitez x, ou y n'ayent qu'une dimenſion : pourveu, comme on l'a déja dit ſouvent, que les produits ayent entr'eux une raiſon conſtante. Voyez L. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. §. 4.

7. Lorſqu'il y a ſix lignes, & que la raiſon des produits eſt conſtante, l'équation ne peut monter qu'aux cubes des inconnuës ; parceque les lignes cherchées ſe multiplient trois à trois. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. §. 1.

Les cubes peuvent encore s'effacer, & l'équation ſera deprimée à un moindre degré.

8. Lorſque les lignes propoſées ſont ſept, l'on aura d'un côté, quatre

Fig. 112. des lignes cherchées, qui ſe multiplieront, & qui donneront un quarré de quarré y^4, ſi les produits ont une raiſon conſtante. Et il faut alors une Section conique. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 4. Art. 2. §. 3.

9. Lorſqu'il y a huit lignes données, & que la raiſon donnée entre les produits eſt conſtante; les lignes cherchées ſe multiplieront quatre à quatre; les inconnuës ne peuvent monter qu'au quatriéme degré; & la reſolution ſe fera par les Sections coniques.

10. Lorſqu'il y a neuf lignes données, avec une raiſon conſtante des produits, d'un côté cinq lignes ſe multiplieront, & pourront produire la cinquiéme puiſſance y^5 d'une des inconnuës; mais de l'autre côté quatre lignes ſeulement des cherchées ſe multiplieront avec une cinquiéme donnée, & l'autre inconnuë ne pourra être élevée qu'à la quatriéme puiſſance x^4. Alors l'on determinera y, & l'on cherchera la valeur de x par les Sections coniques.

11. Juſques ici les Problêmes, lorſque la raiſon du premier produit au ſecond eſt conſtamment la même, ne peuvent être, pour le plus, que ſolides: mais ſoit par la poſition des lignes, qui ne donneront qu'une ou deux lignes, où x ſe trouve, ſoit par la multiplication des lignes, qui ont y, par celles, qui ont x, il peut arriver, que l'équation ſoit abaiſſée, juſqu'à être un Problême plan. V. L. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. 2.

12. Mais ſi les neuf lignes données ſont toutes paralleles à une ſeule, une des inconnuës x ne ſera pas dans les produits, dont la raiſon eſt toûjours la même; & l'autre inconnuë y ſera élevée à la quatriéme dimenſion y^4 dans le produit de quatre des lignes cherchées avec une donnée, & à la cinquiéme dimenſion y^5, dans le produit des cinq autres lignes cherchées; & alors il faut une ligne plus compoſée d'un degré, que les Sections coniques, comme on l'explique Liv. 3. Part. 5.

13. A plus forte raiſon lorſque les lignes données, toutes paralleles entr'elles ſont dix, onze, douze, & que la raiſon des produits eſt conſtante faudra-t-il une ligne plus compoſée d'un degré, que les Sections coniques. Car lorſque les lignes données ſont dix, chaque produit aura y^5; lorſqu'elles ſont onze, un produit aura y^6, l'autre y^4; lorſqu'elles ſont douze, les deux produits auront chacun y^6.

De même de quelque maniere, que les lignes données ſe coupent, ſi elles ſont dix, elles ſe multiplient cinq à cinq, & les produits pour le plus contiendront les cinquiémes puiſſances y^5, x^5; ſi elles ſont onze, le produit de ſix des cherchées contiendra le quarré de cube y^6, le produit des cinq autres & d'une donnée le premier ſurſolide x^5; ſi elles ſont douze, un produit de ſix lignes contiendra le quarré de cube y^6, l'autre produit le quarré de cube x^6. Et tous ces cas ſe reſoudront par une ligne plus compoſée d'un degré, que ne ſont les Sections coniques, comme on l'expliquera L. 3. Part. 5.

Il arrivera quelquefois, ou par la diſpoſition des lignes données, ou par la multiplication de celles, qui contiennent l'inconnuë x avec celles, qui contiennent l'inconnuë y, que l'équation deſcendra au quarré de quarré, ou au cube, ou au quarré, ou à la racine de x. FIG. 111.

14. Lorſque le nombre des lignes données eſt treize, ſi elles ne ſont pas toutes paralleles entr'elles, & que les produits ſont comme une quantité connuë à une connuë : le produit de ſept des lignes cherchées pourra être de ſept dimenſions y^7 ; & l'autre de ſix des cherchées & d'une donnée ne ſera que de ſix x^6. L'on doit alors chercher la valeur de x, & determiner y ; afin que la reſolution ne demande plus, qu'une ligne d'un degré plus compoſée, que les Sections coniques.

Ces équations peuvent, comme les precedentes & pour les mêmes raiſons, être deprimées à de moindres degrez.

15. Mais ſi les treize lignes ſont toutes paralleles à une ſeule, une des inconnuës x ne s'y trouvera pas, & l'autre y ſera dans un des produits y^6, & dans l'autre y^7. Et il faudra une ligne plus compoſée de deux degrez que les Sections coniques.

16. L'on peut continuer un ſemblable raiſonnement dans un plus grand nombre de lignes à l'infini. M. DESCARTES L. 3. Part. 5. Sect. 5. veut, que de deux en deux dimenſions, la ligne, qui doit être employée à la ſolution d'un Problême, ſoit toûjours plus compoſée d'un degré. Il veut que pour le cube & le quarré de quarré l'on ſe ſerve du Cercle & d'une Section conique ; pour les équations de cinq & de ſix dimenſions du cercle & d'une courbe plus compoſée d'un degré, que les Sections coniques ; pour les équations de ſept & de huit dimenſions d'un cercle & d'une courbe plus compoſée de deux degrez que les Sections coniques, &c. Voyez Liv. 3. Part. 4. Sect. 5. n. 3.

ARTICLE II.

Comment on trouve tous les Points qui ſatisfont à un Problême.

1. IL eſt à propos d'expliquer ici la difference qu'il y a entre lieu plan & Problême plan, lieu ſolide & Problême ſolide, lieu ſurſolide & Problême ſurſolide. Le lieu plan eſt une ligne droite, ou une circonference de cercle ; le Problême plan eſt celui qui ſe reſout, où dont tous les points qui ſatisfont au Problême, ſe trouvent par l'interſection de deux lignes droites, ou de deux circonferences de cercles, ou d'une ligne droite & d'un cercle. Le lieu ſolide eſt une des trois Sections coniques ; le Problême ſolide eſt celui, dont tous les points, qui reſolvent la queſtion, ſe trouvent par l'interſection d'une Section conique avec une autre Section conique, ou avec un cercle, ou avec une ligne droite. Le lieu ſurſolide eſt une courbe plus compoſée que les Sections coniques ; le Problême ſurſoli-

de eſt celui pour la ſolution duquel il faut employer une courbe plus compoſée que les Sections coniques, quelle que ſoit l'autre ligne, avec laquelle elle ſe coupe. Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 10. De ſorte que comme on va le voir ici, un lieu ſolide ſe conſtruira, c'eſt-à-dire, qu'on trouvera tous les points, qui compoſent une Section conique, avec un Problême plan, & en n'employant que la ligne droite & la circulaire.

L'on conſtruit quelquefois un lieu ſurſolide, & l'on trouve tous les points d'une ligne plus compoſée, que les Sections coniques, avec un Problême plan, en ne ſe ſervant que de lignes droites & circulaires. L'on en verra des Exemples, L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

2. Au reſte ce que l'on va dire ici, n'eſt autre choſe qu'une maniere de décrire une ligne courbe, en trouvant une infinité de ſes points, qu'on joint enſuite. Et comme cette Methode ſera décrite au long, L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. L'on n'en traitera maintenant, qu'autant qu'il eſt neceſſaire pour comprendre ces mots de M. DESCARTES, *même prenant ſucceſſivement infinies diverſes grandeurs pour la ligne* y, *on en trouvera auſſi infinies pour la ligne* x; *& ainſi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui eſt marqué* C, *par le moyen deſquels on décrira la ligne courbe demandée.*

FIG. 41. 3. Soit propoſée l'équation $yy = ax$ à la parabole, il faut avec cette équation décrire une parabole Fig. 41. qui eſt un lieu ſolide. Parceque x n'a qu'une dimenſion, c'eſt elle que je chercherai, & je determinerai y; je trouverai tous les points D, d de la parabole par des Problêmes plans, & en ne me ſervant que de la ligne droite, & de triangles ſemblables.

Prenons l'infinie ACc pour l'axe, le point A pour le ſommet, $AB = a$ pour le parametre: les x doivent ſe prendre ſur l'axe AC, dont elles ſont les coupées, les y ſont les appliquées. Je determine y à être la ligne b^c connuë. L'équation $yy = ax$, ou $x = \frac{yy}{a}$ devient $x = \frac{bb}{a}$. Faiſons un angle quelconque IEH, dont les lignes ſont indefinies, coupons $EF = a$, $EG = b$, $FH = b$; joignons FG, & par le point H menons HI parallele à FG; nous avons cette Analogie, $EF, a :: EG, b :: FH, b : GI$, $\frac{bb}{a} = \frac{yy}{a} = x$. De ſorte que $GI = x$ eſt l'abſciſſe, qui répond à l'appliquée $y = b$. Ainſi nous prendrons ſur l'axe ACc, l'abſciſſe $AC = GI$, x, & au point C nous appliquerons CD, $y = b$, faiſant l'angle droit ACD, & nous aurons un point D, qui ſatisfait au Problême, ou qui donne l'équation $x = \frac{bb}{a} = \frac{yy}{a}$, & $ax = yy$.

Enſuite pour avoir un autre point d, je determine y à être la ligne m, & je cherche l'abſciſſe, qui correſpond à cette appliquée $y = m$. Je prends ſur les côtez du triangle IEH, la ligne $Eg = a$, $Eg = m$, $Fh = m$; je joins Fg, & par le point h je mene hi parallele à Fg. J'aurai encore, $EF, a :: Eg, m :: Fh, m : gi$, $\frac{mm}{a} = \frac{yy}{a} = x$ puiſque $y = m$. De ſorte que l'abſciſſe égale à gi, x eſt celle qui répond à l'appliquée $y = m$. C'eſt pour-

pourquoi je prens $Ae = gi$, x; & au point e j'applique ed, $y = m$, parallele à CD; & un autre point d de la parabole eſt trouvé.

En determinant ſucceſſivement y à être des lignes de differente grandeur, ou en determinant la grandeur de differentes ordonnées, je trouverai de la même maniere differentes grandeurs des abſciſſes x correſpondantes.

Les differentes ordonnées étant appliquées à l'axe donneront differens points D, d; qui ſeront joints par une ligne courbe ADd, elle ſera la moitié de la parabole cherchée.

Si en appliquant CD, on la prolonge de l'autre côté de l'axe, de ſorte que CK ſoit égale à CD; & qu'on prolonge de même les autres appliquées, l'on aura les points K, k par leſquels l'autre partie AKk de la parabole paſſera.

4. Il faut décrire une ellipſe Fig. 42. qui eſt un lieu ſolide, avec l'équation $\frac{2a}{p}yy = 2ax - xx$, dans laquelle l'axe eſt $2a$, le parametre p. Ce qui ſe peut faire 1° en cherchant x & en déterminant y, 2° en cherchant y & en determinant x. Ce ſera toûjours un Problème plan, parceque vous trouverez les points m, d, D, h, &c. de la courbe avec la regle & le compas, ou avec la ligne droite & le cercle.

Si c'eſt x, que vous cherchez; arrangez ainſi les termes $xx - 2ax = -\frac{2a}{p}yy$, $xx - 2ax + aa = aa - \frac{2a}{p}yy$; $x = a \mp \sqrt{aa - \frac{2a}{p}yy}$. Prenons l'axe $2a$ pour l'unité. Cet axe eſt AB, & $AC = CB$, a.

Soit $y = p$, l'équation devient $x = a \mp \sqrt{aa - 2ap}$. cherchez Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. La moyenne proportionelle f entre l'unité $2a$ & p, & vous aurez $2ap = ff$, & $x = a \mp \sqrt{aa - ff}$.

Maintenant Fig. 25. faites $NL = a$, $LM = f$, l'angle NLM droit, menez MR parallele à NL, NP parallele à LM & perpendiculaire à MR; enfin du centre N, de l'intervale NL décrivez le cercle LQR. Suivant ce qui a été démontré, Part. 2. Art. 1. n. 2. Vous aurez la moindre racine vraye MQ, $x = a - \sqrt{aa - ff}$, la plus grande vraye MR, $x = a + \sqrt{aa - ff}$. Fig. 25.

Soit Fig. 42. A l'origine des x: coupez $Ae = MQ$ Fig. 25. & Ag Fig. 42. $= MR$ Fig. 25. aux points e, g élevez les perpendiculaires ed, gh chacune égale à p, & vous aurez deux ordonnées y correſpondantes aux deux valeurs de x. Et parceque dans l'équation $x = a \mp \sqrt{aa - \frac{2a}{p}yy}$, yy eſt autant le quarré de $-y$, que de $+y$: il ſuit qu'à chaque valeur de x il répond des $-y$, comme des $+y$. Ainſi aux mêmes points e, g vous éleverez de l'autre côté de l'axe AB, les perpendiculaires $ea = ed$, $gl = gh$. Vous aurez donc les quatre points d, h, l, a, qui ſont à l'ellipſe, qu'on veut décrire.

Enfin ſi vous déterminez pluſieurs valeurs de $\pm y$, & que vous cherchiez de la même façon les valeurs de x, qui leur répondent : vous trouverez

autant de points que vous voudrez, lesquels appartiendront à la même ellipse. Après quoi en joignant tous ces points par une ligne courbe *ADBK*, vous décrirez l'ellipse, dont l'équation est $\frac{2a}{p}yy = 2ax - xx$.

5. Si c'est y que vous cherchez; les termes de l'équation se disposeront ainsi $yy = px - \frac{pxx}{2a}$, $\pm y = \sqrt{px - \frac{pxx}{2a}}$.

Soit d'abord $x = a = AC$ Fig. 42. l'équation sera $\pm y = \sqrt{ap - \frac{1}{2}ap.} = \sqrt{\frac{1}{2}ap}$. Cherchez, comme auparavant, Fig. 7. la moyenne proportionelle GI entre HG que vous ferez égale à la ligne AC, a, & GF, que vous ferez égale à $\frac{1}{2}p$; HG sera $\sqrt{\frac{1}{2}ap} = \pm y$. Ensuite au point C Fig. 42. où finit la valeur de $x = a$; vous éleverez les perpendiculaires, d'un côté CD, $+y$; de l'autre CK, $-y$; chacune égale à $\sqrt{\frac{1}{2}ap}$; & vous aurez les points D, K à l'ellipse.

Soit encore $x = \frac{1}{3}a = Af$. L'équation devient $\pm y = \sqrt{\frac{1}{3}ap - \frac{1}{18}ap} = \sqrt{\frac{5}{18}ap}$. Vous chercherez une moyenne proportionelle entre AC, a & $\frac{5}{18}p$, laquelle vous appliquerez perpendiculairement au point f, en faisant fm, $+y = \sqrt{\frac{5}{18}ap}$; fn, $-y = \sqrt{\frac{5}{18}ap}$. Ou bien parceque $\sqrt{\frac{5}{18}ap} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}ap}$; vous chercherez la moyenne proportionelle entre a & $\frac{5}{2}p$; elle sera $\sqrt{\frac{5}{2}ap}$, & vous en prendrez le tiers, que vous appliquerez en fm, fn.

Vous pourrez, en suivant la même Methode, trouver autant de points que vous voudrez; lesquels étant joints par la courbe $ADBK$, vous aurez décrit l'ellipse, dont l'équation a été proposée.

LA GEOMETRIE DE M. DESCARTES.

LIVRE II.

CE Livre sera divisé en cinq Parties. Dans la premiere M. DESCARTES parle de la nature des lignes courbes; dans la seconde il poursuit la resolution du Problême de Pappus; dans la troisiéme il montre que l'on peut déduire les proprietez des lignes courbes de leur équation; ce qu'il fait voir en particulier de leurs tangentes; dans la quatriéme il explique les proprietez de quelques verres de figure ovale, qui peuvent servir à la reflexion, & à la refraction de la lumiere; dans la cinquiéme il parle des lignes décrites sur une surface courbe.

PARTIE PREMIERE.

De la Nature des lignes courbes.

SECTION I.

Des Problêmes Geometriques.

M. DESCARTES.

LEs Anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problêmes Geometriques, les uns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires; c'eſt-à-dire, que les uns peuvent être conſtruits, en ne traçant que des lignes droites & des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y employe pour le moins quelque Section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelqu'autre ligne plus compoſée.

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut recevoir en Geometrie.

Cet endroit eſt tiré de Pappus, qui s'explique ainſi avant la Prop. 5. L. 3. de ſes Collections Mathematiques. * *Les Anciens ont determiné trois genres de Problêmes Geometriques; dont ils ont voulu que les uns fuſſent appellez Problêmes plans, les autres Problêmes ſolides, les troiſiémes Problêmes lineaires. C'eſt avec raiſon qu'ils ont nommez Problêmes plans ceux, qui peuvent ſe reſoudre par des lignes droites & par la circonference d'un cercle; en effet les lignes, avec leſquelles l'on reſout ces Problêmes, ont leur origine dans un plan. Mais tous les Problêmes qui ſont reſolus en prenant une, ou pluſieurs Sections coniques pour leur conſtruction, s'appellent ſolides; parceque pour les conſtruire, il eſt neceſſaire de ſe ſervir des ſurfaces de Figures ſolides, à ſçavoir des coniques. Il reſte le troiſiéme genre de Problêmes, qu'on appelle lineaires, parceque pour leur conſtruction, outre les lignes dont on a déja parlé, l'on en prend, qui ont une origine changeante; telles que ſont les Spirales, les Quadratrices, les Conchoïdes, & les Ciſſoïdes; qui ont pluſieurs proprietez admirables.*

* *Problematum Geometricorum antiquitria genera eſſe ſtatuerunt, & eorum alia quidem plana appellari, alia ſolida, alia linearia. Quæ igitur per rectas lineas & circuli circumferentiam ſolvi poſſunt, meritò plana dicuntur; etenim, linea per quas ejuſmodi Problemata ſolvuntur, in plano ortum habent. Problemata verò quæcumque ſolvuntur aſſumptâ in conſtructionem aliqua Coni Sectione vel pluribus, ſolida appellantur; namque ad conſtructionem neceſſe eſt ſolidarum Figurarum ſuperficiebus, nimirum conicis uti. Reſtat tertium genus, quod lineare appellatur; linea enim alia præter jam dictas, in conſtructionem aſſumuntur varium & tranſmutabilem ortum habentes, quales ſunt Helices, & quas Graci τετραγωνίζουσας, nos Quadrantes dicere poſſumus, Conchoïdes & Ciſſoïdes, quibus multa & mirabilia accidunt... neque eoni ſectiones facile eſt in plano deſignare.*

Pappus dit preſque la même choſe avant la Prop. 31. L. 4. ** où il dit

** *Varium & difficilem ortum habent, ex inordinatis ſuperficiebus & motibus implicatis facta.*

que ces dernieres lignes ont une origine changeante & difficile, étant faites par des ſurfaces irregulieres, & par des mouvemens embarraſſez.

M. DESCARTES a retenu le nom, que les Anciens ont donné aux differens Problêmes de la Geometrie; mais ce n'eſt pas pour les mêmes raiſons: comme on le peut voir, Sect. 2. Art. 2. Car il prétend avec raiſon que les Sections coniques ſe peuvent décrire ſur un plan, comme l'on y décrit un cercle; & que la conchoïde, la ciſſoïde & pluſieurs autres lignes, qui ſervent aux Problêmes lineaires, peuvent ſe décrire par un, ou pluſieurs mouvemens uniformes. Pappus ne dit pas qu'il eſt impoſſible; mais qu'il n'eſt pas facile de décrire les Sections coniques ſur un plan. M. DESCARTES appelle encore Problêmes plus que ſolides ceux, que l'on vient de nommer lineaires. Au Titre du L. 2.

Quelques Geometres diviſent les Problêmes de la Geometrie en quatre eſpeces, de cette maniere. Le Problême ſimple ou lineaire eſt celui qui ſe peut reſoudre par l'interſection de deux lignes droites; le Problême plan eſt celui, qui ſe peut reſoudre par l'interſection d'une ligne droite & d'un cercle, ou par celle de deux circonferences de cercle; le Problême ſolide eſt celui, qui ſe peut reſoudre par l'interſection d'une circonference de cercle avec une des trois Sections coniques, ou par l'interſection de deux Sections coniques; le Problême ſurſolide eſt celui, qui peut ſe reſoudre par l'interſection d'une des courbes, dont on a déja parlé, avec une autre d'une dimenſion plus élevée, ou par l'interſection de deux lignes d'une dimenſion plus élevée, que ne le ſont les Sections coniques, quelle que ſoit cette dimenſion.

L'on auroit pû diviſer les Problêmes de Geometrie d'une autre façon, car cela eſt fort arbitraire, & en aſſigner divers genres. Les Problêmes du premier genre ſeroient ceux, qui peuvent ſe reſoudre en y employant des lignes d'une dimenſion, c'eſt-à-dire, des lignes droites, dont les équations ne contiennent que des inconnuës d'une dimenſion, x, y; les Problêmes du ſecond genre ſeroient ceux, qui ne peuvent ſe reſoudre, que l'on n'y employe au moins une ligne de deux dimenſions, c'eſt-à-dire un cercle, ou une parabole, ou une ellipſe, ou une hyperbole, dans les équations deſquelles les deux inconnuës, ou l'une des deux ont deux dimenſions, ou dans leſquelles le plan des deux inconnuës ſe trouve, yy, xy, xx; les Problêmes du troiſiéme genre ſeroient ceux, que l'on ne peut conſtruire, que l'on n'y employe au moins une ligne de trois dimenſions, & dans l'équation deſquelles une inconnuë, ou toutes les deux montent à la troiſiéme dimenſion, ou dans leſquelles le ſolide fait par les deux inconnuës ſe trouve, y^3, xyy, xxy, x^3; les Problêmes du quatriéme genre, &c.

SECTION II.

Des Lignes Geometriques & des Mechaniques.

M. DESCARTES.

MAis je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela diſtingué divers degrez entre ces lignes plus compoſées, & je ne ſçaurois comprendre, pourquoi ils les ont nommées méchaniques plûtôt que geometriques. Car de dire que ç'ait été, à cauſe qu'il eſt beſoin de ſe ſervir de quelque machine pour les décrire, il faudroit rejetter par même raiſon les cercles & les lignes droites, vû qu'on ne les décrit ſur le Papier qu'avec un Compas, & une Regle, qu'on peut auſſi nommer des machines. Ce n'eſt pas non plus à cauſe que les inſtrumens, qui ſervent à les tracer, étant plus compoſez que la Regle & le Compas, ne peuvent être ſi juſtes; car il faudroit pour cette raiſon les rejetter des méchaniques, où la juſteſſe des Ouvrages, qui ſortent de la main, eſt deſirée; plûtôt que de la Geometrie, où c'eſt ſeulement la juſteſſe du raiſonnement qu'on recherche, & qui peut ſans doute être auſſi parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Je ne dirai pas auſſi, que ce ſoit à cauſe qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils ſe ſont contentez, qu'on leur accordât, qu'ils puſſent joindre deux points donnez par une ligne droite, & décrire un cercle d'un centre donné, qui paſſât par un point donné. Car ils n'ont point fait de ſcrupule de ſuppoſer outre cela, pour traiter des Sections Coniques, qu'on pût couper tout cone donné par un plan donné. Et il n'eſt beſoin de rien ſuppoſer pour tracer toutes les lignes courbes, que je prétens ici introduire; ſinon que deux ou pluſieurs lignes puiſſent être muës l'une par l'autre, & que leurs interſections en marquent d'autres; ce qui ne me paroît en rien plus difficile. Il eſt vrai qu'ils n'ont pas auſſi entierement reçu les Sections Coniques en leur Geometrie, & je ne veux pas entreprendre de changer les noms, qui ont été approuvez par l'uſage; mais,

il eſt, ce me ſemble, très-clair, que prenant, comme on fait, pour Geometrique ce qui eſt précis & exact, & pour méchanique ce qui ne l'eſt pas; & conſiderant la Geometrie comme une ſcience, qui enſeigne generalement à connoître les meſures de tous les corps, on n'en doit pas plûtôt exclurre les lignes les plus compoſées, que les plus ſimples, pourvû qu'on les puiſſe imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuivent, & dont les derniers ſoient entierement reglez par ceux qui les precedent: car par ce moyen on peut toûjours avoir une connoiſſance exacte de leur meſure. Mais peut-être que ce qui a empêché les Anciens Geometres de recevoir celles, qui étoient plus compoſées, que les Sections Coniques; c'eſt que les premieres, qu'ils ont conſiderées, ayant par hazard été la Spirale, la Quadratrice & ſemblables, qui n'appartiennent veritablement qu'aux méchaniques, & ne ſont point du nombre de celles que je penſe devoir être ici reçûës, à cauſe qu'on les imagine décrites par deux mouvemens ſeparez, & qui n'ont entr'eux aucun rapport, qu'on puiſſe meſurer exactement: bien qu'ils ayent après examiné la Conchoïde, la Ciſſoïde, & quelque peu d'autres, qui en ſont; toutesfois à cauſe qu'ils n'ont peut être pas aſſez remarqué leurs proprietez, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premieres. Ou bien c'eſt que voyant, qu'ils ne connoiſſoient encore, que peu de choſes touchant les Sections Coniques, & qu'il leur en reſtoit même beaucoup, touchant ce qui ſe peut faire avec la Regle & le Compas, qu'ils ignoroient, ils ont cru ne devoir point entamer de matiere plus difficile. Mais pource-que j'eſpere, que d'oreſnavant ceux qui auront l'adreſſe de ſe ſervir du calcul Geometrique ici propoſé, ne trouveront pas aſſez de quoi s'arrêter touchant les Problêmes plans, ou ſolides; je croi qu'il eſt à propos, que je les invite à d'autres recherches, où ils ne manqueront jamais d'exercice.

M. DESCARTES après avoir donné dans ſa Geometrie la maniere de reſoudre les Problêmes plans & ſolides, donne la methode de reſoudre ceux des plus que ſolides, qui montent à cinq ou ſix dimenſions, & il aſſure à la fin du Livre troiſiéme, qu'il ne faut que ſuivre la même voye, pour conſtruire tous ceux, qui ſont plus compoſez à l'infini. Ainſi il peut inviter à des recherches, où l'on ne manquera jamais d'exercice.

Après avoir expliqué ce que c'eſt que Geometrique & Méchanique en general, nous dirons quelles lignes ſont Geometriques, ou Méchaniques; & nous rapporterons quelques lignes tant Geometriques que Méchaniques en particulier.

ARTICLE I.

Ce que c'eſt que Geometrique & Mechanique.

1. L'On appelle Geometrique ce qui eſt précis & exact, méchanique ce ce qui ne l'eſt pas. Une operation Geometrique eſt celle, qui me donne une meſure, ou un rapport exact; une operation méchanique eſt celle, qui ne me donne ni une meſure, ni un rapport exact. La raiſon de cela eſt, parceque dans la pratique, qui eſt la mechanique, l'on ne peut jamais atteindre à l'exactitude de la Geometrie & de ſes ſuppoſitions. Jamais on ne trace une ligne ſans largeur, une ſurface ſans épaiſſeur, jamais on ne fera un levier, qui ne touche ſon appui qu'en un point, jamais on ne polira ſi bien un plan & un globe, qu'ils ne ſe touchent qu'en un point, &c.

2. La meſure doit être de même eſpece, que la choſe meſurée, la longueur meſure la longueur, la ſurface meſure la ſurface, le ſolide meſure le ſolide.

La meſure doit auſſi être ce qu'il y a de plus aiſé à connoître dans chaque eſpece. La ligne droite eſt la meſure de toutes les lignes, parce qu'étant la plus courte qui ſe puiſſe tirer d'un point à un autre, elle eſt parfaitement connuë, dès que les points ſont donnez. L'on ne dit point, que l'on connoiſſe exactement la grandeur d'une ligne courbe, que l'on ne puiſſe aſſigner la ligne droite qui lui eſt égale; & c'eſt ce que l'on appelle la rectification de la courbe. La meſure des ſurfaces eſt le quarré, parceque ſes côtez étant égaux, & ſes angles droits, il ſuffit de donner la ligne, qui eſt ſon côté, pour qu'il ſoit parfaitement connu. Nous ne croyons pas connoître geometriquement une ſurface curviligne, ou mixte, que nous ne puiſſions dire à quel quarré, ou ce qui eſt le même par la Prop. 26. 6. Eucl. à quelle figure rectiligne elle eſt égale; ce qui s'appelle trouver la quadrature d'une Figure curviligne, ou mixte. La meſure des ſolides eſt le cube, parceque ſes côtez étant égaux & ſes angles droits, il ne faut qu'avoir un de ſes côtez, pour le connoître exactement.

3. Les Geometres qui n'ont pas cru, qu'ils puſſent trouver geometriquement & exactement la longueur des lignes courbes, ont voulu au moins connoître exactement, lorſque cela s'eſt pû faire, le rapport, que chaque point d'une courbe, a avec chaque point d'une ligne droite. Ce rapport s'exprime par une équation, qui, en ſuppoſant deux de ſes quantitez variables, eſt la même pour tous les points de la courbe. Tous les lieux Geometriques ſont des exemples de ce rapport.

L'on connoît donc le rapport de chaque point *D*, *d* de la parabole *DAK*

FIG. 41. Fig. 41. avec les points C, c de la ligne droite ACc, par cette équation $yy = ax$, qui eſt la même dans tous les points D, d de la courbe, pourveu qu'on ſuppoſe les deux quantitez y, x variables; y qui repreſente ſucceſſivement toutes les appliquées CD, cd; x qui repreſente auſſi de ſuite toutes les coupées AC, Ac. Le rapport connu du point D de la courbe avec le point C de la droite conſiſte donc en ce que CD, y eſt moyenne proportionelle entre AC, x & $AB = a$, d'où il ſuit 17. 6. Eucl. que le quarré yy de CD eſt égal au rectangle ax ſous le parametre AB, a & l'abſciſſe AC, x. Il eſt évident par la nature de la parabole, que l'on aura le même rapport de chaque point d de la parabole avec chaque point c de l'axe; & que l'expreſſion de ce rapport ſera toûjours le même. L'operation qui montre exactement un ſemblable rapport entre les points d'une ligne courbe & ceux d'une ligne droite, eſt appellé par M. DESCARTES Geometrique; & celle qui ne le montre pas exactement, méchanique.

4. Les Anciens Geometres n'ont appellé geometrique, que ce qui ſe fait avec la Regle & le Compas; nulle autre operation n'étoit geometrique; de toutes les lignes, la droite & la circulaire étoient les ſeules geometriques. Toutes les autres lignes courbes, même les Sections coniques, paſſoient pour méchaniques, & toute operation, pour laquelle on les employoit, étoit auſſi appellée méchanique. Pappus s'explique ainſi ſur le Problême, qui cherche deux moyennes proportionelles entre deux lignes données, avant la 5. Prop. L. 3. de ſes Collections Mathematiques. * *Les Anciens Geometres n'ont jamais pû conſtruire geometriquement ce Problême, qui de ſa nature eſt ſolide, parcequ'il n'eſt pas aiſé de décrire les Sections Coniques ſur un plan.... Mais avoüant que le Problême étoit ſolide, ils ne l'ont conſtruit qu'avec des inſtrumens, conformément à Apollonius, qui l'a reſolu par les Sections coniques, d'autres l'ont conſtruit par les lieux ſolides d'Ariſtée, aucun par les lieux qu'on appelle proprement plans, Nicomedes l'a fait par la Conchoïde.* Il eſt certain que Pappus exclud les Sections coniques & la Conchoïde des lignes geometriques, puiſqu'il dit, que le Problême des deux moyennes proportionelles a été conſtruit par les Sections coniques & par la Conchoïde, ſans avoir été conſtruit geometriquement. Il eſt certain auſſi, que Pappus ne tient pour lignes Geometriques que la droite & la circulaire, puiſque pour prouver que ce Problême n'a pas été conſtruit geometriquement, il n'apporte d'autre raiſon, ſi ce n'eſt, que perſonne ne l'a conſtruit par les lieux qu'on appelle proprement plans, qui ſont la ligne droite & la circulaire.

Antiqui Geometræ Problema antedictum in duabus lineis rectis, quod naturâ ſolidum eſt, Geometricâ ratione invixi conſtruere non potuerunt, quoniam neque coni Sectiones facile eſt in plano deſignare.... Hi autem aſſerentes Problema ſolidum eſſe, ipſius conſtructionem inſtrumentis tantùm perfecerunt, congruenter Apollonio Pergæo, qui & reſolutionem ejus fecit per coni Sectiones; alii per locos ſolidos Ariſtæi: nullus autem per ea, quæ propriè plana appellantur. At Nicomedes & ratione illud facit per lineam Conchoidem.

5. Non ſeulement les Anciens Geometres, mais encore les nouveaux juſques à M. DESCARTES ont mis la même difference entre les operations

tions & les lignes Geometriques & Méchaniques ; comme on en peut juger par ces paroles, que Viete a mis à la tête de ſon Apollonius Gallus. * *Lorſque j'ai propoſé aux Mathematiciens le Probléme d'Apollonius, qui conſiſte à trouver un cercle, qui en touche trois autres donnez ; c'étoit afin qu'on le conſtruiſit geometriquement, & non pas mechaniquement. Ainſi lorſque vous conſtruiſez le Problême avec une hyperbole. Vous ne réuſſiſſez pas, car les hyperboles ne ſe décrivent pas d'une maniere démonſtrative en Geometrie. Menechmus a trouvé la duplication du cube par les Paraboles, Nicomedes par les Conchoïdes : eſt-ce que pour cela l'on a trouvé geometriquement la duplication du cube ? Archimedes a trouvé la quadrature du cercle par la Spirale, Dinoſtrate par la Quadratrice ; eſt-ce donc que l'on a trouvé la quadrature du cercle ? certainement aucun Geometre ne l'aſſurera ; Euclide & tous ſes Sectateurs ſe recrieroient.... D'ailleurs les Anciens ont toûjours craint de décrire les Sections coniques ſur un plan.*

* Problema Apollonii de deſcribendo circulo, quem tres dati contingant, clariſſimo Adriano, Geometricâ ratione conſtruendum propoſui φιλομαθέσι, non mechanicâ. Dum itaque circulum per hyperbolas tangis, rem acu non tangis. Neque enim hyperbola deſcribuntur in Geometricis Κατ' ἐπιστατικὸν λογόν. Duplicavit cubum per Parabolas Menechmus, per Conchoïdas Nicomedes : an igitur duplicatus eſt Geometricè cubus ? Quadravit circulum per volutam inordinatam Dinoſtratus, per ordinatam Archimedes ; an igitur Geometricè quadratus eſt circulus ? Id verò nemo pronuntiabit Geometra Reclamaverit Euclides & tota Euclideorum ſchola.... Et alioqui conicas Sectiones in plano deſcribere ſemper veriti ſunt Antiqui.

6. M. DESCARTES dit dans cette Section, que les Anciens n'ont pas entierement reçu les Sections coniques dans leur Geometrie. En effet d'un côté ils les ont reçu, puiſqu'ils en ont fait des traitez, comme Apollonius, qui paſſe pour un grand Geometre, & qu'ils ont parlé des lieux ſolides, qui ſont des Sections coniques. D'un autre côté auſſi ils ne les ont pas reçu entierement, parcequ'ils n'ont point cru exactes & geometriques ni leurs deſcriptions ſur un plan, ni les conſtructions de Problêmes, que l'on fait avec elles.

ARTICLE II.

Quelles lignes ſont appellées Geometriques ou Méchaniques.

1. LEs raiſons, pour leſquelles M. DESCARTES a mis les Sections coniques & une infinité d'autres courbes au nombre des lignes Geometriques, ont été trouvées ſi bonnes ; que l'on s'eſt depuis ce tems-là écarté avec lui du ſentiment de tous les Geometres, qui l'avoient precedé.

2. La premiere définition que M. DESCARTES apporte des lignes Geometriques & Méchaniques, ſe trouve dans cette Section en ces termes.

Il eſt, ce me ſemble, clair, que prenant, comme on fait, pour geometrique ce qui eſt précis & exact, & pour méchanique ce qui ne l'eſt pas, & conſiderant la Geometrie comme une ſcience, qui enſeigne generalement à connoître les meſures de tous les corps, on n'en doit pas plûtôt exclurre les lignes les plus compoſées, que les plus ſimples ; pourveu qu'on les puiſſe imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuivent, & dont les derniers ſont entierement

reglez par ceux qui les precedent : car par ce moyen on peut toûjours avoir une connoiſſance exacte de leur meſure. Les lignes mechaniques ſont celles qu'on imagine décrites par deux mouvemens ſeparez, & qui n'ont entr'eux aucun rapport, qu'on puiſſe meſurer exactement.

La ſeconde définition des lignes geometriques, qui eſt dans la Section 4. ſuivante, eſt celle-ci. *Je ne ſçache rien de meilleur que de dire, que tous les points de celles, qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt-à-dire, qui tombent ſous quelque meſure préciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même.*

L'on peut donc définir, ſuivant la penſée de M. DESCARTES, une ligne Geometrique, celle 1. que l'on peut concevoir décrite par un mouvement continu, ou par pluſieurs mouvemens, qui dépendent les uns des autres; 2. celle dont chaque point a avec une ligne droite un rapport, qui ſe peut exprimer exactement par une équation, laquelle ſera la même en chacun de ces points, comme on vient de l'expliquer, Art. 1. n. 3.

Une ligne Méchanique eſt celle, 1. que l'on peut concevoir décrite par deux mouvemens ſeparez, qui ne dépendent point l'un de l'autre; 2. dont chaque point n'a pas avec chaque point d'une ligne droite un rapport, qui ſe puiſſe exactement exprimer par une équation, laquelle ſoit la même en chacun de ſes points.

Il faut ſe ſouvenir, que par un rapport exact, l'on entend un rapport exactement connu, comme celui, qui eſt entre deux lignes droites connuës, & qui ne peut ſe trouver entre deux lignes courbes, ou entre une ligne droite & une courbe, à moins que l'on ne ſçache à quelle ligne droite une courbe eſt exactement égale.

* *Hiſt de l'Academie Royale des Sciences 1705.*

3. * *Depuis* M. DESCARTES, *on a fixé plus preciſément par la Geometrie des infinimens petits l'idée des courbes geometriques & mechaniques.* Expliquons, autant qu'il eſt neceſſaire à preſent, ce que l'on entend par Geometrie des infiniment petits. Soit *ADd* Fig. 41. une courbe, dont l'axe eſt *ACc*, ſur laquelle vous prenez la coupée *AC*, *x*; & au point *C* vous appliquez *CD*, *y*; menez *fg* parallele & infiniment proche de *CD*, & par le point *D* la ligne *Dh* parallele à *Cf*. Puiſque les lignes *CD*, *fg* ſont infiniment près l'une de l'autre, les lignes *Cf*, *Dh*, *Dg* ſont infiniment petites, & l'arc de courbe *Dg* peut être regardé comme une ligne droite à cauſe de ſon infinie petiteſſe. La petite ligne *Cf* ſera la difference de *AC*, *x*; car l'on appelle ici difference d'une grandeur variable *AC*, *x*, la portion infiniment petite *Cf*, dont on conçoit que cette grandeur variable augmente, ou diminuë infiniment peu, lorſqu'elle devient *Af*; & cette difference *Cf* de *x* s'exprime par *dx*, que l'on appelle expreſſion differentielle. De même la ligne infiniment petite *gh*, eſt la difference, dont la variable *CD*, *y* croit, ou décroit infiniment peu, lorſqu'elle devient *fg*;

Fig. 41.

& l'expreſſion differentielle de gh ſera dy. Et ſi l'on nomme AD, u ; la difference Dg ſera du, & Dg eſt regardée, comme un prolongement de LD tangente de la courbe en D. Maintenant à cauſe des paralleles LC, Dh les triangles rectilignes LCD, Dhg, ſont équiangles dans leſquels $LC = 2AC = 2x$, ſi la courbe eſt ſuppoſée une parabole, comme on l'a vû dans les traitez des Sections coniques. L'on peut donc faire cette Analogie LC, $2x : CD$, $y :: Dh = Cf$, $dx : hg$, dy, $ydx = 2xdy$, $y = \frac{2xdy}{dx}$. Equation differentielle, qui peut convenir, comme il eſt évident, à tous les points de la parabole ; auſſi bien que l'expreſſion Algebrique $yy = px$ leur convient.

Ce calcul qu'on appelle differentiel, pour le diſtinguer d'un autre, qui convient auſſi à la Geometrie des infiniment petits, & qu'on nomme calcul integral, s'applique à pluſieurs lignes méchaniques, à qui le calcul Algebrique ne peut convenir. Ainſi toute ſorte de courbes peut avoir une équation, qui exprime le rapport de chaque point de la courbe à chaque point d'une ligne droite, par une expreſſion, qui renferme ou les appliquées & les abſciſſes, ou les differences des appliquées & des abſciſſes.

4. La Geometrie des infiniment petits a donné lieu à ces nouvelles definitions. *Les courbes Geometriques ſont celles, dont on peut exprimer & déterminer la nature par le rapport des ordonnées & des abſciſſes, qui ſont les unes & les autres des grandeurs finies. Les Méchaniques ſont celles, dont on ne peut ainſi exprimer la nature, parceque les ordonnées & les abſciſſes n'ont point de rapport reglé. Dans la Geometrie des infiniment petits, la nature de toutes les courbes ſoit Geometriques ſoit Méchaniques peut également s'exprimer, par le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux differences correſpondantes. Toute la difference entre les courbes Geometriques & Méchaniques eſt, que les Méchaniques ne peuvent s'exprimer que par ce rapport, au lieu que les Geometriques peuvent auſſi s'exprimer par le rapport des ordonnées & des abſciſſes.* *Hiſtoire de l'Academie des Sciences 1704.*

Ainſi les lignes Geometriques ſont celles, dont 1° les deux coordonnées, ou les abſciſſes & les ordonnées correſpondantes AC, CD Fig. 41. ſont deux lignes droites finies, qui ſe rencontrent en un point C, où elles font un angle donné ACD ; 2° dont l'une des coordonnées AC, Ac commence toûjours à un point fixe A, & ſe prend ſur une ſeule ligne ACc ; & l'autre des coordonnées CD, cd eſt toûjours parallele à elle-même : 3° dont l'équation peut ne contenir, que deux inconnuës x, y, qui expriment les coordonnées, & n'avoir que des termes propres du calcul Algebrique $yy = ax$. 4° Et cette équation doit exprimer le rapport de chaque point de la courbe, dont elle eſt l'équation, à chaque point de la ligne droite, avec qui la courbe eſt comparée : de ſorte que cette équation ſoit la même pour chaque point de la courbe. Fig. 41.

Les lignes Méchaniques ſont celles, dont 1° les coordonnées qui entrent dans l'équation, ſont des grandeurs infiniment petites, ou dont l'une, ou

Fig. 41. toutes les deux peuvent être des arcs de courbes, ou dont ces coordonnées ne ſe rencontrent point & ne font point d'angle. 2° Dont les ordonnées y peuvent n'être pas paralleles entr'elles, & peuvent même partir toutes d'un ſeul point. 3° Dont l'équation ne peut pas être exprimée par des termes du ſeul calcul Algebrique, mais qui contient des termes tirez du calcul differentiel. 4° Et cette équation doit exprimer le rapport de tous les points de la courbe, dont elle eſt l'équation differentielle, à tous les points d'une autre ligne droite ou courbe; de ſorte que cette équation ſoit la même pour chaque point de la courbe.

5. L'on remarque auſſi que les lignes Geometriques ne ſont rencontrées par leur axe, qu'un nombre de fois déterminé; & que ce nombre n'excede jamais le nombre des racines de l'équation; de ſorte que ſi l'inconnuë monte au cube y^3, l'axe ne rencontrera la courbe pour le plus qu'en trois points; il peut auſſi la rencontrer en deux points, ou en un ſeulement, ou même ne la rencontrer du tout point. Au lieu qu'il y a des lignes Méchaniques tellement contournées, que leur axe les rencontre en une infinité de points; & comme chaque point, où l'axe rencontre une courbe, donne une nouvelle racine de l'équation de cette courbe; il faudroit que l'équation de certaines courbes méchaniques eût une infinité de racines.

La raiſon pourquoi une courbe peut être ainſi figurée, c'eſt que toute ligne courbe tant les Geometriques, que les Méchaniques, ou bien rentrent en elles-mêmes, comme le cercle & l'ellipſe, car pourſuivez à les décrire auſſi long-tems qu'il vous plaira, vous repaſſerez toûjours ſur la ligne courbe déja décrite: ou bien s'étendent à l'infini, comme la parabole & l'hyperbole, ſi l'on continuë toûjours à les décrire. Ainſi certaines lignes méchaniques s'étendent à l'infini de telle ſorte qu'elles rencontrent leur axe en une infinité de points, ou en le touchant, ou en le coupant.

Pour éclaircir tout ce qui a été expliqué dans cette Section, il reſte à parler de quelques lignes ſoit Geometriques, ſoit Méchaniques.

ARTICLE III.

De quelques lignes Geometriques & Méchaniques.

1. DE la Conchoïde. Les droites infinies AP, CB ſe coupent à angles droits au point B; ſur AP l'on détermine BA & BP; autour du point P, Fig. 43. qui s'appelle Pole, l'on fait tourner l'infinie PA, de ſorte qu'elle paſſe toûjours ſur CB, qui s'appelle Directrice ou Regle; & dans toutes les poſitions, que PA peut avoir, l'on coupe au deſſus & au deſſous de CB, les lignes CD, cd égales à BA; la courbe qui joindra les points D, D, eſt la Conchoïde ſuperieure, & celle qui joint les d, d, la Conchoïde inferieure. Nicomede en eſt l'inventeur, & il s'en eſt ſervi pour trouver deux moyennes proportionelles.

Digitized by Google

Pour avoir l'équation de la Conchoïde ſuperieure, du point quelconque D de la courbe abbaiſſez DF perpendiculaire ſur la directrice BC, & DG perpendiculaire ſur AP, $DG = FB$, $DF = GB$. Nommons $AB, a = CD$; BP, b; l'abſciſſe $BF, x = DG$; l'ordonnée $FD, y = BG$; $PG = PB + BG, b + y$. FIG. 43.

A cauſe des triangles équiangles PGD, CFD on a cette Analogie $PG, b + y : GD, x :: DF, y : FC, \frac{xy}{b+y}$. Dans le triangle rectangle DFC, $\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FC}^2$, $aa = yy + \frac{xxyy}{bb+2by+yy}$; $aabb + 2aaby + aayy = bbyy + 2by^3 + y^4 + xxyy$; $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = o$, équation de la Conchoïde ſuperieure.

La Conchoïde DAD eſt une ligne Geometrique, car 1° on la peut concevoir décrite par un mouvement continu, ſi l'on ſuppoſe que la ligne PA, ou PD paſſe toûjours par le centre C du cercle DKd, que ce centre gliſſe toûjours ſur la directrice BC, & que la continuelle interſection D marque une courbe DAD; 2° le rapport de chaque point D de la courbe à chaque point F de la droite BC s'exprime exactement par une équation, qui eſt la même en tous les points de la courbe. 3° La Conchoïde DAD a auſſi les conditions des lignes Geometriques marquées Art. 2. n. 4. Les abſciſſes x commencent en B, & ſe prennent ſur BC, en allant de B vers K; & les abſciſſes $-x$ de l'autre côté en allant vers c; les appliquées FD ſont toutes paralleles à BA. La directrice BC eſt l'axe; & B ſon ſommet.

L'on aura l'équation de la Conchoïde inferieure dad, ſi du point quelconque d l'on abaiſſe dg perpendiculaire ſur PA, & df perpendiculaire ſur BC, $Bg = df$, $dg = Bf$. Nommons $Cd = AB, a$; $Bf, x = dg$; $df, y = Bg$. $Pg = PB - Bg, b - y$.

A cauſe des triangles Pgd, dfC équiangles, $Pg, b - y : gd, x :: df, y : fC, \frac{xy}{b-y}$. Et dans le triangle rectangle dfC, $\overline{Cd}^2 = \overline{df}^2 + \overline{Cf}^2$, $aa = yy + \frac{xxyy}{bb-2by+yy}$; $aabb - 2aaby + aayy = bbyy - 2by^3 + y^4 + xxyy$; $y^4 - 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy + 2aaby - aabb = o$, équation de la Conchoïde inferieure, qui eſt une ligne Geometrique par les mêmes raiſons, qui prouvent, que la ſuperieure eſt Geometrique, puiſque l'interſection d du cercle avec la ligne PC décrit la courbe dad.

2. De la Ciſſoïde Fig. 44. le demi-cercle AFB étant donné avec la tangente infinie BG; du point A vous tirerez une infinité de lignes AG, Ag juſques à la tangente, qui couperont toutes la circonference du demi-cercle; coupez par tout $AD = FG$ priſe depuis la circonference juſqu'à la tangente, $Ad = fg$; joignez tous les points D, d par la courbe ADd; elle s'appelle Ciſſoïde, dont Diocles eſt l'inventeur. Si l'on donnoit l'autre demi-cercle, l'on décriroit l'autre partie AK. FIG. 44.

Pour avoir l'équation de la Ciſſoïde à un point quelconque D, du point D, tirez la perpendiculaire DC ſur AB, & du point F, où la ligne ADG coupe la circonference du cercle, la perpendiculaire FE auſſi ſur AB. Il

FIG. 44. faut d'abord démontrer que $CA = EB$, par la Prop. 10. 6. Eucl. la ligne AB eſt coupée comme AG: mais AG eſt tellement coupée que $AD = FG$: donc $AC = EB$.

Maintenant le diametre AB eſt l'axe de la Ciſſoïde, A ſon ſommet, les abſciſſes AC, AE ſe prennent ſur l'axe, les ordonnées CD, Ed ſont paralleles. Nommons l'axe AB, a; l'abſciſſe AC, $x = EB$; l'appliquée CD, y; $AE = AB - EB$, $a - x$. EF eſt moyenne proportionelle entre AE, $a - x$ & EB, x: donc $\overline{EF}^2 = AE \times EB$, $ax - xx$, & $EF = \sqrt{ax - xx}$.

Dans les triangles équiangles ACD, AEF, AC, x: CD, y:: AE, $a - x$: EF, $\sqrt{ax - xx}$; $x\sqrt{ax - xx} = ay - xy$; & quarrant les deux membres; $ax^3 - x^4 = aayy - 2axyy + xxyy$. Diviſons tout par $a - x$, nous ferons $x^3 = ayy - xyy$, équation à la Ciſſoïde. L'on trouvera la même équation à chaque d pris hors du cercle.

La Ciſſoïde paſſe par le point H milieu de la demi-circonference, car ayant tiré du centre c la ligne cH, qui eſt parallele à la baſe Bl du triangle ABl, parceque les angles en c & en B ſont droits: Nous aurons 2. 6. Eucl. Ac: cB:: AH: Hl. Mais $Ac = cB$: donc $AH = Hl$. Et le point H eſt à la Ciſſoïde.

La Ciſſoïde eſt une ligne Geometrique par les mêmes raiſons que l'on a dit pour la Conchoïde. En particulier, on peut concevoir qu'elle eſt produite, ainſi que Mr DESCARTES le demande, par des mouvemens, qui s'entreſuivent, & qui dépendent les uns des autres. Le demi-cercle AFB eſt arrêté ſur un plan; cH eſt une regle immobile arrêtée au centre c, & perpendiculaire au diametre AB; les regles AF, Bf roulent librement autour des Poles A, B extrêmitez du diametre; toutes ces Pieces ont une rainure ouverte. Un poinçon L paſſe dans les fentes des trois regles AF, Bf, cH. Cf eſt encore une regle ouverte comme le reſte, qui gliſſe ſur la regle AB, ſur laquelle elle eſt toûjours perpendiculaire, un autre poinçon f entre dans la regle CD, la regle Bf & la circonference AfB: ainſi le poinçon L coule toûjours dans la regle cH, & le poinçon f dans la circonference du demi-cercle. Maintenant pouſſez Cf de A vers B, elle fera avancer le poinçon f dans la circonference AfB, & ce poinçon élevera la regle Bf; laquelle fera mouvoir le poinçon L dans la regle cH, & ce poinçon L menera avec ſoi & élevera la regle AF. L'interſection continuelle des regles Cf, AF décrira la courbe ADd, qui eſt la Ciſſoïde.

Dém. Au point quelconque D. Du point F abaiſſez la perpendiculaire FE ſur le diametre AB. Les triangles AcL, BcL ſont égaux, 4. 1. Eucl. Donc les angles $cAL = BAF$, & $cBL = ABf$ ſont égaux; comme auſſi 26. 3. Eucl. les arcs Af, BF: donc les abſciſſes AC, BE ſeront encore égales. Nommez le diametre AB, a; AC, $x = EB$; CD, y; AE, $= AB - BE$, $a - x$; & 13. 6. Eucl. $\overline{EF}^2 = AE \times EB = ax - xx$, & $EF = \sqrt{ax - xx}$.

Enſuite les perpendiculaires CD, EF ſont paralleles, & les triangles équiangles ACD, AEF donnent cette Analogie, $AC, x : CD, y :: AE, a - x : EF, \sqrt{ax - xx}$: d'où l'on tirera comme un peu auparavant $x^3 = ayy - xyy$ équation à la Ciſſoïde. Ce qu'il falloit démontrer.

3. De la ſpirale. Après avoir diviſé le cercle $ABCD$ Fig. 45. & ſon rayon aA en autant de parties égales, comme ici en douze; ſi l'on ſuppoſe que pendant que le rayon aA parcourt des parties égales de la circonference en tems égaux, allant de A par B en C, D, A; le point a du centre parcourt auſſi en tems égaux des parties égales du rayon allant de a vers A: de ſorte que quand le point A du rayon ſera revenu en A d'où il eſt parti, le point a du rayon ſe trouve auſſi en A. Dans ce double mouvement le point a décrira la ſpirale $abcdA$, qui s'appelle la premiere ſpirale d'Archimede. La ſeconde ſpirale $AghiF$ ſera décrite, ſi l'on ſuppoſe de même, que le point a après être arrivé en A continuë de parcourir la partie $AF = aA$ du rayon prolongé, tandis que le nouveau rayon aF parcourt la circonference concentrique du ſecond cercle $FGHI$, toûjours parties égales en tems égaux. Et comme le rayon aF peut être prolongé à l'infini, l'on pourra décrire une infinité de ſpirales, que l'on conſiderera comme une ſeule continuée. FIG. 45.

On aura l'équation de la premiere ſpirale au point quelconque c, ſi l'on nomme la circonference du premier cercle donné $ABCDA$, a; & le rayon donné aA, b; & que l'on prenne l'axe indeterminé ABC, x pour une abſciſſe; & la droite correſpondante ac, y pour une ordonnée $= a6$, parceque le rayon aA étant arrivé en aC, le point 6 tombe ſur le point c. Maintenant il eſt évident, que comme toute la circonference a du cercle parcouruë en une minute par exemple, eſt à l'arc ABC, x parcouru en une demie-minute: de même le rayon b auſſi parcouru en une minute eſt à la partie $a6 = ac$, y parcouruë en une demie-minute. Donc $ay = bx$; $y = \frac{bx}{a}$. L'on trouvera la même équation pour toute autre ſpirale $Aghi$, en nommant la circonference de ſon cercle $FGHI$, a; la droite AF, b; un arc quelconque FG du cercle, x; & la portion correſpondante An du rayon $= Bg$, y.

La ſpirale eſt une ligne méchanique, parceque ſes abſciſſes x ſont des arcs de cercle; ſes ordonnées ab, ac, ad partent toutes d'un ſeul point, & ne ſont pas par conſequent paralleles; les coordonnées ABC, ac ne ſe coupent point, & ne font pas un angle. Afin que le rapport des abſciſſes & des appliquées fût connu geometriquement, il faudroit connoître exactement le rapport des arcs de cercle à des lignes droites, de la circonference au rayon; c'eſt-à-dire, qu'il faudroit avoir trouvé la rectification de la circonference. Si l'on conſidere les ſpirales, que l'on peut faire à l'infini, en prolongeant aF, comme une ſeule ſpirale, la même ligne aAF, qui eſt comme l'axe, la rencontrera en une infinité de points.

FIG. 46. 4. De la Quadratrice. Etant donné le quart de cercle $ABCD$ Fig. 46. avec la tangente AH. L'on fait tourner le rayon AB autour du centre B, & il parcourt en tems égaux parties égales de la circonference ADC; tandis que la droite AH descend le long du rayon AB, toûjours parallele à elle-même, & parcourant aussi en tems égaux parties égales du rayon : de sorte que le quart du rayon & le quart de l'arc ADC soient parcourus en même tems, la moitié du rayon & la moitié de l'arc ADC aussi en même tems, &c. & que le rayon AB & la droite AH tombent en même tems sur BC. L'intersection continuelle E, e de la ligne AH avec le rayon décrira la courbe AEF, dont l'inventeur est Diocles, & qu'on a nommé Quadratrice, parcequ'on s'en est servi pour la quadrature du cercle.

Nous aurons l'équation de la quadratrice, en nommant le quart ADC de la circonference du cercle, a; le rayon AB, b; car ces deux quantitez sont données; les abscisses AG, Ag, x; les arcs correspondans du quart de cercle AD, Ad, y. Et l'on aura cette Analogie, comme la circonference ADC, a parcouruë en une minute, au rayon AB, b aussi parcouru en une minute : de même l'arc AD, y parcouru en un quart de minute est à la ligne AG, x aussi parcouruë en un quart de minute; $by = ax$, $y = \frac{ax}{b}$.

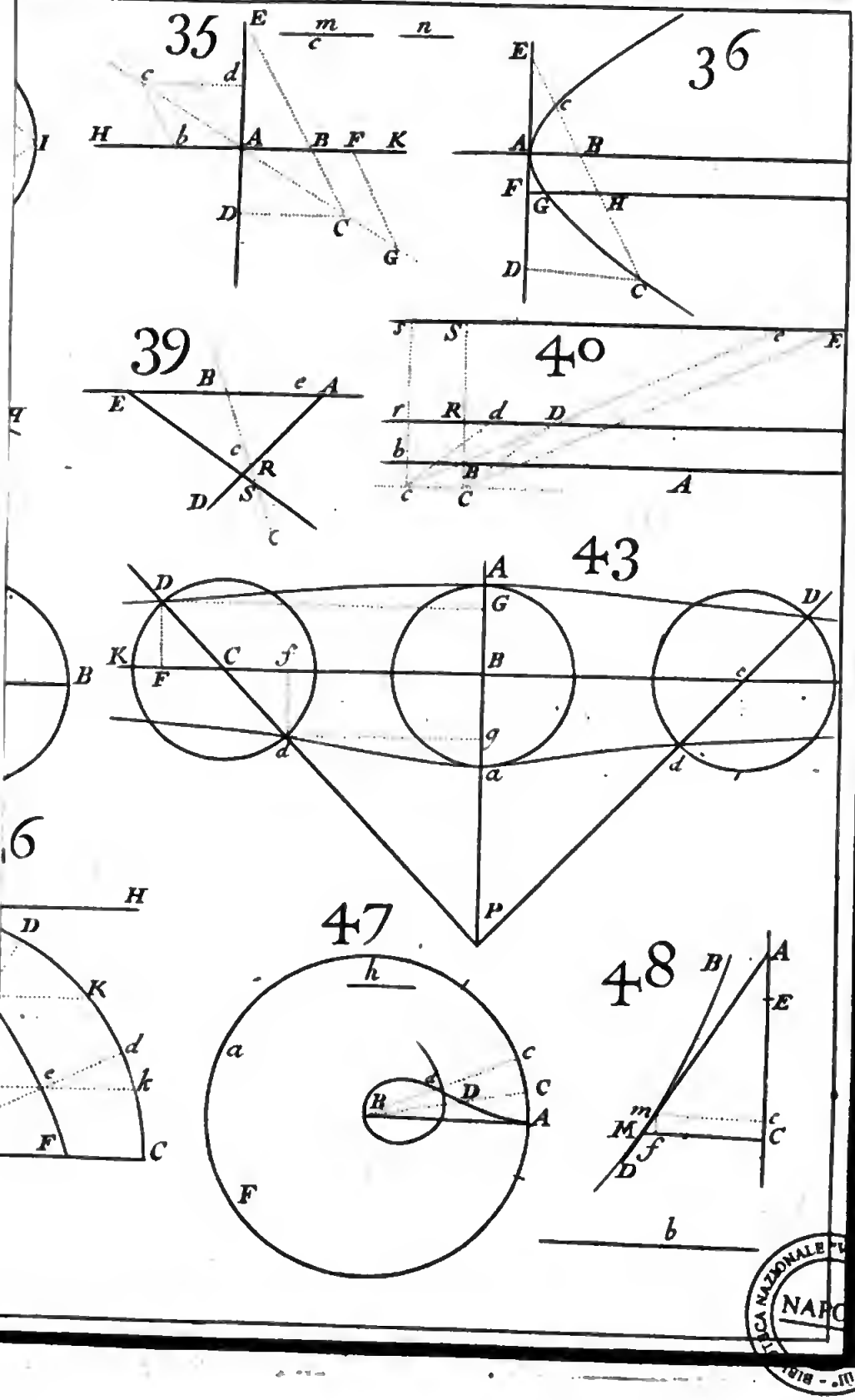
La Quadratrice est une ligne méchanique; parceque les arcs AD, Ad tiennent lieu d'appliquées; que les abscisses & les appliquées ne se rencontrent qu'au point A; & que pour avoir le rapport exact des x & des y, il faudroit connoître exactement le rapport des arcs de cercle avec des lignes droites.

L'on pourroit prendre les AG, Ag, x pour abscisses; les GE, Ge, z pour appliquées; & nommer les EK, ek, v; puisque le rayon AB est b, tout le diametre du cercle est $2b$; ainsi comme on l'a dit souvent en parlant du cercle $\overline{GK}^2$, $\overline{gk}^2$ est 13. 6. Eucl. $2bx - xx$, & GE, $z = GK - EK$, $\sqrt{2bx - xx} - v$; l'on a donc à chaque point E de la quadratrice l'équation $z = -v + \sqrt{2bx - xx}$, mais il y a trois inconnuës, & deux arbitraires, avec lesquelles je ne puis pas certainement décrire la quadratrice; car ayant déterminé AG, x; il ne m'est plus permis de faire EH, v de la grandeur qu'il me plaît, mais elle doit être d'une certaine grandeur, comme on le voit par la description de la quadratrice.

FIG. 47. 5. La courbe ADd Fig. 47. se décrit de cette maniere. Du point B comme centre l'on décrit un cercle $ACaF$, sur lequel on prend un point fixe A; l'on tire les rayons BC, Be; l'on fait les CD, cd moyennes proportionelles entre les arcs AC, Ac correspondans, & une droite donnée b; l'on joint les points D, d, d, & la courbe ADd est décrite.

L'on aura son équation, en nommant les rayons BC, Be, a; les arcs AC, Ac, x; qui seront les abscisses; les appliquées BD, Bd, y; les

DC,



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

DC, dc ſeront $BC - BD$, $Bc - Bd$, $a - y$. Maintenant par la conſtruction, $\overline{DC}^2 = AC \times b$, $aa - 2ay + yy = bx$, $a - y = \sqrt{bx}$, $y = a - \sqrt{bx}$.

De plus parceque après que les AC, Ac ont une fois parcouru toute la circonference, l'on peut continuer à les prendre, en regardant le point A comme leur origine, de ſorte que les abſciſſes ſoient toute la circonference $+ AC$, & enſuite deux fois toute la circonference $+ AC$, & ainſi à l'infini, il ſuit que la courbe ADd fait pluſieurs tours & ſe coupe en differens points.

Cette courbe eſt méchanique, parceque ſes abſciſſes ſont des arcs, ſes ordonnées partent d'un même point B, & ne ſont point paralleles entr'elles, & ne ſont aucun angle avec les abſciſſes correſpondantes, qu'elles ne rencontrent pas. Elle coupe auſſi ſon axe AB en pluſieurs points.

6. BMm Fig. 48. eſt une courbe, dont AC eſt l'axe, CM une appliquée, AD la tangente, AC la ſoûtangente. L'on appelle ſoûtangente d'une courbe la partie AC du diametre priſe depuis le point C, où l'ordonnée CM, qui vient du Contact M, coupe le diametre, juſqu'au point A, où la tangente MA, qui touche au point M, coupe le même diametre. Une proprieté de cette courbe; c'eſt que la ſoûtangente eſt toûjours égale à une ligne donnée b. Menez cm infiniment proche & parallele à CM, & mf parallele & égale à Cc. Les droites $Cc = mf$, Mf, & l'arc Mm ſont infiniment petits. FIG. 48.

L'on nomme CM, y; Mf, dy, c'eſt-à-dire difference de y, parceque c'eſt la difference infiniment petite, dont CM, y differe de cm, y. Et prenant E pour l'origine des x; on aura Ec, x; Cc, dx, c'eſt à dire difference de x, parceque c'eſt la difference infiniment petite dont EC, x differe de Ec, x.

L'arc Mm, parcequ'il eſt infiniment petit, peut paſſer pour une ligne droite: ainſi dans les triangles équiangles ACM, Mfm, $AC, b : CM, y :: mf, dx : fM, dy$; $y = \frac{b\,dx}{dx}$ équation differentielle de la courbe BM, laquelle ſe nomme la Logarithmique. Elle eſt méchanique, parceque le rapport d'un de ſes points quelconque M avec le point C correſpondant de l'axe ne peut s'exprimer, que par une équation, où il entre des termes tirez du calcul differentiel.

Digitized by Google

SECTION III.

De l'inſtrument inventé pour trouver pluſieurs moyennes proportionelles. Et des courbes qui ſe décrivent avec cet inſtrument.

M. DESCARTES.

VOyez Fig. 49. les lignes AB, AD, AF & ſemblables que je ſuppoſe avoir été décrites par l'aide de l'inſtrument XYZ, qui eſt compoſé de pluſieurs regles tellement jointes, que celle, qui eſt marquée YZ étant arrêtée ſur la ligne AN, on peut ouvrir & fermer l'angle XYZ; & que lorſqu'il eſt tout fermé, les points B, C, D, F, G, H ſont tous aſſemblez au point A; mais qu'à meſure qu'on l'ouvre, la regle qui eſt jointe à angles droits avec XY au point B pouſſe vers Z la regle CD, qui coule ſur YZ en faiſant toûjours des angles droits avec elle, & CD pouſſe DE, qui coule tout de même ſur YX en demeurant parallele à BC, DE pouſſe EF, EF pouſſe FG, celle-ci pouſſe GH. Et on en peut concevoir une infinité d'autres, qui ſe pouſſent conſecutivement en même façon, & dont les unes faſſent toûjours les mêmes angles avec YX, & les autres avec YZ. Or pendant qu'on ouvre ainſi l'angle XYZ, le point B décrit la ligne AB, qui eſt un cercle, & les autres points D, F, H, où ſe font les interſections des autres Regles décrivent d'autres lignes courbes AD, AF, AH, dont les dernieres ſont par ordre plus compoſées que la premiere, & celle-ci plus que le cercle. Mais je ne vois pas, ce qui peut empêcher, qu'on ne conçoive auſſi nettement, & auſſi diſtinctement la deſcription de cette premiere que du cercle, ou du moins que des Sections coniques; ni ce qui peut empêcher, qu'on ne conçoive la ſeconde, & la troiſiéme & toutes les autres, qu'on peut décrire, auſſi-bien que la premiere, ni par conſequent qu'on ne les reçoive toutes en même façon pour ſervir aux ſpeculations de Geometrie.

FIG. 49.

La conſtruction de cet inſtrument eſt aiſée à comprendre, comme auſſi le mouvement de toutes ces regles, ſi l'on fait reflexion, que la premiere

BC eſt arrêtée ferme au point *B*, que l'on prend tel, que nous dirons, L. 3. Part. 1. Sect. 1. où nous parlerons encore de la conſtruction & de l'uſage de cet inſtrument. Nous nous contenterons de prouver ici, que les courbes *AD*, *AF*, *AH*, &c. que l'on conçoit décrites par des poinçons appliquez, tandis que les regles ſe meuvent, aux points *D*, *F*, *H*, où la regle *YX* eſt ſucceſſivement coupée par les regles *CD*, *EF*, *GH*; que ces courbes, dis-je, ſont Geometriques, & que les dernieres ſont plus compoſées, que les precedentes, c'eſt-à-dire, qu'une des inconnuës monte à un degré plus élevé. Les Figures 49. 50. 51. 52. ſerviront au Livre 3. Ici ce ſera la Figure 51. qui n'eſt compoſée que de ſimples lignes, qu'il faut conſiderer.

1. L'équation de la courbe *AD* ſe trouvera ainſi. Nommons la donnée *YA* = *YB*, *a*; les inconnuës *YC*, *x*; *CD*, *y*; *YD*, *z*. Les triangles *YCD*, *YBC* 8. 6. Eucl. ſont ſemblables: donc *YD*, *z*: *YC*, *x*:: *YC*, *x*: *YB*, *a*. $z = \frac{xx}{a} = YD$. Et dans le triangle rectangle *YCD*, $\overline{YD}^2 = \overline{YC}^2 + \overline{CD}^2$, $\frac{x^4}{aa} = xx + yy$; $x^4 = aaxx + aayy$. Fig. 51.

2. L'équation de la courbe *AF* ſe trouvera de cette façon. Nommons *YA* = *YB*, *a*; *YE*, *x*; *EF*, *y*; *YF*, *z*. Par la 8. 6. Eucl. les triangles *YBC*, *YCD* ſont ſemblables, comme auſſi les triangles *YCD*, *YDE*; & les triangles *YDE*, *YEF*. Donc *YF*, *z*: *YE*, *x*:: *YE*, *x*: *YD*, $\frac{xx}{z}$ dans les triangles *YEF*, *YDE*. & *YE*, *x*: *YD*, $\frac{xx}{z}$:: *YD* $\frac{xx}{z}$: *YC*, $\frac{x^3}{zz}$ dans les triangles *YED*, *YCD*. & *YD*, $\frac{xx}{z}$: *YC*, $\frac{x^3}{zz}$:: *YC*, $\frac{x^3}{zz}$: *YB*, *a*, dans les triangles *YCD*, *YBC*. Donc $\frac{axx}{z} = \frac{x^6}{z^3}$. $z = \sqrt[3]{\frac{x^6}{a}} = YF$. Maintenant dans le triangle rectangle *YEF*, $\overline{YF}^2 = \overline{YE}^2 + \overline{EF}^2$, $\sqrt[3]{\frac{x^8}{aa}} = xx + yy$, & après avoir cubé les deux membres de l'équation, on trouvera $x^8 = aax^6 + 3aax^4yy + 3aaxxy^4 + aay^6$.

3. L'équation de la courbe *AH* ſe trouvera d'une ſemblable maniere. Car les triangles *YGH*, *YFG* ſont ſemblables, comme auſſi les triangles *YFG*, *YEF*, & ainſi des autres, comme n. 2. Donc nommant *YA* = *YB*, *a*; *YG*, *x*; *GH*, *y*; *YH*, *z*; tous ces triangles ſemblables donneront ces Analogies. *YH*, *z*: *YG*, *x*:: *YG*, *x*: *YF*, $\frac{xx}{z}$ dans les triangles *YGH*, *YFG*; & *YG*, *x*: *YF*, $\frac{xx}{z}$:: *YF*, $\frac{xx}{z}$: *YE*, $\frac{x^3}{zz}$ dans les triangles *YFG*, *YEF*; & *YF*, $\frac{xx}{z}$: *YE*, $\frac{x^3}{zz}$:: *YE*, $\frac{x^3}{xz}$: *YD*, $\frac{x^4}{z^3}$ dans les triangles *YEF*, *YED*; & *YE*, $\frac{x^3}{zz}$: *YD*, $\frac{x^4}{z^3}$:: *YD*, $\frac{x^4}{z^3}$: *YC*, $\frac{x^5}{z^4}$ dans les triangles *YED*; *YDC*; & *YD*, $\frac{x^4}{z^3}$: *YC*, $\frac{x^5}{z^4}$:: *YC*, $\frac{x^5}{z^4}$: *YB*, *a*, dans les triangles *YCD*; *YBC*. Ce qui donne $z = \sqrt[3]{\frac{x^6}{a}} = YH$. Maintenant dans le triangle rectangle *YGH*, $\overline{YH}^2 = \overline{YG}^2 + \overline{GH}^2$, $zz = \sqrt[3]{\frac{x^{12}}{aa}} = xx + yy$, & après avoir élevé les deux membres à la cinquiéme puiſſance, on trouvera $x^{12} - aax^{10} - 5aayyx^8 - 10aay^4x^6 - 10aay^6x^4 - 5aay^8xx - aay^{10} = 0$.

Fig. 51. Les courbes AK, AM, &c. croiſſent de quatre en quatre degrez, & ſont plus compoſées les unes que les autres ; elles ſont toutes geometriques, parce qu'on peut les concevoir décrites par des mouvemens, qui dépendent les uns des autres ; parceque chacun de leurs points a un rapport à la droite YZ, & que ce rapport peut s'exprimer exactement par une équation, qui eſt la même en chacun de ces points, parceque leurs coordonnées ſont des lignes droites finies, qui font un angle, & dont l'une a un point fixe pour origine & s'étend ſur une ligne droite, l'autre eſt toûjours parallele à elle-même ; parcequ'enfin leur équation ne renferme que deux inconnuës, & que des expreſſions du calcul Algebrique.

Toutes ces courbes n'ont pas ſeulement la portion AD, AF, AH, &c. qui ſont décrites Fig. 49. 50. 51. 52. mais elles en ont encore une autre toute ſemblable de l'autre côté, comme Ad Fig. 51. Et cette ſeconde portion ſe décrira de la même maniere que la premiere, ſi l'on renverſe l'inſtrument, de ſorte que la regle YZ demeurant ferme ſur la ligne AN, la regle YB ſoit en Yb, qu'au point b on arrête ferme la regle BC, que les regles ſe chaſſent les unes les autres, tandis que l'on ouvre l'inſtrument, & que des poinçons s'appliquent aux points D, F, H, &c.

SECTION IV.

De la diviſion des lignes courbes en certains genres, de leur ſimplicité, & de leur deſcription.

M. DESCARTES.

La façon de diſtinguer les lignes courbes en certains genres, & de connoître le rapport qu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites.

JE pourrois ici mettre pluſieurs autres moyens pour tracer & concevoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus compoſées par degrez à l'infini. Mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres, je ne ſçache rien de meilleur, que de dire, que tous les points de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt-à-dire, qui tombent ſous quelque meſure préciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimé par quelque équation, en tous par une même.

Et que lorſque cette équation ne monte que juſques au rectangle de deux quantitez indeterminées, ou bien au quarré d'une même, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il

n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipſe, qui ſoient compriſes. Mais que lorſque l'équation monte juſqu'à la trois ou quatriéme dimenſion des deux, ou de l'une des deux quantitez indeterminées, car il en faut deux, pour expliquer ici le rapport d'un point à un autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'équation monte juſques à la cinq ou ſixiéme dimenſion, elle eſt du troiſiéme; & ainſi des autres à l'infini.

Comme ſi je veux ſavoir de quel genre eſt la ligne *EC* que j'imagine être décrite par l'interſection de la regle *GL*, & du plan rectiligne *CNKL*, dont le côté *KN* eſt indefiniment prolongé vers *C*, & qui étant mû ſur le plan de deſſous en ligne droite, c'eſt-à-dire en telle ſorte que ſon diametre *KL* ſe trouve toûjours appliqué ſur quelque endroit de la ligne *BA* prolongée de part & d'autre, fait mouvoir circulairement cette regle *GL* autour du point *G*, à cauſe qu'elle lui eſt tellement jointe qu'elle paſſe toûjours par le point *L*. Je choiſis une ligne droite comme *AB*, pour rapporter à ſes divers points tous ceux de cette ligne courbe *EC*; & en cette ligne *AB* je choiſis un point, comme *A*, pour commencer par lui le calcul. Je dis que je choiſis & l'un & l'autre, à cauſe qu'il eſt libre de les prendre tels qu'on veut. Car encore qu'il y ait beaucoup de choix, pour rendre l'équation plus courte & plus aiſée; toutesfois en quelle façon qu'on les prenne, on peut toûjours faire, que la ligne paroiſſe de même genre, ainſi qu'il eſt aiſé à démontrer. Fig. 53. Fig. 53.

Après cela prenant un point à diſcretion dans la courbe, comme *C*, ſur lequel je ſuppoſe, que l'inſtrument, qui ſert à la décrire, eſt appliqué, je tire de ce point *C* la ligne *CB* parallele à *GA*, & pource que *CB* & *AB* ſont deux quantitez indeterminées & inconnuës, je les nomme l'une y, l'autre x. Mais afin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je conſidere auſſi les quantitez connuës, qui déterminent la deſcription de cette ligne courbe, comme *GA*, que je nomme a, *KL* que je nomme b, & *NL* parallele à *GA* que je nomme c. Puis je dis comme *NL* eſt à *LK*, ou c à b, ainſi *CB*, ou y, eſt à *BK*, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & *BL* eſt $\frac{b}{c}y - b$, & *AL*

eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. De plus comme CB eſt à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$. ainſi a ou GA eſt à LA ou $x + \frac{b}{c}y - b$. De façon que multipliant la ſeconde par la troiſiéme, on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere ; & ainſi l'équation qu'il falloit trouver eſt $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$. De laquelle on connoît, que la ligne EC eſt du premier genre, comme en effet elle n'eſt qu'une Hyperbole.

Que ſi en l'inſtrument qui ſert à la décrire on fait qu'au lieu de la ligne droite CNK, ce ſoit cette Hyperbole, ou quelqu'autre ligne courbe du premier genre, qui termine le plan $CNKL$; l'interſection de cette ligne & de la regle GL décrira au lieu de l'hyperbole EC, une autre ligne courbe, qui ſera du ſecond genre. Comme ſi CNK eſt un cercle, dont L ſoit le centre, on décrira la premiere Conchoïde des Anciens ; & ſi c'eſt une Parabole, dont le diametre ſoit KB, on décrira la ligne courbe, que j'ai * tantôt dit être la premiere, & la plus ſimple pour la queſtion de Pappus, lorſqu'il n'y a que cinq lignes droites données par poſition. Mais ſi au lieu d'une de ces lignes courbes du premier genre, c'en eſt une du ſecond, qui termine le plan $CNKL$, on en décrira par ſon moyen une du troiſiéme, ou ſi c'en eſt une du troiſiéme, on en décrira une du quatriéme, & ainſi à l'infini, comme il eſt fort aiſé à connoître par le calcul. Et en quelqu'autre façon qu'on imagine la deſcription d'une ligne courbe, pourveu qu'elle ſoit du nombre de celles, que je nomme Geometriques, on pourra toûjours trouver une équation pour déterminer tous ſes points en cette ſorte.

Liv. 1. Part. 3. Sect. 2.

Au reſte je mets les lignes courbes, qui font monter cette équation juſqu'au quarré de quarré, au même genre que celles, qui ne la font monter que juſques au cube ; & celles donr l'équation monte au quarré de cube, au même genre que celles dont elle ne monte qu'au ſurſolide & ainſi des autres. Dont la raiſon eſt, qu'il y a regle generale pour reduire au cube toutes les difficultez, qui vont au quarré de quarré, & au ſurſolide toutes celles qui vont au quarré de cube, de façon qu'on ne les doit point eſtimer plus compoſées.

Mais il eſt à remarquer qu'entre les lignes de chaque genre,

encore que la plûpart ſoient également compoſées, en ſorte qu'elles peuvent ſervir à déterminer les mêmes points, & conſtruire les mêmes Problêmes, il y en a toutesfois auſſi quelques-unes, qui ſont plus ſimples, & qui n'ont pas tant d'étenduë en leur puiſſance. Comme entre celles du premier genre, outre l'Ellipſe, l'Hyperbole & la Parabole, qui ſont également compoſées, le cercle y eſt auſſi compris, qui manifeſtement eſt plus ſimple. Et entre celles du ſecond genre, il y a la Conchoïde vulgaire, qui a ſon origine du cercle, & il y en a encore quelques autres, qui bien qu'elles n'ayent pas tant d'étenduë que la plûpart de celles du même genre, ne peuvent toutesfois être miſes dans le premier.

Cette Section demande que l'on traite 1. de la diviſion des lignes courbes en certains genres. 2. De la ſimplicité plus ou moins grande des courbes. 3. Des differentes manieres de les décrire.

ARTICLE I.

De la Diviſion des lignes courbes en certains genres.

1. VOus trouvez ici deux manieres de diſtinguer les differens genres des lignes courbes.

La premiere par les dimenſions que les inconnuës ont dans l'équation de la courbe. Lorſque l'équation d'une courbe ne monte que juſques au rectangle xy des deux inconnuës, ou juſqu'au quarré xx, yy, de l'une de ces inconnuës ou de toutes les deux, ou bien lorſque l'équation contient ce rectangle & ces quarrez; la courbe eſt du premier & du plus ſimple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la Parabole, l'Ellipſe & l'Hyperbole qui ſoient compriſes. Lorſque l'équation monte à la troiſieme, ou quatriéme dimenſion des deux inconnuës jointes enſemble xyy, xxy; x^3y, $xxyy$, xy^3; ou ſeparées x^3, y^3; x^4, y^4; quand même il ne s'y trouveroit qu'une ſeule de ces expreſſions: la courbe eſt du ſecond genre. Lorſque l'équation monte à la cinquiéme ou ſixiéme dimenſion des deux inconnuës jointes enſemble xy^4, xxy^3, x^3yy, x^4y; xy^5, xxy^4, x^3y^3, x^4yy, x^5y; ou ſeparées x^5, y^5; x^6, y^6; quand même il ne s'y trouveroit qu'une ſeule de ces expreſſions, la courbe eſt du troiſiéme genre.

Et ainſi à l'infini en prenant deux dimenſions, qui ſe ſuivent, pour chaque genre.

Deux courbes ſeront de differens genres, ſi les inconnuës de leur équation ne montent ni à la ſeconde dimenſion, ni à la troiſiéme ou quatriéme, ni à la cinquiéme ou ſixiéme, &c. dans chacune des deux équations.

La ſeconde maniere de diſtinguer les differens genres des courbes, que M. DESCARTES apporte pour raiſon de la premiere maniere eſt tirée de la reſolution des équations de ces courbes. Lorſqu'il y a regle generale pour reduire à un degré toutes les difficultez des équations d'un autre degré, les courbes, dont les équations montent à un de ces degrez, ſont de même genre. M. DESCARTES dans ſon troiſiéme Livre donne une methode, * pour reduire les équations du quatriéme degré à une équation du troiſiéme, ** les équations du cinquiéme à une équation du ſixiéme, *** & il aſſure que l'on n'a qu'à ſuivre la même voye pour reſoudre tous les Problêmes à l'infini. Les courbes dont les équations ſont du troiſiéme & quatriéme degré, ſont donc renfermées dans un ſeul degré, qui eſt le premier. Celles dont les équations ſont du cinquiéme & du ſixiéme, dans un ſeul, qui eſt le ſecond; & ainſi de ſuite en comprenant deux dimenſions, ou deux degrez d'équations, pour chaque degré de courbes.

* *Liv.* 3. *Part.* 4. *Sect.* 3. §. 9.
** *L.* 3. *Part.* 5. *Sect.* 1.
*** *L.* 3. *Part.* 5. *Sect.* 5.

Deux courbes ſeront de different genre, lorſqu'il n'y aura pas regle generale, lorſque leurs équations montant chacune à different degré, il n'y aura pas une methode pour reduire les difficultez d'un degré à l'autre.

2. L'on peut encore diviſer les lignes par rapport aux degrez & dimenſions, où les inconnuës de leur équation montent. Les lignes dans l'équation deſquelles les inconnuës n'ont qu'une dimenſion, & ne ſe multiplient point, ſont des lignes du premier degré, dans lequel il n'y a que la ligne droite, dont l'équation eſt $y = \frac{bx}{a}$, ou $y = a$. Les lignes dans l'équation deſquelles les inconnuës, ou l'une des inconnuës montent à la ſeconde dimenſion, yy, xx, xy, ſont des lignes du ſecond degré, qui comprend la parabole, le cercle, l'ellipſe, & l'hyperbole. Les lignes dans l'équation deſquelles une des inconnuës, ou toutes les deux ont trois dimenſions y^3, yyx, yxx, x^3, ſont des lignes du troiſiéme degré. Et ainſi de ſuite à l'infini.

3. Il faut donc mettre bien de la difference entre les degrez & les genres des lignes. La ligne droite eſt du premier degré, & n'eſt dans aucun genre: les lignes courbes du ſecond degré ſont du premier genre; les courbes du troiſiéme & du quatriéme degré ſont du ſecond genre; les lignes courbes du cinquiéme & du ſixiéme degré ſont du troiſiéme genre; & ainſi de ſuite en mettant deux degrez pour chaque genre.

ARTICLE II.

Quelles Lignes ſont les plus ſimples.

1. OUtre ce que M. DESCARTES a mis ſur la fin de cette Section touchant les lignes courbes les plus ſimples, il en parle encore, Liv. 3. Part. 1. *Et même il eſt à remarquer*, dit-il, *que par les plus ſimples lignes on ne doit pas ſeulement entendre celles, qui peuvent être le plus aiſément décrites, ni*

ni celles qui rendent la conſtruction ou la démonſtration du Problême plus facile ; mais principalement celles, qui ſont du plus ſimple genre, qui puiſſe ſervir à déterminer la quantité, qui eſt cherchée.

2. Il ſeroit naturel de croire, qu'une ligne eſt plus ſimple qu'une autre ; lorſqu'elle ſe décrit d'une maniere plus ſimple qu'elle : parceque la plus ſimple des lignes, qui eſt la droite, ſe décrit auſſi de la façon la plus ſimple le long d'une regle ; & qu'après la ligne droite, la circulaire, qu'on décrit ſi ſimplement avec le compas, paſſe pour la plus ſimple.

M. DESCARTES veut bien qu'on appelle ligne plus ſimple, celle qui ſe décrit le plus aiſément ; il veut bien auſſi qu'on appelle ligne plus ſimple, celle qui fournit une conſtruction & une démonſtration plus facile d'un Problême : mais il veut qu'on appelle principalement ligne plus ſimple, celle qui eſt du plus ſimple genre. Excepté le cercle, qui à cauſe de ſa deſcription très ſimple paſſe pour la plus ſimple des quatre courbes du premier genre : les Geometres ne croyent pas aujourdhui, qu'une ligne courbe qui ſe décrit plus aiſément, ou qui donne une conſtruction & une démonſtration plus facile, doive pour ces raiſons être regardée comme plus ſimple, le cercle étant toûjours excepté.

3. Où l'on compare enſemble des courbes de differens genres, ou l'on compare des courbes du même genre. S'il s'agit de courbes de differens genres, ſoit qu'on les conſidere ſans aucun rapport au même Problême qu'elles peuvent reſoudre, ſoit qu'on les conſidere par rapport à ce même Problême ; la ligne la plus ſimple eſt celle, qui eſt d'un genre plus ſimple : ainſi les courbes du premier genre ſont plus ſimples que celles du ſecond, celles du ſecond plus ſimples que celles du troiſiéme, & ainſi de ſuite. Nicomedes a reſolu le fameux Problême, par lequel on cherche deux moyennes proportionelles entre deux lignes données, en ſe ſervant de la Conchoïde, qui eſt du quatriéme degré & du ſecond genre, comme on a dit Sect. 2. Art. 3. n. 1. M. DESCARTES a donné la ſolution du même Problême, L. 3. Part. 4. Sect. 2. Art. 2. en ſe ſervant du cercle & de la parabole, qui ſont du premier genre. Par rapport à ce Problême la parabole eſt plus ſimple que la conchoïde : & c'eſt dans ce ſens que M. DESCARTES veut que les lignes les plus ſimples ſoient principalement celles, qui ſont du plus ſimple genre, qui puiſſe ſervir à déterminer la quantité qui eſt cherchée, & cette quantité eſt ici les deux moyennes proportionelles. C'eſt pourquoi quand même la deſcription de la conchoïde ſeroit plus aiſée, que celle de la parabole, & que la conſtruction & la démonſtration, que donne la conchoïde, ſeroient plus faciles, que celles qui viennent de la parabole ; la parabole devroit pourtant paſſer pour une ligne plus ſimple que la conchoïde.

4. Parmi les courbes du même genre M. DESCARTES appelle les plus ſimples celles, qui n'ont pas tant d'étenduë en leur puiſſance. Dans

le ſecond genre il y a des courbes, dont les inconnuës ont trois dimenſions ; d'autres dont les inconnuës montent à la quatriéme dimenſion ; les premieres ſont les plus ſimples, parceque leurs puiſſances ont moins d'étenduë. Il ſemble auſſi qu'une courbe, dont les deux inconnuës auroient quatre dimenſions, ſeroit moins ſimple qu'une autre courbe, dont une ſeule des inconnuës ſeroit du quatriéme degré. Suivant ce principe M. DESCARTES auroit raiſon de dire, que la conchoïde, dans l'équation de laquelle une ſeule inconnuë eſt du quatriéme degré, n'a pas tant d'étenduë, que la plûpart de celles du même genre, dans l'équation deſquelles les deux inconnuës montent à la quatriéme puiſſance. Mais ſuivant le même principe il n'auroit pas raiſon de dire au même endroit, ni que l'ellipſe, l'hyperbole, la parabole ſont également compoſées, ni que le cercle eſt manifeſtement plus ſimple que ces trois Sections : puiſque dans l'équation $yy = px$, il n'y a qu'une des inconnuës, qui ſoit du ſecond degré, & que dans l'équation au cercle les deux inconnuës ſont élevées à la ſeconde puiſſance, de ſorte que cette équation $yy = 2ax - xx$ eſt évidemment auſſi compoſée, que les équations de l'ellipſe & de l'hyperbole $\frac{2ayy}{p} = 2ax \mp xx$. Enfin * *les Geometres ſont convenus entr'eux, que la plus ſimple des Sections coniques eſt le cercle ; après le cercle, la parabole eſt la plus ſimple ; l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes eſt la moins ſimple.* Ainſi le rectangle xy eſt jugé moins ſimple, non ſeulement qu'un quarré yy ; mais encore que les deux quarrez yy, xx, & le rectangle $2ax$ pris enſemble.

* *Hiſt. de l'Academie Royale des Sciences 1705.*

Au reſte il ne faut pas être ſurpris, que l'on diſtingue avec tant de ſoin les lignes les plus ſimples de celles qui le ſont moins : puiſque c'eſt un principe reçu ordinairement de tous les Geometres, qu'il faut employer pour la conſtruction d'un Problême, les lignes les plus ſimples que l'on puiſſe. Voyez Liv. 3. Part. 1. Sect. 2.

ARTICLE III.

Differentes manieres de décrire les lignes courbes.

Fig. 53. IL nous faudra d'abord expliquer ce qui regarde l'hyperbole de la Figure 53. faire voir enſuite que le même inſtrument, avec lequel l'on a décrit cette hyperbole, peut ſervir à décrire des lignes de differens genres. Par là il conſtera de ce que M. DESCARTES aſſure dès le commencement de cette Section, qu'il pourroit donner pluſieurs moyens pour tracer des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus compoſées par degrez à l'infini. Enfin l'on apportera quelques autres methodes, pour décrire les lignes courbes ſur un plan ; dont la premiere ſera celle, qui cherche pluſieurs points, que l'on joint par une courbe ; l'on a déja ébauché cette methode, Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2.

L'inſtrument conſiſte en trois choſes, Fig. 53. la premiere eſt la ligne

ou regle indefinie AK arrêtée ferme ſur un plan ; la ſeconde eſt la regle indefinie GL qui tourne autour du point ou pole G donné hors de la ligne AK. La troiſiéme eſt une figure rectiligne, ou curviligne BKC, dont le diametre KB gliſſe toûjours ſur la regle AK,& qui eſt muë par la regle GL, laquelle en tournant paſſe toûjours par un point donné L de la Figure BKC, dont le côté KC eſt indefini.

On peut ſuppoſer que l'ouverture L eſt dans le plan ſeul CKL ; & dans ce cas on doit ſuppoſer la regle GL indefinie du côté de F, & que ſon point G ne ſort pas du point G du plan. On peut auſſi concevoir que l'ouverture L eſt commune au plan CKL & à la regle GL, & la Figure ſemble l'indiquer ; & dans ce cas il faut ſuppoſer la regle indefinie du côté de G, & au point G un anneau, dans lequel la regle s'éleve & s'abaiſſe librement, ſuivant que le plan CKL s'éleve ou s'abaiſſe le long de la ligne AB.

§. I.

La courbe décrite Figure 53. eſt une Hyperbole.

1. LOrſque la Figure BKC eſt un angle rectiligne, dont le côté KC eſt indefiniment prolongé vers C, l'interſection continuelle de la ligne KC avec la regle GL décrit la courbe GCE, dont l'équation eſt $\frac{ab}{c}y - ab = xy + \frac{b}{c}yy - by$, & multipliant tout par c, & diviſant tout par b, $yy = ay + cy - \frac{cx}{b}y - ac$. équation à l'hyperbole, car comme on l'enſeigne dans les lieux Geometriques, lorſqu'une équation contient le quarré yy d'une ſeule des inconnuës, avec le plan xy des deux, le lieu eſt à l'hyperbole & par rapport à ſes diametres, & par rapport à ſes aſymptotes. Nous le conſtruirons ici des deux manieres.

2. Commençons par la conſtruction qui regarde les aſymptotes. L'on peut ainſi ordonner les termes $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy = ac$; multiplier tout par b, & diviſer par c, pour avoir $\frac{ab}{c}y + by - xy - \frac{b}{c}yy = ab$. Faites $\frac{ab}{c} + b - x - \frac{b}{c}y = v$, la reduite ſera $vy = ab$. FIG. 54.

Quand la regle GL ſera venuë ſur GA, le point L tombera ſur le point A, le point C ſur le point N, & le point N ſur le point E, donc $EA = NL$, c. Prolongez AG en D, & que GD ſoit égale à EA, c. Par le point D menez DF parallele à KC, juſques à ce qu'elle coupe AK prolongée. La toute $DA = AG + GD$, eſt $a + c$.

Les triangles DAF, NLK ſont équiangles, donc $NL, c : LK, b :: DA, a + c : AF, \frac{ab}{c} + b$; & $FK = AF - AB - BK = \frac{ab}{c} + b - x - \frac{by}{c} = v$. Et FK eſt l'abſciſſe, dont CB, y ne peut être l'appliquée correſpondante, ſoit parceque CB n'eſt pas parallele à FD qui ſera aſymptote, ſoit parceque CB ne touche pas l'abſciſſe FK, ſuivant Liv. 1. Sect. 4. Regle 10. L'appliquée doit donc être KC, qui a ces deux conditions.

C'eſt pourquoi il faut changer l'équation $vy = ab$, & à la place de CB,

y, mettre KC. Or puiſque le triangle NLK eſt donné, ſoit la raiſon du côté LK au côté KN, comme b à g. Deſlors, $b : g :: BK \frac{by}{c} : KC, \frac{gy}{c} = z$, & pour vy, vous aurez vz, & afin que l'égalité ſubſiſte dans l'équation $vy = ab$, il faut multiplier le ſecond membre ab par $\frac{g}{c}$, par laquelle le premier vy a été multiplié, & la derniere reduite eſt $vz = \frac{abg}{c}$.

Regardez les lignes FA, FD, comme les deux aſymptotes de l'hyperbole qu'il faut décrire, ſur FD prenez $FS = \frac{ag}{c}$, & menez $ST = b$ parallele à FA; & décrivez, comme on l'apprend dans les Sections coniques l'hyperbole GTE, en la faiſant paſſer par le point donné T, & dont FA, FD ſoient les aſymptotes. Elle paſſera par le point C & ſera l'hyperbole cherchée.

Dém. Par la nature de l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes, $FK \times KC = FS \times ST$, & en termes analytiques $vz = \frac{abg}{c}$. Mettez pour z ſa valeur; $\frac{gvy}{c} = \frac{abg}{c}$, $vy = ab$; & pour v ſa valeur $\frac{ab}{c} + b - x - \frac{b}{c}y$; vous aurez $\frac{ab}{c}y + by - xy - \frac{b}{c}yy = ab$; multipliez tout par c, diviſez par b, vous ferez $yy = ay + cy - \frac{cx}{b}y - ac$; équation à conſtruire.

3. Vous conſtruirez de cette ſorte la même équation à l'hyperbole par rapport à ſes diametres Fig. 54. Rangez ainſi les termes, $yy - ay - cy + \frac{cx}{b}y = -ac$, ou faiſant $a + c = 2d$, $yy - 2dy + \frac{cx}{b}y = -ac$. Prenez $y - d + \frac{cx}{2b} = v$, ou $-y + d - \frac{cx}{2b} = v$, $\pm v + d - \frac{cx}{2b} = y$. Mettez cette valeur de y à ſa place dans les termes $-2dy + \frac{cx}{b}y$, & pour yy ſa valeur $vv + 2dv - \frac{cxv}{b} + dd - \frac{cdx}{b} + \frac{ccxx}{4bb}$; vous trouverez la reduite $vv - dd + \frac{cdx}{b} - \frac{ccxx}{4bb} = -ac$; $\frac{ccxx}{4bb} - \frac{cdx}{b} = vv - dd + ac$; multipliez par $4bb$, diviſez par cc; ce ſera $xx - \frac{4bdx}{c} = \frac{4bbvv - 4bbdd + 4abbc}{cc}$. Faites encore $x - \frac{2bd}{c} = z$, ou $\frac{2bd}{c} - x = z$, $\pm z + \frac{2bd}{c} = x$, & ſubſtituez pour x, & xx leur valeur, la ſeconde reduite ſe trouve $zz = \frac{4bbvv}{cc} + \frac{4abb}{c}$; $\frac{4bbvv}{cc} = zz - \frac{4abb}{c}$, où le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{4abb}{c}} = 2b\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Faites comme n. 2. $AF = \frac{2bd}{c} = \frac{ab}{c} + b$, en mettant $a + c$ pour $2d$, FB eſt $FA - AB$, $\frac{2bd}{c} - x = z$. Soit AD, $a + c$ comme n. 2. du point M milieu de AD tirez MF, AM ſera $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = d$. Par le point M menez l'infinie MH parallele à FA; prolongez BC en H. $MH = AB$. x; $BH = AM$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = d$. Les triangles FAM, MHR équiangles donneront cette analogie $FA, \frac{ab}{c} + b : AM, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c :: MH, x : HR$, $\frac{acx + ccx}{2ab + 2bc} = \frac{cx}{2b}$ en diviſant le numerateur & le denominateur par $a + c$. Vous aurez donc $CR = BH - BC - HR$, $d - y - \frac{cx}{2b} = v$. Or v eſt l'appliquée de la reduite $\frac{4bbvv}{cc} = zz - \frac{4abb}{c}$, donc la ligne FR en eſt l'abſciſſe & FM le diametre, ſur lequel l'abſciſſe $z = FB$, n'eſt pas. Il faut donc tranſporter FB en FR, Liv. 1. Sect. 4. Regle 10.

Les trois points A, F, M étant donnez, les trois côtez du triangle

AFM ſont connus, auſſi bien que la raiſon du côté AF au côté FM; que ce ſoit comme b à f; les triangles FAM, FBR étant ſemblables, la raiſon du côté FB, au côté FR ſera auſſi comme b à f. Faites donc $b : f :: FB, z : FR, \frac{fz}{b} = f$; $ff = \frac{ffzz}{bb}$; mettez ff pour zz dans l'équation $\frac{+4bbvv}{cc} = zz - \frac{+4abb}{c}$; & afin que l'égalité demeure, multipliez auſſi les autres termes par $\frac{ff}{bb}$ & la derniere reduite ſera $\frac{+4ff}{cc}vv = ff - \frac{+4aff}{c}$. Coupez $FI = 2f\sqrt{\frac{a}{c}}$; prolongez IF, juſqu'à ce que FQ ſoit égal à FI; IQ ſera $4f\sqrt{\frac{a}{c}}$ le diametre, I le ſommet. Et parceque $\frac{4ff}{cc}$ marque la raiſon du diametre au parametre : faites comme $4ff$ eſt à cc : de même le diametre $4f\sqrt{\frac{a}{c}}$ eſt au parametre $\frac{cc}{f}\sqrt{\frac{a}{c}}$. Ayant le diametre, le parametre, le ſommet, l'angle IRC des appliquées, l'on peut décrire l'hyperbole GIE; elle paſſera par le point C.

Dém. $QR = QF + FR$, $2f\sqrt{\frac{a}{c}} + f$; $IR = FR - FI$, $f - 2f\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Par la nature de l'hyperbole priſe par rapport à ſes diametres, comme le diametre eſt au parametre, c'eſt-à-dire, $4f\sqrt{\frac{a}{c}} : \frac{cc}{f}\sqrt{\frac{a}{c}} :: QR \times IR, ff - \frac{4aff}{c} : \overline{CR}^2, vv$. $4fvv\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{cc}{f}ff\sqrt{\frac{a}{c}} - 4acf\sqrt{\frac{a}{c}}$. Diviſez par $\sqrt{\frac{a}{c}}$, l'équation ſera $4fvv = \frac{cc}{f}ff - 4acf$. Multipliez par f, & diviſez par cc, elle ſera $\frac{4ff}{cc}vv = ff - \frac{4aff}{c}$ la derniere reduite. Pour ff ſubſtituez ſa valeur $\frac{ffzz}{bb}$, vous aurez $\frac{4ffvv}{cc} = \frac{ffzz}{bb} - \frac{4aff}{c}$. Multipliez encore par bb & diviſez par ff, vous trouverez $\frac{4bb}{cc}vv = zz - \frac{4abb}{c}$, premiere reduite. Mettez enfin pour vv, le quarré de $v = -y + d - \frac{cx}{b}$, & pour zz le quarré de $z = -x + \frac{2bd}{c}$ pour avoir l'équation $\frac{4bbyy}{cc} - \frac{8bbdy}{cc} + \frac{4bxy}{c} + \frac{4bbdd}{cc} - \frac{4bdx}{c} + xx = xx - \frac{4bdx}{c} + \frac{4bbdd}{cc} - \frac{4abb}{c}$; ôtez ce qui s'efface, multipliez par cc, diviſez par $4bb$ & à $2d$ ſubſtituez ſa valeur $a + c$, vous aurez $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$, équation qu'il falloit conſtruire.

4. M. DESCARTES ajoûte que quoiqu'on choiſiſſe une autre ligne que AB, & un autre point que A, l'on peut toûjours faire, que la ligne paroiſſe du même genre. En effet Fig. 53. prenons la ligne GA pour celle aux points de laquelle l'on rapporte les points de la courbe GCE, & dans GA prenons le point G, pour commencer par lui le calcul. Menons CH parallele à AB, & CB parallele à GA, de même qu'à NL; $CB = HA$, $CH = AB$. Nommons les données GA, a; KL, b; NL, c; les inconnuës $CH = AB, x$; GH, y; & $HA = CB = AG - GH, a - y$. Maintenant à cauſe des triangles équiangles GHC, GAL; comme auſſi des triangles CBK, NLK; $GH, y : HC, x :: GA, a : AL, \frac{ax}{y}$; & $BL = AL - BA, \frac{ax}{y} - x$; & $BK = BL + KL, \frac{ax}{y} - x + b$. L'on a encore $NL, c : LK, b :: CB, a - y : BK, \frac{ax}{y} - x + b$; $\frac{acx}{y} - cx + bc = ab - by$. Multiplions tout par y, nous aurons $bcy - aby + acx - cxy + byy = 0$. Equation à l'Hyperbole, comme la precedente. FIG. 53.

Fig. 53. te. Nous la conſtruirons ſeulement par rapport à ſes aſymptotes ſous cette forme $by - \frac{aby}{c} + ax - xy + \frac{byy}{c} = o$.

Prenons d'abord $a - y = v$, $y = a - v$. Mettons v pour $a - y$ dans $ax - xy$, l'équation ſe changera en $by - \frac{aby}{c} + xv + \frac{byy}{c} = o$. Enſuite pour y, yy ſubſtituons leur valeur $a - v$, $aa - 2av + vv$, l'équation ſera $ab - bv - \frac{aab}{c} + \frac{abv}{c} + xv + \frac{aab}{c} - \frac{2abv}{c} + \frac{bvv}{c} = o$, $ab - bv + xv - \frac{abv}{c} + \frac{bvv}{c} = o$, $ab - bv + xv - \frac{abv}{c} + \frac{bvv}{c} = o$, $bv + \frac{abv}{c} - \frac{bvv}{c} - xv = ab$. Faiſons enfin $b + \frac{ab}{c} - \frac{bv}{c} - x = z$; la reduite ſera $vz = ab$.

Fig. 55. Pour la conſtruire Fig. 55. je regarde la quantité c comme l'unité.

Il nous faut prolonger AG en D, & faire $GD = AE = NL, c$, par la raiſon qui eſt rapportée n. 2. Par le point D menons DF parallele à KC juſqu'à ce qu'elle rencontre AK prolongée en F; $CB = HA$; & $AD = AG + GD$, $a + c$.

Comme n. 2. l'on trouvera $AF = \frac{ab}{c} + b$; $u = a - y = AH = CB$. Dans les triangles ſemblables CBK, NLK, NL, $c : LK$, $b :: CB$, $v : BK$, $\frac{bv}{c}$. Ainſi $FK = FA - AB - BK$, $\frac{ab}{c} + b - x - \frac{bv}{c} = z$. C'eſt pourquoi comme n. 2. FK, z étant l'abſciſſe; CB, v ne peut être l'appliquée, mais ce doit être KC; dont on ſaura la valeur, en ſuppoſant la raiſon de LK à KN, comme b à g. Car $LK : KN$, ou $b : g :: BK$, $\frac{bv}{c} : KC$, $\frac{gv}{c} = f$. C'eſt pourquoi afin que l'égalité $vz = ab$ ſubſiſte, à la place de v nous mettrons f, & nous multiplierons ab par $\frac{g}{c}$, & la derniere reduite ſera $fz = \frac{abg}{c}$. Coupons donc $FS = \frac{ag}{c}$, & menons $ST = b$ parallele à AF, nous décrirons l'hyperbole $GTCE$ par le point donné T, & entre les aſymptotes FA, FD: elle paſſera par le point C, & ſera la même $GTCE$ Fig. 54.

Dém. Par la nature de l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes, $FK \times KC = FS \times ST$, $fz = \frac{abg}{c}$ ſubſtituez à f, à z, à v leurs valeurs, multipliez par C, diviſez par y, vous aurez $\frac{acx}{y} - cx + bc = ab - by$ équation à conſtruire.

Les hyperboles $GTCE$ Fig. 54. 55. ſont les mêmes : parceque 1° dans les deux figures par la conſtruction $AD = AD$, l'angle A = l'angle A, l'angle D eſt auſſi égal à l'angle D, puiſque DF eſt parallele à CK, & que par conſequent l'angle D eſt égal à l'angle KCB: donc les triangles AFD ſont égaux, & l'angle F des aſymptotes eſt le même. 2° Dans les deux Figures FS eſt $\frac{ag}{c}$, ST eſt b.

§ II.

Le même inſtrument ſert à décrire des courbes de differens genres.

COmme M. DESCARTES aſſure dans cette Section, que quelque courbe qui ſoit appliquée à l'inſtrument de la Figure 53. & qui termine le plan *CNKL*, l'on décrira une ligne courbe d'un genre plus compoſée d'un degré, que n'eſt la courbe appliquée. L'on cherchera n. 1. une formule generale, par le moyen de laquelle on connoîtra quelle courbe eſt produite par une Figure quelconque *CNKL* appliquée à l'inſtrument de la Figure 53. pourveu que l'on ſache la nature ou l'équation de la Figure appliquée *CNKL*. L'on ſuppoſera n. 2. 3. que *CNKL* eſt un angle; n. 4. que cette Figure eſt un cercle; n. 5. que c'eſt une ellipſe; n. 6. que c'eſt une parabole; n. 7. que c'eſt une hyperbole.

Enſuite n. 8. 9. — — — L'on appliquera des courbes du ſecond genre, avec leſquelles on décrira des courbes du troiſiéme, l'on apportera enfin n. 10. 11. 12. des exemples, où les Figures appliquées ne donnent pas des courbes d'un genre different, ou bien elles en donnent d'un genre plus élevé, que le ſuivant.

I.

On peut tellement appliquer la Figure rectiligne ou curviligne *CKc* Fig. 54. ſur la ligne *AK*, qu'une partie *KC* ſoit d'un côté de la ligne *AK*, & l'autre partie *Kc* de l'autre côté. La regle *GL* coupera la figure *CKc* en deux points *C*, *c*, & décrira en même tems deux courbes *GCE*, *gce*. Il faut trouver une formule pour chacune de ces courbes. FIG. 54.

Par les points *C*, *c*, quelconques de ces courbes menez *CB*, *cb* paralleles à *GA* & appliquées à *AF* les triangles *GAL*, *CBL*, qui ſont ſemblables, donneront la formule de la courbe *GCE*, & les triangles *GAL*, *cbL* la formule de la courbe *gce*.

Pour la courbe *GCE* nommez les données *GA*, *a*; *KL*, *b*; les inconnuës *AB*, *x*; *CB*, *y*; *KB*, *z*; on aura $LB = KB - KL$, $z - b$; $AL = AB + BL$, $x + z - b$. Maintenant *GA*, *a*: *AL*, $x + z - b$:: *CB*, *y*: *BL*, $z - b$; $az - yz = xy - by + ab$, qui ſera la formule pour la courbe *GCE*, d'où l'on tire $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$.

Pour la courbe *gce* nommez *Ab*, *x*; *Kb*, *z*; *Lb* ſera *KL* — *Kb*, $b - z$; $AL = Ab - bL$, $x - b + z$; pour *cb*, on peut la nommer $-y$, en conſiderant que la droite *AK* eſt l'axe des *y*, dont les $+y$ vont du côté de *G*, les $-y$ du côté de *g*. Ou bien on peut la nommer $+y$ en conſiderant la courbe *gce* indépendamment de la premiere courbe *GCE*.

Si l'on nomme *cb*, $-y$; *GA*, *a*: *AL*, $x - b + z$:: *cb*, $-y$: *bL*,

Fig 54. $b - z$; $az - yz = xy - by + ab$, même formule que pour la courbe GCE, d'où l'on tire $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$.

Si l'on nomme cb, $+ y$; l'on aura $az + yz = - xy + by + ab$, autre formule pour la courbe gce, d'où l'on tire $z = \frac{- xy + by + ab}{a + y}$.

L'on cherche enſuite une autre valeur de KB, ou de Kb, z dans l'équation, qui exprime la nature de la figure CKc appliquée à l'inſtrument ; l'équation, que ces deux valeurs de z comparées enſemble donnent, eſt l'équation de la courbe, qui a été décrite par l'interſection de la regle GL avec la ligne droite ou courbe KC, ou Kc.

Les formules ſont generales, parcequ'elles ſont tirées des triangles GAL, CBL, cbL, que l'on aura toûjours, lorſque le diametre de la figure CNc gliſſera ſur la ligne AK, qui s'appelle la directrice, & que la regle GL, qui tourne autour du Pole G, paſſera par un point L du diametre, & fera mouvoir la Figure CKc, qui s'appelle la Figure generatrice. Nous ſuppoſerons donc dans la ſuite, que les formules ſont déja trouvées.

II.

L'angle GAF eſt droit, CKc eſt un angle diviſé en deux également par ſon axe KA, les points C, c étant les interſections de la regle GL & des droites KC, Kc ; les ordonnées CB, cb, qui doivent être paralleles à GA, ſont perpendiculaires à leur axe. Par le point donné L menez NLn parallele à ces ordonnées. Dans les triangles NLK, nLK, $LN = Ln$, leſquelles ſont connuës à cauſe du point donné L ; Nommons les c & à cauſe des paralleles CB, $NL : NL, c : LK, b :: CB, y : BK$, z ; $z = \frac{by}{c}$, lieu à la ligne droite.

Prenons la formule, qui ſert à la courbe GCE ; & la valeur de z, qui en a été tirée, pour la comparer avec la valeur de z que l'on vient de trouver ; l'on aura $z = \frac{xy - by + ab}{a - y} = \frac{by}{c}$, multiplions tout par c, & par $a - y$, diviſons par b nous trouverons $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$. La même équation que l'on a trouvé dans la Geometrie de M. DESCARTES pour l'Hyperbole GCE.

Les triangles nLK, cbK équiangles donnent, en ſuppoſant $cb = - y$, l'analogie ſuivante, nL, $c : LK, b :: cb$, $- y : bK$, z ; $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; d'où l'on tirera pour la courbe gce l'équation $yy = ay - cy + \frac{cxy}{b} + ac$. Ainſi la courbe gce eſt auſſi une hyperbole.

Mais en ſuppoſant $cb = + y$, l'on aura nL, $c : LK$, $b :: cb$, $+ y : bK$, z ; $cz = + by$, $z = \frac{+ by}{c} = \frac{- xy + by + ab}{a + y}$ qui eſt la valeur de z trouvée n. 1. lorſque $cb = + y$, multiplions tout par c & par $a + y$; diviſons par b ; & nous trouverons $yy = - ay + cy - \frac{cxy}{b} + ac$; équation de la courbe gce, qui eſt encore un lieu à l'hyperbole.

L'hyperbole

L'hyperbole gce a pour aſymptotes la ligne fAK, & la ligne dfr menée parallele à Kc; leur ſommet eſt le point f. On conſtruira l'équation $yy = -ay + cy - \frac{cxy}{b} + ac$, qui ſuppoſe $cb = +y$, en ſuivant ce qui s'eſt fait §. 1. n. 2.

L'on ordonne ainſi les termes $ay - cy + \frac{cxy}{b} + yy = ac$, l'on diviſe par c, & l'on multiplie par b, & l'on fait $\frac{aby}{c} - by + xy + \frac{byy}{c} = ab$. Soit $\frac{ab}{c} - b + x + \frac{b}{c}y = v$, donc $vy = ab$.

On coupe $Gd = EA$, c : & $Ad = AG - Gd$, $a - c$, & ayant mené dfr parallele à Kc, & prolongé FA vers f; les triangles KLn, dAf équiangles, à cauſe des paralleles Kn & df, donnent cette Analogie, nL, c: LK, b:: dA, $a - c$: Af, $\frac{ab}{c} - b$. L'on aura donc $fK = fA + Ab + bK$, $\frac{ab}{c} - b + x + \frac{by}{c} = v$; qui doit être l'abſciſſe, & Kc l'appliquée.

L'on trouvera auſſi $Kc = \frac{gy}{c} = f$, en ſuppoſant la raiſon du côté LK au côté Kn, comme b à g: & l'équation $vy = ab$ ſe reduira à $vs = \frac{abg}{c}$. Coupez $ff = \frac{ag}{c}$, & tirez $st = b$; décrivez l'hyperbole gte par le point donné t, & entre les aſymptotes fA, fr: elle paſſera par le point c.

Dém. Par la nature de l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes, $fK \times Kc = fs \times st$, & en termes analytiques $vs = \frac{agb}{c}$. Subſtituez à f, à v, leurs valeurs, multipliez par c, diviſez par b, vous aurez $yy = -ay + cy - \frac{cxy}{b} + ac$; équation à conſtruire.

L'on trouveroit auſſi que l'équation $yy = ay - cy + \frac{cxy}{b} - ac$ convient à l'hyperbole gce, en ſuppoſant $cb = -y$. Car l'on aura $fK = fA + Ab + bK = \frac{ab}{c} - b + x - \frac{by}{c} = v$, car bK eſt $-\frac{by}{c}$. Le reſte n'eſt pas fort different. D'où il ſuit qu'il eſt indifferent de nommer cb, $+y$, ou $-y$, puiſque ces deux valeurs donnent la même courbe gce, & qu'elles ne ſont chacune differentes, que par le changement de quelques ſignes, de l'équation de la courbe GCE.

III.

Lorſque la figure NKn eſt une ſeule ligne NK parallele à GA Fig. 56. l'on décrit deux hyperboles oppoſées égales GCE, gce.

Nommons GA, a; BL, $b = bl$; Ab, x; AB, $-x$; CB, y; cb, $-y$. $AL = AB + BL$, $-x + b$; $Al = Ab - bl$, $x - b$.

Pour l'hyperbole GCE, les triangles équiangles GAL, CBL donnent cette Analogie GA, a: AL, $-x + b$:: CB, y: BL, b; $-xy + by = ab$; à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. L'on auroit pu tirer cette équation de la formule de n. 1. pour la courbe GCE, $az - yz = xy - by + ab$. Car puiſque Fig. 56. la ligne KB, z eſt nulle, le point B tombant ſur le point K: il n'y a qu'à effacer dans la formule les termes, où z

ſe trouve, ſuivant la regle 11. de L. 1. Sect. 4. il reſte $xy - by + ab = o$; $- xy + by = ab$.

Pour l'hyperbole gce, en ſuppoſant cb, $-y$, comme l'on fait dans les lieux Geometriques; les triangles GAl, cbl équiangles donnent, GA, $a : Al, x - b :: cb, -y : bl, b$; $- xy + by = ab$. Equation qui ſe tireroit auſſi de la formule de n. 1. pour la courbe gce, lorſque $cb = -y$, $az - y\zeta = xy - by + ab$.

Les deux hyperboles GCE, gce, qui ont une même équation ſont égales, coupez $AF = b$, par le point F menez FS parallele à GA; les lignes FS, FB ſont les aſymptotes, & leur ſommet eſt F. Car ayant tiré $FS = a$, $SG = b$, & parallele à AB, ſi vous décrivez l'hyperbole GCE par le point donné G & entre les aſymptotes FS, FB, elle paſſera par le point C; & ſi vous décrivez ſon oppoſée égale gce, elle paſſera par le point c. L'on a $FB = FA + AB$, $b - x$; $Fb = Ab - AF$, $x - b$.

Dém. Par la nature de l'hyperbole priſe par rapport à ſes aſymptotes, $FB \times BC = FS \times SG$, $by - xy = ab$. $Fb \times bc = FS \times SG$, $- xy + by = ab$; qui eſt l'équation des hyperboles GCE, gce.

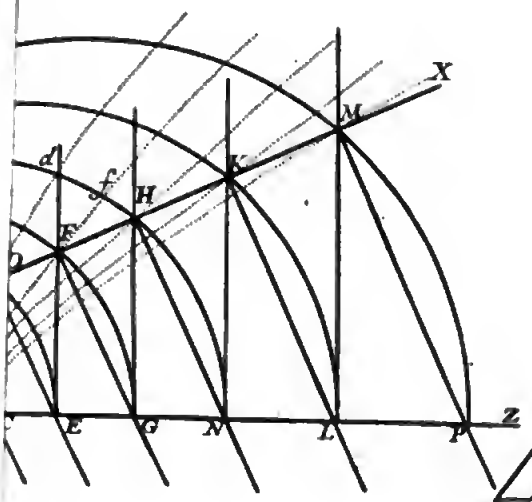
Si l'on avoit ſuppoſé $cb = +y$, l'équation auroit été $xy - by = ab$, qui conviendroit parfaitement à l'hyperbole gce: mais cette équation n'étant pas la même que celle de l'hyperbole GCE, l'on n'auroit pas pû connoître, que les deux hyperboles ſont égales. D'où il ſuit, qu'il vaut mieux faire $cb = -y$, que $= +y$, lorſqu'il s'agit de conſtruire un lieu geometrique, dans lequel les deux courbes doivent donner une même équation.

IV.

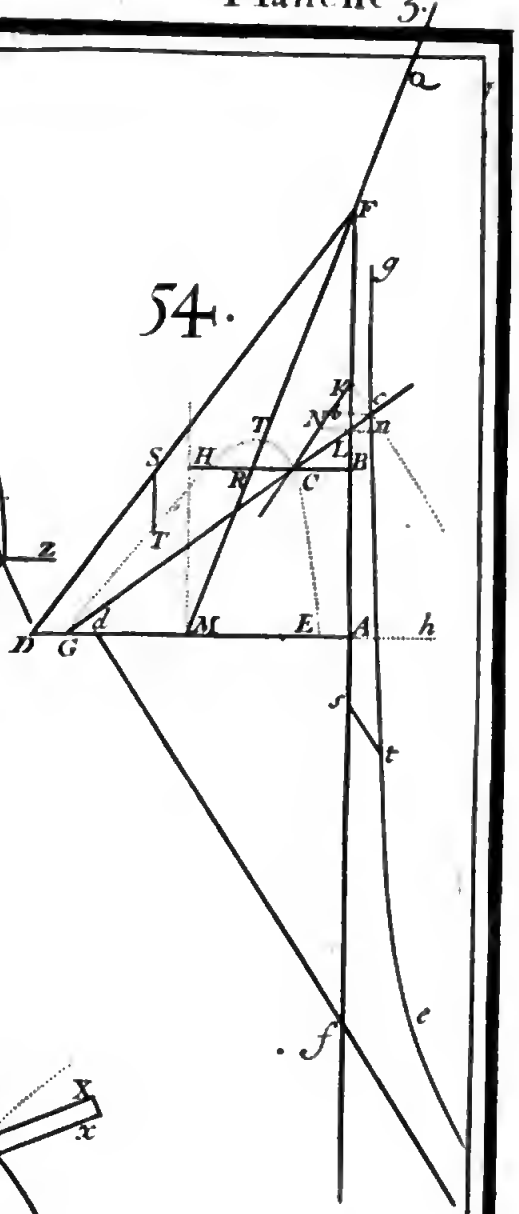
FIG. 43. Appliquez à l'inſtrument Fig. 43. le cercle Aa, l'interſection de la regle PA, qui tourne autour du Pole P, avec la circonference du cercle dont le centre eſt toûjours ſur la directrice BC, & par lequel centre la regle PA paſſe toûjours; cette interſection, dis-je, de la regle & de la circonference décrira la Conchoïde ſuperieure DAD, & l'inferieure dad.

Le point P de Fig. 43. eſt le même que le point G de Fig. 53. le point B de Fig. 43. le même que le point A de Fig. 53. le point C de Fig. 43. le même que le point L de Fig. 53. le point K eſt le même dans les deux Figures; la ligne PB de Fig. 43. eſt la même que la ligne GA de Fig. 53. la ligne BK de Fig. 43. eſt la même que la ligne AK de Fig. 53.

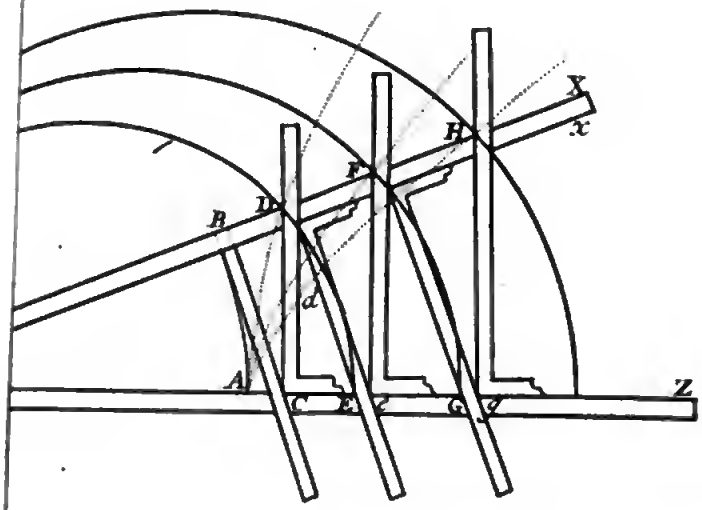
Or ſoit que l'on décrive les deux Conchoïdes par l'interſection de la regle PC & de la circonference du cercle Aa, comme on le fait ici; ſoit qu'on les ſuppoſe décrites, comme Sect. 2. Art. 3. n. 1. en prenant partout CD, cd égales à BA, Ba; il eſt évident que les équations de ces deux courbes ſeront les mêmes, que l'on a trouvé Sect. 2. Art. 3. n. 1. puiſque l'on forme encore ici les mêmes triangles, qui ont ſervi en cet endroit, où l'on a fait les appliquées DF, df, $+y$; PB, b; AB, ou KC, a; KF, ou Kf, z.



54.



52.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

Gravé par Daudet

C'eſt pourquoi pour former l'équation de la Conchoïde inferieure *dad*, en ſe ſervant de la formule $z = \frac{xy - by + ab}{a - y}$, n. 1. qui eſt pour la courbe *CEG* Fig. 54. il faut la ſuppoſer $z = \frac{xy - ay + ab}{b - y}$ en mettant b pour a, & a pour b. Enſuite l'on cherchera la valeur de z dans l'équation au cercle *DKd*, dans le triangle rectangle *dfC*, dont le côté $df = y$; Cd, a; $Cf = Kf - KC$, $z - a$; $\overline{Cd}^2 = \overline{df}^2 + \overline{Cf}^2$, $aa = yy + zz - 2az + aa$; d'où l'on tire $z = a + \sqrt{aa - yy} = \frac{xy - ay + ab}{b - y}$. $\sqrt{aa - yy} = -a + \frac{xy - ay + ab}{b - y} = \frac{-ab + ay + xy - ay + ab}{b - y} = \frac{xy}{b - y}$. L'on quarrera $\sqrt{aa - yy} = \frac{xy}{b - y}$, ce qui donnera $aa - yy = \frac{xxyy}{bb - 2by + yy}$; $aabb - 2aaby + aayy - bbyy + 2by^3 - y^4 = xxyy$; $y^4 - 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy + 2aaby - aabb = o$. Equation cherchée de la Conchoïde *dad*, qui eſt du quatriéme degré & du ſecond genre, telle qu'on l'a trouvée, Sect. 2. Art. 3. n. 1.

Venons à la Conchoïde ſuperieure *DAD*, pour laquelle on ſe ſervira de la formule $\frac{-xy + ay + ab}{b + y}$ n. 1. en ſuppoſant $DF = +y$; $CF = KC - KF$, $a - z$; la valeur de z tirée du cercle, ou du triangle rectangle *CFD* ſera encore $z = a + \sqrt{aa - yy} = \frac{-xy + ay + ab}{b + y}$, ce qui donnera $\sqrt{aa - yy} = \frac{-xy}{b + y}$; $aa - yy = \frac{xxyy}{bb + 2by + yy}$ & enfin $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = o$. Equation de la Conchoïde *DAD* differente en quelques ſignes de l'équation de la Conchoïde *dad*.

Mais les équations des deux Conchoïdes ſeroient entierement les mêmes, ſi l'on ſuppoſoit $DF = -y$. D'où il ſuit que lorſque l'on ſouhaite de diſtinguer ces deux courbes par leurs équations; il faut nommer $+y$ les appliquées des deux, qui ſe terminent à l'axe commun *BK*.

V.

Au lieu du cercle Figure 43. appliquez une Ellipſe, dont un diametre ſoit toûjours ſur la directrice *BK*, & par le centre de laquelle la regle *PC* paſſe toûjours la double interſection de la regle *PC* & de la circonference de l'Ellipſe, décrira une double Conchoïde Elliptique dont l'équation commune en ſuppoſant *DF*, *df*, $-y$, ſe trouvera de cette ſorte. Fig. 43.

Nommons le diametre de l'Ellipſe $2a = d$; les abſciſſes *KF*, *Kf*, z; l'équation à l'Ellipſe $\frac{d}{p}yy = 2az - zz$, d'où l'on conclurra que $z = a + \sqrt{aa - \frac{d}{p}yy} = \frac{xy - ay + ab}{b - y}$, & après avoir operé comme n. 4. pour le cercle, multipliez tout par p, diviſez par d, mettez pour d ſa valeur vous aurez $y^4 - 2by^3 - \frac{1}{2}apyy + bbyy + \frac{p}{2a}xxyy + abpy - \frac{1}{2}abbp = o$.

De même, étant *DF*, $+y$; l'on trouvera que l'équation de la Conchoïde

Elliptique ſuperieure DAD eſt $y^4 + 2by^3 - \frac{1}{2}apyy + bbyy + \frac{p}{2a}xxyy - abpy - \frac{1}{2}abbp = o$. Toutes ces équations marquent que les Conchoïdes Elliptiques ſont du quatriéme degré & du ſecond genre.

VI.

Fig. 57. Lorſqu'on appliquera Fig. 57. une Parabole CKO, de ſorte que le diametre KB coule ſur la directrice AK, & que la regle GL paſſe toûjours par le point L de ce diametre; la double interſection de la regle GL & de la ligne parabolique aux points C, O, décrira deux courbes GCE, OIN.

L'on voit que, lorſque la parabole eſt priſe au deſſus de GA, l'on a pour la courbe GCE les triangles ſemblables GMC, GAL; & pour la courbe OIN les triangles GAL, LbO: & lorſque la parabole eſt priſe au deſſous de GA, l'on a les triangles Gmc, GAl pour la courbe GCE, & les triangles GAl, bln pour la courbe OIn. Ainſi l'on peut ſe ſervir des formules de n. 1.

Nommons KL, b; les coupées KB, kb, z; le parametre de la parabole p; nous aurons par la nature de la parabole $pz = yy$ pour ſon équation au point C; $z = \frac{yy}{p} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; $ayy - y^3 = pxy - bpy + abp$; $y^3 - ayy - bpy + pxy + abp = o$. équation de la Conchoïde parabolique GCE, au point C. L'on trouvera la même au point c.

Ce ſera encore la même équation pour la Conchoïde parabolique OIn en ſuppoſant $bO = -y$; mais en la poſant $+y$; l'on aura $z = \frac{yy}{p} = \frac{-xy + by + ab}{a + y}$; $y^3 + ayy - bpy + pxy - abp = o$. pour les points O, n. Ainſi les deux Conchoïdes paraboliques GCE, OIn ſont du troiſiéme degré & du ſecond genre.

VII.

Si l'on applique une hyperbole, dont le diametre KB gliſſe ſur la directrice AK, l'on décrira deux Conchoïdes hyperboliques, qui ſeront aſſez ſemblables aux paraboliques. Mettons le diametre déterminé de l'Hyperbole $2a$, ſon équation, comme on a vû dans les lieux Geometriques eſt $\frac{d}{p}yy = 2az + zz$, lorſque les z commencent au ſommet K.

D'où l'on tire $z = -a + \sqrt{aa + \frac{d}{p}yy} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$ n. 1. pour la courbe GCE; $\sqrt{aa + \frac{d}{p}yy} = \frac{aa - ay + xy - by + ab}{a - y}$. Quarrons les deux membres, & après avoir ôté les termes qui s'effacent, l'on a $\frac{d}{p}y^4 - \frac{2ad}{p}y^3 + \frac{aad}{p}yy - 2abyy - bbyy + 2axyy + 2bxyy - xxyy + 4aaby + 2abby - 2aaxy - 2abxy - 2a^3b - aabb = o$. L'on trouvera la même équation pour la Conchoïde Hyperbolique OIn, en poſant $Ob = -y$. Ainſi ces deux Conchoïdes ſont du quatriéme degré & du ſecond genre.

VIII.

L'équation de la ſeconde parabole cubique Fig. 58. eſt $y^3 = pzz$, c'eſt-à-dire que le cube y^3 de l'ordonnée CB, $+y$ eſt égal au ſolide parallelepipede pzz ſur le parametre KP, p, & le quarré de l'abſciſſe KB, z; ou Kb, $-z$: ſes deux portions KC, Kc ſont du même côté du diametre KB. FIG. 58.

Qu'une de ces portions, comme KC ſoit appliquée ſur la directrice AB comme la portion KC de la parabole quarrée CKO Fig. 57. y eſt appliquée; l'on décrira une courbe, qui reſſemblera à GCE.

Au point C de la parabole cubique KC, l'on aura l'équation $y^3 = pzz$; $z = \sqrt{\frac{y^3}{p}} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$, n. 1. Quarrez les deux membres, vous ferez $\frac{y^3}{p} = \frac{xxyy - 2bxyy + 2abxy + bbyy - 2abby + aabb}{aa - 2ay + yy}$, d'où l'on tire cette équation de la courbe GCE, qui ſera du cinquiéme degré & du troiſiéme genre $y^5 - 2ay^4 + aay^3 - bbpyy + 2bpxyy - pxxyy + 2abbpy - 2abpxy - aabbp = 0$.

IX.

La ligne KM Fig. 59. étant donnée de grandeur, il faut décrire une courbe CK telle que le quarré de l'abſciſſe KB + le quarré de KM ſoient au quarré de l'abſciſſe KB: comme la donnée KM eſt à l'ordonnée correſpondante CB. Nommons KM, c; KB, z; BC, y; l'on aura la proportion $\overline{KB}^2 + \overline{KM}^2$, $zz + cc : \overline{KB}^2$, $zz :: KM$, $c : CB$, y; $ccy + zzy = czz$; $czz - zzy = ccy$; $zz = \frac{ccy}{c - y}$; $z = \sqrt{\frac{ccy}{c - y}}$. FIG. 59. 57.

Appliquons cette courbe, de ſorte que ſon diametre KB ſoit ſur la directrice KA Fig. 57. & que la regle GL paſſe par le point L. On demande l'équation de la courbe, qui ſe décrira par l'interſection continuelle de la regle GL, & de la courbe KC.

Comparons les deux valeurs de $z = \sqrt{\frac{ccy}{c - y}} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$. n. 1.

Quarrons les deux membres. $\frac{ccy}{c - y} = \frac{xxyy - 2bxyy + 2abxy + bbyy - 2abby + aabb}{aa - 2ay + yy}$; $aaccy - 2accyy + ccy^3 = cxxyy - 2bcxyy + 2abcxy + bbcyy - 2abbcy + aabbc - xxy^3 + 2bxy^3 - 2abxyy - bby^3 + 2abbyy - aabbyy$. Equation à la nouvelle courbe décrite, qui ſera du troiſiéme genre, puiſqu'un de ſes termes eſt xxy^3; & la courbe generatrice KC étoit du ſecond à cauſe du terme zzy.

X.

La premiere Parabole cubique KC Fig. 60. eſt telle, que le cube de l'appliquée CB, y eſt égal au ſolide ſous l'abſciſſe correſpondante KB, z; & ſous le quarré du parametre KM, d. Ainſi ſon équation eſt $y^3 = ddz$. $z = \frac{y^3}{dd}$. Et cette parabole eſt du ſecond genre. FIG. 60. 57.

Lorſque cette courbe ſera appliquée, de ſorte que ſon diametre KB ſoit ſur la directrice KA Fig. 57. & que la regle GL paſſe toûjours par le point L. On aura l'équation de la courbe décrite en prenant $z = \frac{y^2}{dd} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; qui donne $ay^3 - y^4 = ddxy - bddy + abdd. y^4 - ay^3 + ddxy - bddy + abdd = o$. qui fait voir que la courbe nouvellement décrite eſt du ſecond genre, comme la parabole cubique.

Fig. 57.

La courbe nouvelle ne ſera pas non plus d'un genre plus élevé, que celui de ſa generatrice dans la parabole du cinquiéme degré, dont l'équation eſt $y^5 = d^4 z$; ni dans celle du ſeptiéme, dont l'équation eſt $y^7 = d^6 z$; &c.

XI.

Appliquons le diametre KA de la parabole ordinaire KC, & que la regle GL paſſe par le ſommet K. La courbe GCE, qui ſera décrite par l'interſection de la regle GL & de la ligne parabolique CK, ſera une parabole; du même genre & du même degré que ſa generatrice.

Fig. 61.

Soit le parametre de la parabole KC, p; la coupée KB, z; l'équation à cette parabole ſera $yy = pz$, $z = \frac{yy}{p}$. De la formule de n. 1. $\frac{xy - by + ab}{a - y}$ il faut retrancher les termes où b ſe trouve, parceque la ligne KL des autres Figures, eſt ici nulle, la valeur de z ſera donc $\frac{xy}{a - y} = \frac{yy}{p}$; $pxy = ayy - y^3$; $yy - ay = -px$. Equation à la parabole.

XII.

Fig. 61.

La courbe KD, Fig. 62. eſt une parabole quarrée, dont le parametre eſt KP, p; KB une abſciſſe, z; BD, une appliquée, v; ſon équation ſera donc $vv = pz$; $v = \sqrt{pz}$. L'on forme la courbe KCF autour du même diametre KB, en prenant pour chacune de ſes appliquées BC, y, moyenne proportionelle entre la coupée KB & l'ordonnée correſpondante BD, de la parabole KD. Ainſi l'on a cette proportion $KB, z : BC, y :: BC, y : BD, v = \sqrt{pz}$; $yy = z\sqrt{pz}$; $y^4 = pz^3$, parabole du quatriéme degré; & $z = \sqrt[3]{\frac{y^4}{p}}$.

Que le diametre KB de la parabole KCF ſoit appliqué ſur la directrice KA Fig. 57. & que la regle GL paſſe par le point L du diametre KB. L'interſection de la regle & de la courbe KCF décrira une nouvelle courbe, pour laquelle on aura $z = \sqrt[3]{\frac{y^4}{p}} = \frac{xy - by + ab}{a - y}$; cubez les deux membres. Multipliez enſuite par p, & par $a^3 - 3aay + 3ayy - y^3$. L'équation ſera $a^3y^4 - 3aay^5 + 3ay^6 - y^7 = px^3y^3 - 3bpxxy^3 + 3abpxxyy + 3bbpxy^3 - 6abbpxyy + 3aabbpxy - b^3py^3 + 3ab^3pyy - 3aab^3py + a^3b^3p$. La courbe KCF eſt du ſeptiéme degré à cauſe de y^7 & du quatriéme genre, quoique ſa generatrice KCF ſoit du quatriéme degré & du ſecond genre.

Digitized by Google

Le même arrivera à une parabole du ſixiéme degré $y^6 = pz^5$, à une du 8^e $y^8 = pz^7$, &c.

§. 3.

Methode pour décrire une Courbe en cherchant pluſieurs de ſes points.

LEs Regles, que l'on donne ici, pour trouver autant que l'on veut de points, qui étant joints enſemble compoſent la courbe, dont on a l'équation; ne regardent que les équations, dont au moins une des inconnuës ne monte qu'au ſecond degré; & lorſque l'on n'a beſoin que de la Geometrie ordinaire, ou de la reſolution des Problêmes plans, qui demandent tout au plus l'extraction de la racine quarrée. Mais quand une des inconnuës, ou toutes les deux ſont élevées juſqu'au cube, quarré de quarré, & plus haut; il faut reſoudre des Problêmes ſolides, dont il ſera parlé dans le troiſiéme Livre de cette Geometrie. L'on donnera les regles pour décrire ces ſortes de courbes, L. 3, Part. 4, Sect. 2. Art. 5.

Ainſi la methode pour décrire les lignes courbes en cherchant pluſieurs de leurs points eſt generale. Ici nous apporterons quelques exemples pour rendre les regles plus intelligibles.

Il faut obſerver que cette ſorte de deſcription n'eſt pas Geometrique, car les courbes geometriques doivent ſe décrire par des mouvemens continus. Et à proprement parler, nous n'avons point les courbes tracées par pluſieurs points trouvez: mais nous les ſuppoſons décrites exactement, & nous conſiderons les proprietez, qui conviennent à de telles courbes exactement décrites.

J'ai dit, qu'on n'a pas les courbes, parceque les points, dont on conçoit qu'une courbe eſt compoſée, ſont infinis; il n'eſt donc pas poſſible de les trouver tous.

REGLE I.

IL faut par le moyen de l'équation à une courbe, trouver autant que l'on voudra de differens points, qui étant joints donnent la courbe, à qui cette équation convient. L'équation des lignes geometriques contient deux inconnuës, x & y; dont x repreſente les abſciſſes, qui partent toutes d'un même point & s'étendent ſur une ſeule ligne droite; les y ſont les ordonnées, qui ſont paralleles entr'elles.

L'on détermine d'abord l'angle, que l'on veut, que les inconnuës faſſent entr'elles, & l'on tire Fig. 63. les droites AB, AG, qui ſe coupent au point A, de ſorte que l'angle GAB ſoit celui des inconnuës. FIG. 63.

L'on prend enſuite le point A pour l'origine des x, la ligne AB pour celle, ſur laquelle les x ſeront; la partie AB pour les valeurs poſitives de x, de ſorte que les $+x$ aillent de A vers B; la partie AP par conſequent pour les valeurs negatives de x, qui iront de A vers P.

Quoique les ordonnées y doivent être ſeparées, puiſqu'elles ſont paralleles, on commence pourtant par les prendre ſur la ligne AG, en regardant le point A comme leur origine ; & l'on détermine que les valeurs vrayes $+y$ s'étendront de A vers G, & les fauſſes $-y$ de A vers L. Ainſi le point A eſt l'origine commune des x & des y. Mais quand on connoîtra & la grandeur d'une y, & le point de la ligne AB, où elle doit être appliquée, on la menera égale & parallele à la ligne, qui exprime ſa valeur ſur la ligne AG.

REGLE II.

ON cherche une des inconnuës, & l'on détermine l'autre, c'eſt-à-dire, qu'on lui aſſigne une grandeur connuë. Lorſque les inconnuës x, y ſont élevées à differens degrez, comme dans l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$; l'on cherche x qui eſt la moins élevée, & l'on détermine y qui a une plus haute dimenſion ; & l'on fait cette égalité $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, dans laquelle x que l'on cherche eſt ſeule d'un côté, & tous les autres termes ſont de l'autre. Lorſque les inconnuës ſont élevées au même degré, comme dans $yy = 2ax + xx$; l'on peut chercher & déterminer celle que l'on veut. Ici pourtant il vaut mieux chercher y que x, parceque l'équation en ſera plus ſimple, car ſi l'on cherche y, l'équation, où elle ſera ſeule d'un côté, eſt $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$, qui ſe forme de la propoſée $yy = 2ax + xx$, en extrayant la racine quarrée des deux membres, or yy a pour racine quarrée non ſeulement $+y$, mais encore $-y$, au lieu que, ſi c'eſt x que l'on cherche, l'équation ſera $x = -a \pm \sqrt{aa + yy}$, qui ſe forme de la propoſée $xx + 2ax = yy$, ou de $xx + 2ax + aa = aa + yy$, dont la racine poſitive eſt $x + a = \sqrt{aa + yy}$, $x = -a + \sqrt{aa + yy}$; & la negative $-x - a = \sqrt{aa + yy}$, $x = -a - \sqrt{aa + yy}$.

L'inconnuë, que l'on détermine, peut être égalée à une grandeur connuë quelconque. Pour l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ l'on peut faire $y = b$, & l'équation ſe change en celle-ci, $x = \frac{b^3 - 2abb - aab + 2a^3}{ab}$. Mais l'operation devient plus facile, ſi l'on détermine l'inconnuë à être une partie aliquote, ou un multiple de la grandeur connuë de l'équation, lorſque l'équation n'en renferme qu'une de connuë ; ou ſi elle en contient pluſieurs, à celle que l'on voudra, plûtôt cependant à celle, que l'on prend pour l'unité qu'à une autre. Soit $y = 3a$, l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay}{ay} \pm 2a^3$ devient celle-ci $x = \frac{27a^3 - 18a^3 - 3a^3 + 2a^3}{3aa} = \frac{8}{3}a$. Soit $y = \frac{1}{2}a$, l'on fera $x = \frac{\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3 + 2a^3}{\frac{1}{2}aa} = \frac{9}{4}a$.

L'inconnuë que l'on cherche demeure inconnuë, l'inconnuë que l'on détermine

détermine devient connuë. Ainſi le Problême qui étoit indéterminé, devient déterminé dans chaque operation, où l'on aſſigne une nouvelle valeur à une des inconnuës. Chaque operation à cauſe de ces differentes valeurs découvre un point different de la courbe.

REGLE III.

ON diviſe la ligne, ſur laquelle l'inconnuë, qu'on détermine, ſe prend, en pluſieurs parties égales les unes à l'unité, les autres à ſes parties, & à ſes multiples, & cela des deux côtez du point qui eſt le commencement des inconnuës; comme Fig. 63. Si c'eſt y que l'on détermine, & qui ſe prenne ſur la ligne AG, l'on prendra $AE = a$ qui eſt l'unité $= EG = GH = AI = IL$; $AM = \frac{1}{2}a = Aa$; $AD = \frac{3}{4}a = Af$, &c. Plus on veut trouver de points de la courbe qu'il faut décrire, plus grand doit être le nombre de ces diviſions, puiſque chacune donne un point de la courbe. Fig 63.

L'on veut connoître quel point de la courbe l'on trouve en ſuppoſant $y = \frac{1}{2}a$, pour l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, pour y je ſubſtituë ſa valeur $\frac{1}{2}a$, pour yy ſa valeur $\frac{1}{4}aa$, pour y^3 ſa valeur $\frac{1}{8}aaa$. ainſi l'équation eſt $x = \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \setminus * \frac{1}{2}aa = \frac{9}{8}a^3 \setminus \frac{1}{2}aa = \frac{2}{4}a$. Je coupe donc AF, $x = \frac{2}{4}a$; par le point F je mene FK parallele à AG, & par M je mene MK parallele à AF; le point K, où FK, MK ſe coupent, eſt un point à la courbe cherchée, & $KF = AM$ eſt $y = \frac{1}{2}a$ appliquée au point K de la courbe; AF, $x = \frac{2}{4}a$ eſt l'abſciſſe du diametre AB, qui répond à l'appliquée KF.

* Le caractere \ ſignifie diviſé.

On peut faire en même tems $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$ car les termes de ces deux équations ont la même valeur, & ſubſtituer pour $+y$ ſa valeur $-\frac{1}{2}a$, pour yy ſa valeur $+\frac{1}{4}aa$, pour y^3 ſa valeur $-\frac{1}{8}a^3$, & l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ deviendra $x = -\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^3 + 2a^3 \setminus -\frac{1}{2}aa = +\frac{15}{8}a^3 \setminus -\frac{1}{2}aa = -\frac{15}{4}a$. ou $-x = \frac{15}{4}a$.

Sur AP, où ſont les valeurs negatives de x, prenez Ad, $-x = \frac{15}{4}a$, & ſur AI, où ſont les valeurs negatives de y, prenez Aa, $-y = \frac{1}{2}a$; & par le point a menez ab parallele à Ad, par d menez db parallele à AI, le point b où ab, db ſe coupent, eſt un point à la courbe cherchée; & $db = Aa$ eſt $-y = \frac{1}{2}a$ appliquée au point b de la courbe; Ad, $-x = \sqrt{\frac{1}{4}a}$ eſt l'abſciſſe du diametre AB, qui répond à l'appliquée db.

On fait $y = Ah\ \frac{1}{2}a$, & l'on veut connoître quel point de la courbe aura une ordonnée égale à Ah; par la ſubſtitution l'équation de la courbe ſe change en $x = \frac{27}{8}a^3 - \frac{9}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3 + 2a^3 \setminus \frac{1}{2}aa = -\frac{5}{2}a^3 \setminus \frac{1}{2}aa = -\frac{5}{12}a$, ou $-x = \frac{5}{12}a$. C'eſt pourquoi ſur AP, où ſont les $-x$, il faut prendre Al, $-x = \frac{5}{12}a$; & par le point l tirer lg parallele à AG, par le point h tirer hg parallele à AP; le point g, où lg, gh ſe coupent, eſt à la courbe cherchée; & $gl = Ah$ eſt $y = \frac{3}{2}a$ appliquée au point g

de la courbe ; Al eſt la coupée du diametre AB, qui répond à l'appliquée gl.

Soit AZ, $-y=\frac{3}{2}a$, ou $y=-\frac{3}{2}a$; la ſubſtitution donnera $x=-\frac{27}{8}a^3-\frac{9}{4}a^3+\frac{3}{2}a^3+2a^3\sqrt{}-\frac{3}{2}aa=-\frac{35}{8}a^3\sqrt{}-\frac{3}{2}aa=\frac{35}{12}a$. Sur AB, où les $+x$ ſe prennent, je coupe $AY=x=\frac{35}{12}a$; & par le point Y je mene YN parallele à AI, & par le point Z je mene ZN parallele à AB ; le point N, où YN, ZN ſe coupent, eſt un point à la courbe cherchée ; & $YN=AZ$, $-y=\frac{3}{2}a$ eſt l'appliquée au point N de la courbe ; AY, $x=\frac{35}{12}a$ eſt la coupée du diametre AB, qui répond à l'appliquée YN.

On cherchera de la même maniere autant de points, que l'on voudra de la courbe, dont on a l'équation ; & l'on verra que 1. lorſqu'on ſubſtituë une valeur arbitraire de $+y$ dans l'équation, & que la valeur de x ; qui en reſulte, eſt poſitive ; le point cherché ſera dans l'angle BAG, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $+x$ & les $+y$. 2. Lorſqu'on ſubſtitue la valeur arbitraire poſitive de y, & que la valeur de x, qui en reſulte, eſt negative ; le point cherché ſera dans l'angle PAG, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $-x$ & les $+y$. 3. Lorſqu'on ſubſtituë la valeur negative arbitraire de y, & que la valeur de x, qui eſt produite, eſt poſitive ; le point cherché ſera dans l'angle BAI, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $+x$ & les $-y$. 4. Lorſqu'on ſubſtituë la valeur negative arbitraire de y, & que la valeur de x, qui eſt produite, eſt negative ; le point cherché ſe trouve dans l'angle PAI, c'eſt-à-dire du côté, où l'on prend les $-x$ & les $-y$. Il faut pourtant excepter les cas, dans leſquels les points cherchez ſe rencontrent ſur la ligne GA. Ce ſera la même choſe lorſqu'on ſubſtituëra la valeur arbitraire de x, pour trouver la valeur de y.

REGLE IV.

Fig. 63. ON n'a $x=0$, qu'au point A Fig. 63. qui eſt le commencement des x ; c'eſt pourquoi lorſque par la ſubſtitution de la valeur de y, l'équation ſe reduit à $x=a$, c'eſt une marque que la courbe rencontre la ligne GA des y en celui de ſes points, où l'appliquée y a la valeur qu'on lui a ſuppoſée.

Prenons $y=AE$, a ; la ſubſtitution changera l'équation $x=\frac{y^3-2ayy-aay+2a^3}{ay}$ en $x=\frac{a^3-2a^3-a^3+2a^3}{aa}=\frac{0}{aa}=0$ étant donc $y=a$, l'on trouve $x=0$; ce qui ſignifie que lorſque l'appliquée à la courbe cherchée eſt égale à a, la courbe rencontre la ligne AG, comme en effet au point E de la courbe l'on aura AE, $y=a$, $x=0$.

On n'a $y=0$, que ſur la ligne BAP, de laquelle tous les y ſortent ; c'eſt pourquoi lorſque par la ſubſtitution de la valeur de x, l'équation ſe reduit à $y=0$, l'on doit conclurre que la courbe rencontre la ligne AB des x en celui de ſes points, où l'abſciſſe x a la valeur, qu'on lui a ſuppoſée. Voyez Problème 2. 3. 4.

Il n'y a que le point *A* commencement des *x* & des *y*, où l'on ait tout enſemble $x = o$, $y = o$. C'eſt pourquoi s'il arrive qu'en ſuppoſant $x = o$, l'équation ſe reduiſe à $y = o$; ou qu'en ſuppoſant $y = o$, l'équation ſe reduiſe à $x = o$; la courbe rencontrera les lignes *AB*, *AG* au point *A*. Voyez Probléme 2. 3. 4.

Lorſqu'il arrive, qu'en ſuppoſant une des inconnuës égale à zero, ou à une grandeur quelconque, l'autre inconnuë devient égale à une fraction telle que $\frac{aa}{o}$, dont le denominateur eſt zero ; la valeur de cette inconnuë eſt alors regardée comme infinie : parceque la valeur d'une fraction eſt d'autant plus grande, que ſon denominateur eſt plus petit, comme on le voit ici, $\frac{16}{8} = 2$, $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{16}{2} = 8$, $\frac{16}{1} = 16$, $\frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$, $\frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$, $\frac{16}{\frac{1}{8}} = 128$, &c. Donc ſi l'on diviſe 16 par un nombre infiniment petit, ou, ce qui eſt le même, par zero, $\frac{16}{o}$, la valeur de cette fraction ſera infiniment augmentée, & par conſequent infiniment grande. Bien plus la ligne dont la valeur eſt une fraction quelconque $\frac{aa}{o}$, dont zero eſt le denominateur, ſera une aſymptote de la courbe cherchée, puiſque l'extrêmité de cette ligne ne doit rencontrer la courbe qu'à une diſtance infinie, c'eſt-à-dire, qu'elle ne la rencontrera jamais. Soit $y = o$, l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay - 2a^3}{ay}$ devient $x = \frac{o - o - o + 2a^3}{o}$, $x = \frac{2a^3}{o}$. C'eſt-à-dire que la courbe cherchée eſt telle, que lorſque ſon appliquée *y* eſt égale à zero, ou, ce qui eſt le même, lorſque la courbe rencontrera la ligne *AB* des *x* ; alors la valeur $\frac{2a^3}{o}$ de *x* ſera infiniment grande ; d'où il ſuit, que la courbe rencontrera la ligne *AB* à une diſtance infinie du point *A*, ou qu'elle ne la rencontrera jamais, & *AB* eſt ſon aſymptote.

REGLE V.

ON commence ordinairement par égaler les deux inconnuës l'une aprés l'autre à zero, afin de connoître d'abord, les points, où la courbe coupe les lignes *AB* des *x*, *AG* des *y*, & ſouvent d'autres choſes importantes pour la deſcription de la courbe cherchée.

Nous venons de voir qu'étant $y = o$, l'on a $x = \frac{2a^3}{o}$, qui fait connoître que la ligne droite *AB* eſt aſymptote de la courbe cherchée, s'il n'y en a qu'une, & des courbes cherchées, s'il y en a pluſieurs.

Faiſons à preſent $x = o$. l'équation $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$ ſe change en $o = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, & multipliant par *ay*, $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o \times ay = o$. C'eſt pourquoi l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o$ doit me découvrir toutes les valeurs que *y* a, lorſque $x = o$, où tous les points dans leſquels la courbe, ou les courbes rencontrent la ligne *GA* des *y*. Et comme une inconnuë a autant de valeurs dans une équation, qu'elle a de dimenſions dans cette équation ; *y* aura trois va-

leurs, & rencontrera la ligne AG en trois points, ſi ces trois valeurs ſont réelles.

Suivant la methode, que M. DESCARTES enſeigne, L. 3. Part. 3. Sect. 2. pour connoître les racines d'une équation, ou les valeurs de l'inconnuë d'une équation, je diviſe $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = o$ par $y - a = o$, la diviſion eſt juſte, & le quotient eſt $yy - ay - 2aa = o$; que je diviſe par $y + a = o$, la diviſion ſe fait juſte, & le quotient eſt $y - 2a = o$.

Ce qui donne à connoître, qu'étant $x = o$, y a trois valeurs, qui ſont les trois racines de l'équation; la premiere, qui eſt poſitive $y - a = o$, ou $y = a$; la ſeconde, qui eſt negative $y + a = o$, ou $y = -a$, ou $-y = a$; la troiſiéme, qui eſt poſitive $y - 2a = o$, ou $y = 2a$.

La premiere $y = a$ montre que la courbe cherchée rencontre la ligne AG au point E, puiſqu'à ce point l'on a $x = o$, & l'appliquée AE, $y = a$.

La ſeconde $-y = a$, montre que la courbe rencontre la ligne AG au point I, puiſqu'à ce point l'on a $x = o$, & l'appliquée AI, $-y = a$.

La troiſiéme $y = 2a$ montre que la courbe rencontre la ligne AG au point G, puiſqu'à ce point on a $x = o$, & l'appliquée AG, $y = 2a$.

On découvre encore ici 1. que, puiſque la courbe rencontre la ligne AG aux points E, I, qui ſont ſeparez par l'aſymptote AB, il n'y a pas une ſeule courbe, mais pour le moins deux, dont l'une eſt du côté de E, & l'autre du côté de I. 2. Que puiſque la courbe rencontre la ligne AG aux deux points E, G, il faut, excepté que ces deux points ne ſoient encore ſeparez par une aſymptote, que l'on n'a pas encore découverte, il faut, dis-je, que la courbe, qui eſt du côté de E coupe la ligne GA aux points E, G, & qu'une partie de cette courbe deſcende au deſſous de GA, & que l'autre s'étende au deſſus.

On découvre auſſi des aſymptotes, quoiqu'on n'égale aucune inconnuë à zero. Nous avons trouvé, Sect. 2. Art. 3. n. 2. que l'équation de la Ciſſoïde Figure 44. eſt $x^3 = ayy - xyy$; laquelle quand il s'agit de décrire cette courbe, ſe reduit à $yy = \frac{x^3}{a-x}$, $\pm y = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$. Etant les AC, x; les CD, y; faiſons $x = a = AB$, l'équation ſe change en celle-ci, $\pm y = \sqrt{\frac{a^3}{a-a}} = \sqrt{\frac{a^3}{o}}$, qui fait voir que lorſque AB, x eſt égale au diametre AB, CD, y qui ſe confond alors avec BG eſt infiniment grande, que la Ciſſoïde n'aura cette ligne infiniment grande pour appliquée qu'à une diſtance infinie du point B. C'eſt à dire que la ligne BG ne rencontrera jamais la Ciſſoïde ADd, & qu'elle en eſt l'Aſymptote.

FIG. 44.

Aprés avoir égalé x, & y à zero, & examiné ce qui s'enſuit, l'on continuë à donner des valeurs differentes à l'inconnuë, que l'on veut déterminer; l'on peut commencer par les moindres; & l'on marque les points K, C, E, g, G, E, S, X. Fig. 63. que chaque operation donne. Tous ces points, quand on croit d'en avoir aſſez trouvé, ſe joignent par la ligne

FIG. 63.

courbe *K C g S X*, qui eſt la courbe cherchée. L'on joint de même les points *N*, *I*, *o*, *b*, de l'autre courbe, s'il y en a deux; &c. Il faut chercher un plus grand nombre de points là, où la courbure eſt plus ſenſible. FIG. 63.

REGLE VI.

SI en ſubſtituant des valeurs poſitives & negatives de l'inconnuë *y*, qu'on détermine, on trouve des valeurs réelles de l'autre inconnuë *x*; la courbe s'étendra des deux côtez, où l'on prend les $+y$ & les $-y$: comme Fig. 64. Problême 2. &, s'il y a pluſieurs courbes, l'une pourra occuper un côté & l'autre l'autre, comme Figure 63. la courbe *CEGS* eſt décrite du côté *AG*, où l'on prend les valeurs poſitives de *y*; & la courbe *NIo* du côté *AI*, où l'on prend les valeurs negatives de *y*.

Que ſi les valeurs réelles de l'inconnuë *x*, qu'on cherche, & qui viennent de la ſubſtitution de l'inconnuë $\pm y$ qu'on détermine, ſont réelles poſitives & negatives; la courbe, ou les courbes s'étendront auſſi des deux côtez, où l'on prend les valeurs poſitives & negatives de *x*, comme Fig. 63. les courbes occupent les eſpaces qui ſont du côté de *AB*, où ſont les $+x$, & du côté de *AP*, où ſont les $-x$.

Mais ſi en ſubſtituant la valeur negative de *y* par exemple, la valeur de *x* devient imaginaire & impoſſible; c'eſt un ſigne, que la courbe, que l'on veut décrire, n'entre pas dans l'eſpace, vers lequel l'on vouloit prendre les *x* & les $-y$. Il en eſt de même des autres ſubſtitutions; car les valeurs imaginaires marquent les bornes, au delà deſquelles les courbes ne s'étendent pas. Voyez Problême 2. 3. 4.

Il arrive quelquefois, que deux courbes ſont ſeparées par un eſpace conſiderable, pour lequel ſeul il y a des valeurs imaginaires, comme Fig. 64. Les valeurs ne peuvent être imaginaires, que lorſqu'il y a une extraction de racine quarrée à faire, $y = \sqrt{-aa}$, parcequ'on ne peut extraire la racine quarrée de $-aa$, tout quarré ayant le ſigne $+$: pour la racine cubique l'on peut auſſi bien l'extraire d'une grandeur negative que d'une poſitive $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{-a^3}$, car comme $+a$ eſt la racine cubique de $+a^3$, de même $-a$ eſt la racine cubique de $-a^3$.

Enfin les differentes ſubſtitutions feront connoître de quels côtez une courbe s'étend, par quel eſpace elle ne paſſe pas; quand c'eſt qu'elle ſe forme, ce qui arrive lorſqu'elle rencontre deux fois la même ligne droite au même point; quand c'eſt qu'elle s'élargit à l'infini, ou en s'approchant ou en s'écartant toûjours davantage d'une ligne droite. C'eſt ce qui s'expliquera dans le Problême ſuivant.

PROBLEME I.

Décrire la Courbe, dont l'équation eſt $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

ON cherchera l'inconnuë x, & l'on déterminera l'inconnuë y, & l'équation ſe reduira à $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$. Soit $AE = a$, &c. V. Regl. 3. Fig. 63

L'on fera d'abord $x = o$, ce qui donne, comme on a dit Regle 5. $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = 6$. Dont les trois racines $y = a$, $y = 2a$, $-y = a$, montrent que la courbe, ou les courbes rencontrent la droite AG aux points E, G, I. $y = o$, donne $x = \frac{2a^3}{o}$ comme on a fait Regle 4. 5. ce qui découvre que la droite AB eſt une aſymptote. D'où l'on conclud, que cette aſymptote ſeparant le point I des points E, G, il faut qu'il y ait plus que d'une courbe.

Soit $y = \frac{1}{2}a$, l'équation ſera $x = \frac{9}{4}a$. AM eſt $y = \frac{1}{2}a$, coupez AF, $x = \frac{9}{4}a$ Fig. 63. Par le point M menez MK parallele à AB, par le point F, FK parallele à AG; le point K, où les lignes MK, FK ſe coupent eſt à la courbe $CEGS$.

Soit $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, l'équation ſera $x = -\frac{15}{4}a$. ou $-x = \frac{15}{4}a$. Aa eſt $-y = \frac{1}{2}a$, prenez $Ad = -x = \frac{15}{4}a$. Par le point a tirez ab parallele à AP, par le point d la ligne db parallele à AI; le point b, où les lignes ab, db ſe coupent, eſt à la ligne NIo.

Si l'on prend des valeurs de $\pm y$ moindres que $\frac{1}{2}a$, l'on trouvera que les courbes s'approchent toûjours de la ligne AB, la courbe $KCGE$ du côté de F, la courbe NIo du côté de d. Car ſoit $y = \frac{1}{4}a$, l'équation devient $x = \frac{105}{16}a$, qui eſt plus grande que $x = \frac{9}{4}a$ $MK = AF$, ſoit $-y = \frac{2}{4}a$ ou $y = -\frac{1}{4}a$, l'on aura $x = -\frac{135}{16}a$, ou $-x = \frac{135}{16}a$ qui eſt plus grande que $-x = \frac{15}{4}a = ab = Ad$. C'eſt pourquoi ces deux courbes s'approchent de plus en plus de la droite AB, qu'elles ne doivent pourtant jamais rencontrer : la ligne AB eſt donc l'aſymptote de ces deux courbes.

Soit $y = \frac{3}{4}a$. l'équation ſe change en $x = \frac{35}{48}a$. AD eſt $y = \frac{2}{4}a$, prenez $AB = \frac{35}{48}a$; le point C où les lignes DC, BC ſe coupent, eſt à la courbe $CEGS$, qui s'approche de la droite GA.

Soit $-y = \frac{2}{4}a$, ou $y = -\frac{1}{4}a$, l'on aura $x = -\frac{77}{48}a$, ou $-x = \frac{77}{48}a$. Af eſt $\frac{2}{4}a$, prenez AP, $-x = \frac{77}{48}a$, le point o, ou les lignes fo, Po ſe rencontrent, eſt à la courbe NIo, qui s'approche de la droite GA.

Soit $y = a$, l'on trouve $x = o$. la courbe $CEGS$ rencontre la droite AG au point E, étant AE, $y = a$.

Soit $-y = a$, $y = -a$, l'on fait $x = o$. la courbe NIo rencontre la droite AG au point I, étant AI, $-y = a$.

Soit $y = \frac{3}{2}a$, l'équation ſe change en $x = -\frac{5}{12}a$. ou $-x = \frac{5}{12}a$. Ah eſt $y = \frac{3}{2}a$. coupez Al, $-x = \frac{5}{12}a$; menez par le point h la ligne

bg parallele à AP, & par le point l la ligne lg parallele à GA; le point g du concours eſt à la courbe $CEGS$, qui aprés avoir coupé la droite GA au point E, deſcend au deſſous de la même GA.

Soit $-y = \frac{1}{2}a$, $y = -\frac{1}{2}a$, la ſubſtitution donne $x = \frac{35}{12}a$. AZ eſt $-y = \frac{1}{2}a$, coupez AY, $x = \frac{35}{12}a$; le point N où les deux lignes ZN, YN ſe coupent, eſt un point à la courbe NIo, qui après avoir coupé la droite GA au point I, monte au deſſus de cette même ligne.

Soit $y = 2a$, la ſubſtitution donne $x = \frac{0}{2aa} = o$. & la courbe $CEGS$ rencontre la ligne GA au point G, étant $AG = 2a$. Ainſi l'eſpace EgG eſt fermé par la droite EG.

Soit $-y = 2a$, $y = -2a$. l'on trouve $x = 6a$. la courbe NIo s'écarte de la droite AB du côté de N. Le point, que donne $x = 6a$ eſt trop éloigné du point A, pour qu'on le marque dans la Figure.

Soit $y = \frac{1}{2}a$, la ſubſtitution donne $x = \frac{21}{20}a$. AT eſt $\frac{5}{2}a$, AR eſt $x = \frac{21}{20}a$. Les lignes TS, RS donnent dans leur interſection le point S à la courbe $CEGS$, qui après avoir coupé la droite AG au point G monte vers X.

Soit $-y = \frac{1}{2}a$, $y = -\frac{1}{2}a$. l'on aura $x = \frac{189}{20}a$. La courbe NIo s'écarte toûjours davantage des droites AI, AB.

Soit $y = 3a$, l'on trouvera $x = \frac{1}{3}a$. AH eſt $y = 3a$, AQ, $x = \frac{8}{3}a$. le point X eſt à la courbe $CEGS$, qui monte en s'éloignant des lignes AG, AB.

L'on peut chercher pluſieurs autres points, ſur tout dans l'eſpace EgG, tous les points trouvez étant joints donneront les courbes $CEGS$, NIo.

PROBLEME II.

Décrire une courbe, dont l'équation eſt $yy = 2ax + xx$.

VOus chercherez y, & vous déterminerez x par la Regle 2. & vous aurez en extrayant les racines quarrées $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$. Fig. 64. Fig. 64.

Vous tirerez les lignes AB, AD, qui feront l'angle, que les inconnuës doivent faire. Le point A ſera le commencement des x & des y; les valeurs poſitives de x ſe prendront du côté de C, les negatives du côté de B; les valeurs poſitives de y, du côté de E, les negatives du côté de D. Soit $AB = 2a$. Diviſez la ligne BP en parties & en multiples de a.

Soit $x = o$. l'équation $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$ devient $\pm y = o$. Donc au point A, ou $x = o$, l'on a auſſi $y = o$, & la courbe rencontre la ligne AB, d'où ſortent toutes les y, au point A.

Soit $y = o$. L'équation $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$ devient $\sqrt{2ax + xx} = o$, ou en quarrant les deux membres, $2ax + xx = o$. Diviſez par $x = o$, le quotient eſt $2a + x = o$, ou $x = -2a$, $-x = 2a$. Il y a donc deux racines pour x, lorſque $y = o$; la premiere $x = o$, qui marque,

Fig. 64 comme auparavant, qu'au point A, ou $x = 0$, l'on a auſſi $y = 0$, & que la courbe rencontre la ligne AB au point A. La ſeconde racine eſt $-x = 2a$, qui fait connoître, que ſi l'on prend AB, $-x = 2a$, l'on aura encore au point B, $y = 0$, & que la courbe rencontrera encore la ligne AB au point B.

Soit $x = \frac{1}{4}a$. L'équation devient $\pm y = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{1}{16}aa} = \sqrt{\frac{9}{16}aa} = \frac{3}{4}a$.

Soit AC, $x = \frac{1}{4}a$; & parceque la valeur poſitive de y eſt égale à ſa valeur negative, prenez AE, $+y = AD$, $-y = \frac{3}{4}a$; par les points E, D, menez EG, DF paralleles à AB, & par le point C la ligne GCF parallele à AD; les points G, F où ces lignes ſe coupent, ſont à la courbe GAF: & $CG = AE$, $+y$; $CF = AD$, $-y$.

Soit $-x = \frac{1}{4}a$, ou $x = -\frac{1}{4}a$. L'équation eſt $\pm y = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{16}aa} = \sqrt{-\frac{7}{16}}$ racine imaginaire, qui marque qu'en allant de A vers B, qui eſt le côté, vers où l'on prend les valeurs negatives de x, il y a un eſpace, dans lequel la courbe, ou les courbes cherchées ne paſſent point. D'ailleurs comme le point B appartient à une courbe, & le point A à une autre, il y aura pour le moins deux courbes.

Soit $x = a$. L'équation ſe change en $\pm y = \sqrt{2aa + aa} = \sqrt{3aa}$. Soit $AP = x = a$; coupez AL, $+y = AK$, $-y = \sqrt{3aa}$; menez par les points L, K les lignes LV, KR paralleles à AB, & par le point P la ligne VPR parallele à AD; les interſections V, R ſont deux points à la courbe GAF.

Soit $-x = a$, $x = -a$. l'équation ſera $\pm y = \sqrt{-2aa + aa} = \sqrt{-aa}$ racine imaginaire. Il n'y a donc point encore de courbe vers le point O, étant AO, $-x = a$.

Soit $x = 2a$. La ſubſtitution donne $\pm y \sqrt{4aa + 4aa} = \sqrt{8aa}$. Il eſt aiſé de voir, que dans l'équation $\pm y = \sqrt{2ax + xx}$, les valeurs poſitives de x croiſſant, les valeurs de $\pm y$ croîtront auſſi, & que la courbe GAF, va toûjours en s'élargiſſant vers V, & R.

Soit $-x = 2a$, ou $x = -2a$. La ſubſtitution donne $\pm y = \sqrt{-4aa + 4aa} = 0$. Ainſi comme on l'a déja trouvé en faiſant $y = 0$, une nouvelle courbe, qu'il faut maintenant décrire, paſſe au point B, étant AB, $-x = 2a$.

Soit $-x = \frac{9}{4}a$, $x = -\frac{9}{4}a$. La ſubſtitution produira $\pm y = \sqrt{-\frac{9}{2}aa + \frac{81}{16}aa} = \sqrt{\frac{9}{16}aa} = \frac{3}{4}a$, même valeur de $\pm y$, lorſqu'on a poſé $+x = \frac{1}{4}a$.

Soit donc Ag, $-x = \frac{9}{4}a$, AE, $+y = AD$, $-y = \frac{3}{4}a$; menez EI, DH paralleles à AB, & par le point g la ligne IgH parallele à AD; les points I, H où elles ſe coupent, ſont à la courbe IBH, & $gI = AE$, $+y$, $= gH = AD$, $-y = CG$, $+y = CF$, $-y$.

Soit $-x = 3a$, $x = -3a$. L'on trouvera $\pm y = \sqrt{-6aa + 9aa} = \sqrt{3aa}$,

$= \sqrt{3aa}$. même valeur de $\pm y$, que lorſqu'on a pris $x = a$: cette operation donnera les points T, S; & les appliquées lT, lS ſont égales aux appliquées PV, PR.

Soit $-x = 4a$, $x = -4a$. La ſubſtitution fait $\pm y = \sqrt{-8aa + 16aa} = \sqrt{8aa}$, même valeur de $\pm y$, que lorſqu'on a ſuppoſé $x = 2a$.

De ſorte que l'on trouvera les mêmes équations pour les valeurs poſitives de x en commençant depuis a, & pour les negatives en commençant depuis $2a$; ainſi les courbes GAF, IBH, dont les ſommets ſont A, B, éloignez de toute la ligne AB, $2a$, auront des appliquées égales à une diſtance égale de A & de B, & les deux courbes ſeront égales, & tournées vers deux côtez oppoſez. En effet ce ſont deux hyperboles oppoſées équilateres, dont le diametre determiné eſt AB.

PROBLEME III.

Décrire une Courbe, dont l'Equation eſt $y^3 - pzz$.

C'Eſt z qu'il faut chercher, y qu'il faut déterminer, & l'équation doit être $zz = \frac{y^3}{p}$, $\pm z = \sqrt{\frac{y^3}{p}}$.

Que les droites KL, KP, faſſent l'angle PKL des inconnuës; que les z & les y commencent au point K; que les $+z$ s'étendent vers B, les $-z$ vers b, les $+y$ vers P, les $-y$ de l'autre côté. Soit $KP = p$ qui eſt l'unité; diviſez la ligne KP prolongée à l'infini de part & d'autre en parties & en multiples de p. Fig. 58.

Soit $z = o$, l'équation ſe reduit à $\sqrt{\frac{y^3}{p}} = o$, $y = o$.

Soit $y = o$, l'équation eſt $\pm z = o$. C'eſt pourquoi étant mutuellement $z = o$ lorſqu'on poſe $y = o$, & $y = o$ lorſqu'on poſe $z = o$, il ſuit que la courbe rencontre la ligne PK au point K, ou $z = o$, $y = o$, puiſque ce point eſt l'origine des z & des y.

Soit $y = p$. La ſubſtitution donne $\pm z = \sqrt{\frac{p^3}{p}} = p$. Soit $KP = p$, & qu'on prenne KB, $+z = Kb$, $-z = p$. L'on trouvera à l'ordinaire les points C, c à la courbe cherchée.

Soit $-y = p$, ou $y = -p$. La ſubſtitution produit $\pm z = \sqrt{\frac{-p^3}{p}} = \sqrt{-pp}$ racine imaginaire. Et comme il eſt évident, que quelque valeur negative, que l'on aſſigne à y, l'on trouvera une racine imaginaire l'on doit conclurre, que la courbe ne paſſera pas du côté, où l'on avoit reſolu de prendre les $-y$.

Mais comme on trouvera des valeurs de $\pm z$, qui augmenteront à meſure qu'on augmentera les valeurs poſitives de y; l'on conclurra, que la courbe, qui commence au point K a deux portions, qui ſont toutes deux du côté de P, vers lequel les $+y$ ſe prennent, & dont l'une s'étend vers C, du

côté que l'on prend les + z, l'autre vers c, du côté que l'on prend les — z.

Cette courbe CKc eſt la ſeconde parabole cubique.

PROBLEME IV.

Décrire une Courbe, dont l'équation eſt $y^3 = ddz$.

L'On cherche z, l'on détermine y, l'équation eſt $z = \frac{y^3}{dd}$.

Fig. 60. On trouve Fig. 60. en faiſant le même que Fig. 58. Problême 3. que la courbe rencontre le diametre KB au point K commencement des inconnuës z, y.

Ce qu'il y a de particulier pour cette équation, c'eſt que toutes les fois, que l'on prendra une valeur poſitive de y, la valeur de z ſera auſſi poſitive: ſoit $y = d$; l'équation ſera $z = d$; & que toutes les fois, que l'on prendra une valeur negative de y, la valeur de z ſera auſſi negative, ſoit $-y = d$, $y = -d$; l'on aura $z = \frac{-d^3}{dd} = -d$, ou $-z = d$.

D'où il ſuit, que la courbe CKc a une portion KC du côté, où ſe doivent prendre les + z & les + y; & une autre Kc du côté, où l'on doit prendre les — z & les — y; & que cette même courbe ne paſſe point ailleurs.

§. IV.

Autres Methodes pour décrire les Courbes.

IL y a une infinité de Methodes pour décrire les courbes Geometriques. J'en rapporterai ici quelques-unes. Dans toutes il faut tirer de l'operation même l'équation propre de la courbe.

METHODE I.

LA premiére Methode conſiſte à ſe ſervir d'un inſtrument compoſé de pluſieurs Regles, dont les unes ſont fixes, & les autres mobiles; dans une des Regles mobiles il y a un point déterminé, qui par ſon mouvement décrit la courbe. L'inſtrument dont il a été parlé §. 1. 2. eſt de cette ſorte, il ſuffira d'apporter encore un exemple.

Fig. 65. AB, CD Fig. 65. ſont deux Regles fixes d'une grandeur déterminée & inégales, qui ſe coupent dans leur milieu I à angles droits. GE eſt une troiſiéme Regle mobile, égale à AI moitié de la plus grande AB des deux premieres Regles, & dont la partie EF eſt égale à CI moitié de la plus petite CD. L'on fait mouvoir de telle ſorte la Regle GE, que par le moyen d'une cheville miſe au point G, ce point ſoit toûjours ſur la petite Regle CD, tandis qu'une autre cheville miſe au point F tient toûjours ce point ſur la grande Regle AB. Je dis que le point E par ſon mouvement

décrira la demi-circonference ACB d'une ellipſe, tandis que le point G demeurera ſur ID, & l'autre demi-circonference ADB de la même ellipſe, tandis que le point G ſera ſur IC. La ligne AB eſt le grand axe, la ligne CD le petit axe, le point I le centre de l'ellipſe.

Dém. Prenons un point quelconque E, d'où l'on menera EH parallele à AB, & EK parallele à CD; $EH = KI$, $EK = HI$. Nommons les données AB, $2a$; AI, $a = GE$; CD, $2b$; CI, $b = FE$; $GF = GE - EF$, $a - b$. Les inconnuës IH, $x = EK$; EH, $y = KI$; GH, v; $GI = GH - IH$, $v - x$.

On aura donc GH, $v : GI$, $v - x :: GE$, $a : GF$, $a - b$. $v = \frac{ax}{b} = GH$; donc $GI = v - x = \frac{ax}{b} - x = \frac{ax - bx}{b}$. GH, $\frac{ax}{b} : GI$, $\frac{ax - bx}{b} :: HE$, $y : FI$, $\frac{ay - by}{a}$, donc $KF = KI - FI$, $y - \frac{ay + by}{a} = \frac{by}{a}$.

Maintenant dans le triangle EKF, $\overline{EF}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{KF}^2$, $bb = xx + \frac{bbyy}{aa}$, $\frac{bbyy}{aa} = bb - xx$, équation à l'ellipſe, dont l'axe eſt $2b = CD$, & parceque la proportion de ce diametre à ſon parametre eſt comme bb à aa, ſi l'on fait $bb : aa :: 2b : \frac{2aa}{b}$, ce quatriéme terme ſera le parametre du petit axe CD.

METHODE II.

ON ne doit pas rejetter de la Geometrie, dit M. DESCARTES, Part. 2. Sect. 3. Art. 6. *les lignes, où l'on ſe ſert d'un fil, ou d'une corde repliée, pour déterminer l'égalité, ou la difference de deux ou pluſieurs lignes droites, qui peuvent être tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche à certains autres points, ou ſur certaines autres lignes à certains angles, ainſi que nous avons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipſe & l'Hyperbole. Car encore qu'on n'y puiſſe recevoir aucunes lignes, qui ſemblent à des cordes, c'eſt-à-dire qui deviennent tantôt droites & tantôt courbes, à cauſe que la proportion, qui eſt entre les droites & les courbes n'étant pas connuë, & même je croi ne le pouvant être par les hommes, on ne pourroit rien conclurre de là, qui fût exact & aſſuré. Toutesfois à cauſe qu'on ne ſe ſert de cordes en ces conſtructions, que pour déterminer des lignes droites, dont on connoît parfaitement la longueur, cela ne doit point faire, qu'on les rejette.*

Les deux Exemples, que l'on donnera, ſont la deſcription de l'Ellipſe & de l'Hyperbole, tirée de ſa Dioptrique diſcours 8e. FIG. 65.

Exemple 1. *Les Jardiniers plantent en terre deux piquets, comme par exemple l'un au point* M, *l'autre au point* N, *& ayant noüé enſemble les deux bouts d'une corde ils la paſſent autour d'eux, en la façon que vous voyez ici* MEN. *Puis mettant le bout du doigt en cette corde, ils le conduiſent tout autour de ces deux piquets, en la tirant toûjours à eux d'égale force, afin de la tenir tenduë également, & ainſi décrivent ſur la terre la ligne courbe* ACB, *qui eſt une Ellipſe.*

Dém. Lorſque le piquet E, qui détruit la courbe ACB, eſt au point A,

la corde eſt ſur la ligne AB, & elle eſt égale à $NM + 2AM$, parcequ'elle eſt repliée depuis A juſqu'à M. Lorſque le même piquet E eſt au point B, la corde eſt ſur la ligne AB, & elle eſt égale à $MN + 2NB$, parcequ'elle eſt encore double depuis B juſqu'à N. Donc la corde $= MN + 2AM = MN + 2NB$; $2AM = 2NB$, $AM = NB$; & de plus la corde $MN + AM + NB = AB$. Et ſi le point I eſt le milieu de MN, l'on aura $IM = IN$, $IA = IB$. Du point E abbaiſſez la perpendiculaire EK ſur AB.

Nommons la corde $2a = AB$; $MN = 2b$; $IM, b = IN$: EK, y; IK, x; $MK = IM - IK$, $b - x$; $KN = IN + IK$, $b + x$; EM, z; $EN = 2a - z$.

Dans les triangles EKM, EKN rectangles en K, $\overline{EK}^2 = \overline{EM}^2 - \overline{MK}^2 = \overline{EN}^2 - \overline{NK}^2$, $yy = zz - bb + 2bx - xx = 4aa - 4az + zz - bb - 2bx - xx$; $z = \frac{aa - bx}{a}$. Et mettant cette valeur de z dans $yy = zz - bb + 2bx - xx$, elle ſe change en $yy = \frac{a^4 - 2aabx}{aa} + bbxx - bb + 2bx - xx$; multipliant par aa & diviſant par $aa - bb$, on trouve $\frac{aayy}{aa + bb} = aa - xx$, équation à l'ellipſe, dont l'axe $AB = 2a$; & ſi l'on fait $aa : aa - bb :: 2a : \frac{2aa - 2bb}{a}$, ce quatriéme terme eſt le parametre de l'axe AB. Les points M, N ſont les Foïers de l'Ellipſe.

FIG. 66. Exemple 2. *Un Jardinier plante derechef ſes deux piquets aux points* H, I; *& ayant attaché au bout d'une longue regle le bout d'une corde un peu plus courte, il fait un trou rond à l'autre bout de cette regle, dans lequel il fait entrer le piquet* I, *& une boucle à l'autre bout de cette corde, qu'il paſſe dans le piquet* H. *Puis mettant le doigt au point* X, *où elles ſont attachées l'une à l'autre, il le coule de là en bas juſques à* D, *tenant toûjours cependant la corde toute jointe & comme colée contre la regle depuis le point* X * *juſques à l'endroit, où il la touche, & avec cela toute tenduë: au moyen dequoi contraignant cette regle de tourner autour du piquet* I *à meſure qu'il abaiſſe ſon doigt, il décrit ſur la terre la ligne courbe* XBD, *qui eſt une partie d'une hyperbole. Et après cela tournant ſa regle de l'autre côté vers* Y, *il en décrit en même façon une autre partie* YD: *Et de plus s'il paſſe la boucle de ſa corde dans le piquet* I, *& le bout de ſa regle dans le piquet* H, *il décrira une autre Hyperbole* SKT *toute ſemblable & oppoſée à la precedente.*

* Le point F eſt ſur le point X, lorſqu'on commence à décrire l'hyperbole.

Dém. Dans tous les points B de la courbe DBX, la difference de la ligne IB & de la ligne BH, c'eſt la difference de la longueur de la regle IF, & de la longueur de la corde FBH. Car la longueur de la regle eſt $FB + BI$, & la longueur de la corde eſt $FB + BH$: or la difference de $FB + BI$ & de $FB + BH$ eſt la même que celle BI & de BH. Il faut auſſi remarquer que cette difference eſt par tout la même, puiſque la regle & la corde ſont partout les mêmes. Soit $IA = IF = HE$.

Lorſque le bout de la regle eſt en I, la boucle de la corde en H, & le poinçon B en D; la regle & la corde s'étendent ſur la ligne AI; & la dif-

ference de la regle IF ou de la ligne IA & de la corde FBH, c'eſt $ID - DH$, parceque la corde eſt repliée depuis D juſqu'en H. Lorſque le bout de la regle eſt tranſporté en H, la boucle de la corde en I, & que le poinçon B eſt en K; la regle & la corde s'étendent ſur la ligne HE; & la difference de la regle HE & de la corde, c'eſt $HK - KI$. Mais ces deux differences ſont égales, $ID - DH = HK - KI$. Pour ID ſubſtituez ſa valeur $IK + KD$, & pour HK ſa valeur $HD + DK$; vous ferez $IK + KD - DH = HD + DK - IK$; donc $2IK = 2HD$, $IK = HD$. De ſorte que ſi l'on diviſe DK en deux parties égales au point G, l'on aura $GI = GH$. De plus comme la difference de la ligne IB & de la ligne BH eſt par tout la même, ce ſera partout $ID - DH$, où mettant IK pour DH qui lui eſt égale, cette difference ſera $ID - IK = KD$. Ainſi la ligne KD eſt conſtamment dans tous les points des courbes YDX, SKF, la difference des lignes IB, BH. Ainſi par tout $BH = IB - KD$.

Nommons les connuës KD, $2a$ difference de la regle & de la corde connuës; IH, $2b$; $GH = GI$, b; GC, x; BC, y; BI, z; l'on aura $IC = GC + GI$, $x + b$; $CH = GC - GH$, $x - b$; $BH = BI - KD$, $z - 2a$.

Dans les triangles IBC, HBC, $\overline{BC}^2 = \overline{IB}^2 - \overline{IC}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{CH}^2$, $yy = zz - xx - 2bx - bb = zz - 4az + 4aa - xx + 2bx - bb$, d'où l'on forme $z = \frac{aa - bx}{a}$; & mettant cette valeur de z à ſa place dans $yy = zz - xx - 2xb - bb$, elle ſe change en $yy = \frac{a^4 + 2aabx + bbxx}{aa} - xx - 2bx - bb$; multipliez par aa, diviſez par $bb - aa$ vous aurez $\frac{aayy}{bb - aa} = xx - aa$, équation à l'Hyperbole, dont l'axe determiné eſt KD, $2a$, & ſi l'on fait $aa : bb - aa :: 2a : \frac{2bb - 2aa}{a}$, ce quatriéme terme eſt le parametre du diametre KD. Les points I, H ſont les foïers des deux Hyperboles oppoſées YDX, SKT.

L'on peut décrire des courbes avec une corde attachée à trois, quatre points, &c. Voyez Part. 4. Sect. 3. Art. 1. 2. 3. 4. n. 6.

METHODE III.

L'On peut ſe ſervir d'une courbe, dont on ſçait l'équation, pour former une nouvelle courbe. Voici quelques-unes des manieres dont on le peut faire.

1. L'on donnera une poſition nouvelle aux cordes, aux appliquées, aux coupées, aux tangentes de la courbe connuë, ce qui ſe peut en une infinité de manieres.

Exemple 1. La courbe connuë eſt AEB, Fig. 67. Prenez chaque corde AE & appliquez la perpendiculairement à l'axe AB, en la faiſant paſſer par le point E, c'eſt $CD = AE$. Joignez toutes les extrêmitez D, d des nouvelles appliquées; vous aurez décrit une nouvelle courbe ADd, dont vous connoîtrez aiſément l'équation. Soit AC, x; CE, y; AE, $z = CD$. FIG. 67.

Fig. 67. Le triangle ACE fournit cette équation $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2$, $zz = xx + yy$, formule generale.

Soit la courbe connuë AEB un cercle, dont le diametre $AB = 2a$, ſon équation eſt $yy = 2ax - xx$. Mettez cette valeur de yy à ſa place dans la formule; vous ferez $zz = 2ax$, équation à la parabole. La nouvelle courbe ADd eſt donc une parabole, dont AB, $2a$ eſt le parametre, $CD = AE$, z une ordonnée; AC, x une coupée.

Soit la courbe connuë AEB une Parabole dont le parametre eſt AB, $2a$. Son équation eſt $yy = 2ax$; & la formule devient $zz = xx + 2ax$, équation à l'hyperbole équilatere, dont l'axe déterminé eſt $2a$. Ainſi de la parabole on formera une hyperbole.

Soit la courbe connuë AEB une Ellipſe, dont l'axe eſt AB, $2a$. Son équation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$ ſubſtituez cette valeur de yy dans la formule, elle ſe changera en $zz = \frac{2apx - pxx + dxx}{d}$, équation à l'hyperbole, lorſque le diametre eſt plus grand, que ſon parametre; à l'ellipſe lorſqu'il eſt plus petit.

Soit la courbe connuë AEB une hyperbole, dont l'axe determiné eſt AB, $2a$; l'équation $yy = \frac{2apx + pxx}{d}$. La formule devient $zz = \frac{2apx + pxx + dxx}{d}$, équation à l'hyperbole.

Exemple 2. La courbe connuë eſt AdD Fig. 67. dont AB eſt l'axe. Prenez chaque ordonnée CD, & tranſportez la du ſommet A de l'axe, juſqu'à ce qu'elle touche la même appliquée CD en E, de ſorte que l'on ait toûjours la corde $AE =$ à l'appliquée CD. Joignez tous les points E, e; vous aurez une nouvelle courbe AeE, dont l'équation ſera connuë. Soit AC, x; CD, $y = AE$; CE, z.

Or $\overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2$ $zz = yy - xx$, formule generale.

Soit la courbe connuë AdD une parabole, dont le parametre eſt AB, $2a$; l'équation $yy = 2ax$. Mettez cette valeur de yy à ſa place dans la formule, vous trouverez $zz = 2ax - xx$, équation au cercle, la nouvelle courbe AeE eſt un cercle, dont le diametre eſt AB, $2a$.

Soit la courbe connuë AdD un cercle, dont le diametre eſt AB, $2a$; l'équation $yy = 2ax - xx$. La ſubſtitution changera la formule en $\frac{1}{2}zz = ax - xx$, équation à l'ellipſe, dont l'axe eſt a, & le parametre $2a$.

Soit la courbe connuë AdD une ellipſe, dont l'equation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$; la formule devient $zz = \frac{2apx - pxx - dxx}{d}$, à l'ellipſe.

Soit la courbe connuë AdD une hyperbole, dont l'équation eſt $yy = \frac{2apx + pxx}{d}$; l'on aura $zz = \frac{2apx + pxx - dxx}{d}$, à l'hyperbole, lorſque p plus grand que d; à l'ellipſe, lorſque p plus petit que d.

Exemple 3. La courbe connuë eſt AdD, dont l'axe AB eſt prolongé vers F: aux differens points d, l'on tire les tangentes dF; & à chaque

point F l'on applique $FG = Fd$, & perpendiculaire à l'axe. Si l'on joint tous les points tels que G, l'on aura une nouvelle courbe AG, dont on connoîtra l'équation de cette sorte.

Nommons Ac, x; cd, y; $Fd = FG, z$, $FA = v$, $Fc = x + v$.

Il faut avoir conclu de l'équation de la courbe connuë la valeur de chaque $v = FA$, qui dans la parabole est x, dans le cercle & l'ellipse $\frac{ax}{a-x}$, dans l'hyperbole $\frac{ax}{x+a}$, étant le diametre de ces trois courbes $2a$

Dans le triangle rectangle Fcd, $\overline{Fd}^2 = \overline{Fc}^2 + \overline{cd}^2$, $zz = xx + 2vx + vv + yy$ formule generale.

Soit la courbe connuë AdD un cercle, dont l'équation soit $yy = 2ax - xx$, en supposant le diametre $2a$. Dans la formule substituons pour yy sa valeur $2ax - xx$, nous aurons $zz = 2ax + 2vx + vv$; pour x mettons sa valeur $\frac{av}{a+v}$, puisque $v = \frac{ax}{a-x}$ l'équation sera $zz = 2av + vv$, équation à l'hyperbole. Ainsi la nouvelle courbe AG est une hyperbole équilatere, dans l'axe déterminé est $2a$.

Soit la courbe connuë AdD une parabole, dans laquelle $v = x$ & l'équation $yy = px$; substituons dans la formule px pour yy, elle deviendra $zz = xx + 2vx + vv + px$; substituons encore v pour x, & nous aurons $\frac{1}{4}zz = vv + \frac{1}{4}pv$, à l'hyperbole.

Soit la courbe connuë AdD une hyperbole équilatere, dont l'équation est $yy = 2ax + xx$ & pour laquelle $v = \frac{ax}{x+a}$, & $x = \frac{av}{a-v}$. Dans la formule mettons pour yy sa valeur, ce sera $zz = xx + 2vx + vv + 2ax + xx = 2xx + 2vx + 2ax + vv$. Mettons encore pour x sa valeur & nous trouverons $zz = \frac{2aavv}{aa-2av+vv} + \frac{2avv+2aav}{a-v} + vv$; $v^4 - 4av^3 + 3aavv - zzvv + 2a^3v + 2azzv - aazz = 0$, du quatriéme degré.

Soit la courbe connuë AdD une ellipse dont l'équation est $yy = \frac{2apx}{d} - pxx$, & pour laquelle $v = \frac{ax}{a-x}$, & $x = \frac{av}{a+v}$. Substituons dans la formule pour yy sa valeur; la formule se changera en $zz = xx + 2vx + vv + \frac{2apx-pxx}{d}$; mettons pour x sa valeur $\frac{av}{a+v}$, nous aurons $zz = \frac{aavv}{aa+2av+vv} + \frac{2avv}{a+v} + vv \frac{+2aapvv}{ad+dv} \frac{-aapvv}{aad+2adv+dvv}$, d'où l'on formera cette équation du quatriéme degré $dv^4 + 4adv^3 + 4aadvv + aapvv - dzzvv + 2a^3pvv - 2adzzv - aadzz = 0$.

2. L'on assignera le rapport que doivent avoir les abscisses, les ordonnées, les cordes, les tangentes avec la ligne, qui doit être l'appliquée d'une nouvelle courbe; ou avec une ligne connuë, & celle qui doit être l'appliquée de la nouvelle courbe.

Exemple 1. La courbe connuë est KDE Fig. 62. dont le diametre est KB, une abscisse KB, x; une ordonnée DB, y; il faut appliquer au même point B du diametre une ligne CB, z, moyenne proportionelle entre l'abscisse KB, & l'ordonnée BD. De sorte qu'en joignant tous les FIG. 62.

Fig. 61. points tels que C, l'on décrive une nouvelle courbe KCF. Puiſque $KB : BC :: BC : BD$; l'on aura $\overline{BC}^2 = KB \times BD$, $zz = xy$ formule generale.

Soit la courbe connuë KDE une parabole quarrée, dont l'équation eſt $yy = px$; donc $y = \sqrt{px}$. Subſtituons cette valeur de y dans la formule $zz = xy$; elle ſe changera en $zz = x\sqrt{px}$; quarrons les deux membres, $z^4 = px^3$, parabole du quatriéme degré KCF.

Si la courbe connuë KDE eſt un cercle; dont l'équation eſt $yy = 2ax - xx$; par la ſubſtitution de la valeur de y, on aura $z^4 = 2ax^3 - x^4$, la figure KCF ſera cercliforme, ou cercle du quatriéme degré.

Soit la courbe connuë KDE une ellipſe, dont l'équation eſt $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$: donc $y = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{d}}$; & l'équation de la nouvelle courbe elliptiforme $\frac{d}{p}z^4 = 2ax^3 - x^4$, du quatriéme degré.

Soit la courbe connuë une hyperbole, dont l'équation $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$; la nouvelle courbe hyperboliforme ſera $\frac{d}{p}z^4 = 2ax^3 + x^4$.

Fig. 62. Exemple 2. La courbe connuë eſt KDE, dont KB eſt le diametre, KB, x une abſciſſe, DB, y une ordonnée. Il faut appliquer au point B une ligne CB, z, qui ſoit moyenne proportionelle entre une donnée a & l'ordonnée DB, y. On aura $a : z :: z : y$. $zz = ay$, formule generale des nouvelles courbes KCF, qui ſe décriront en joignant les points trouvez, comme le point C.

Soit la courbe connuë KDE une parabole ordinaire, dont l'équation eſt $yy = px$, $y = \sqrt{px}$, la formule $zz = ay$ ſe changera en $zz = a\sqrt{px}$; $z^4 = aapx$, & la courbe KCF ſera une autre parabole quarrée.

Si la courbe connuë KDE eſt un cercle, dont l'équation $yy = 2ax - xx$ l'équation à la nouvelle courbe ACF ſera $z^4 = 2a^3x - aaxx$, &c.

3. Soit la courbe connuë AD, ſon ſommet A, autour duquel on fait
Fig. 63. rouler la ligne DG d'une grandeur déterminée, de telle ſorte qu'une de ſes extrêmitez D parcourant la courbe AD, ſon autre extrêmité G décrit la nouvelle courbe AG.

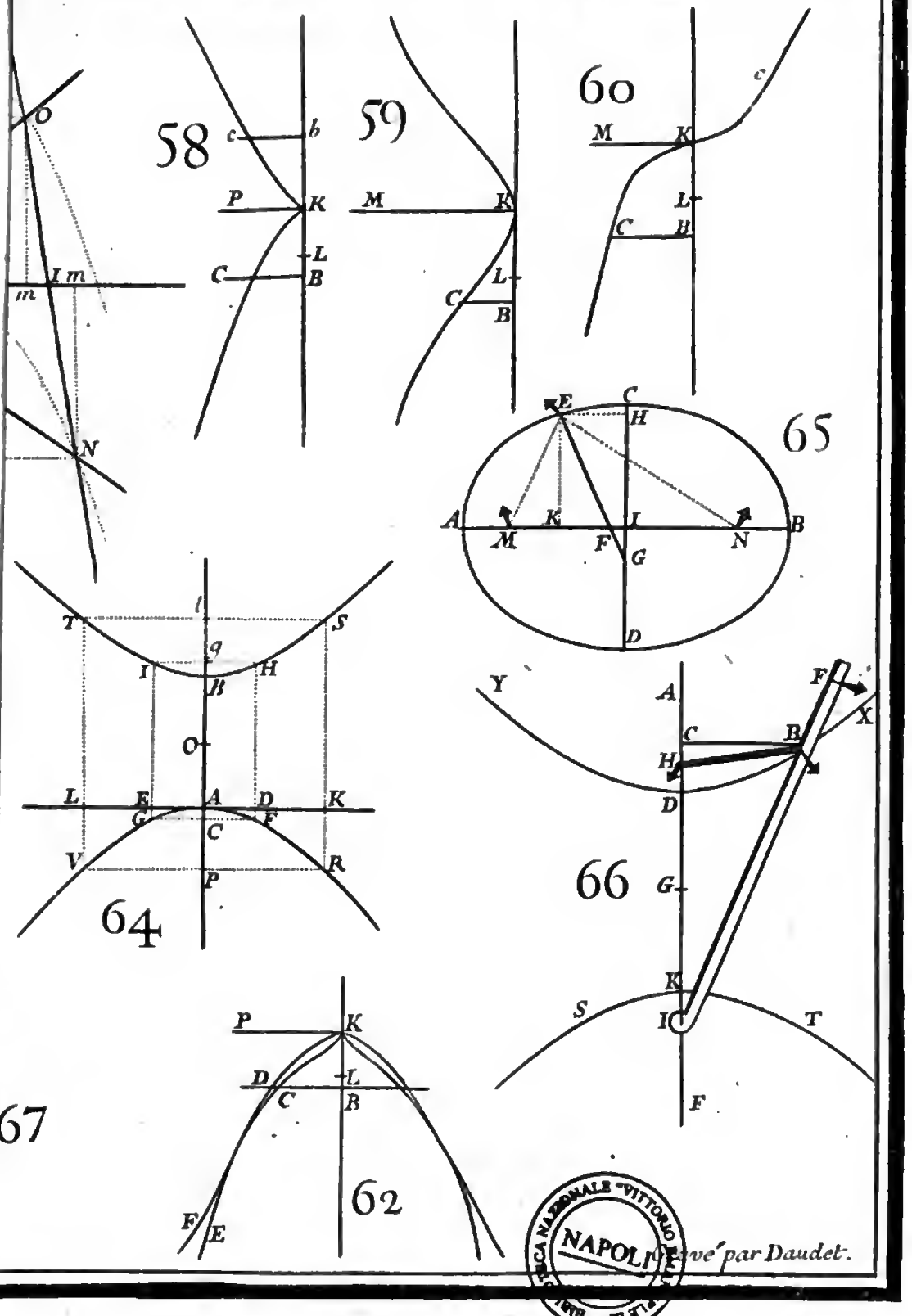
Suppoſons la ligne donnée dans la poſition DAG. Des points D, G, tirons ſur l'axe AC prolongé, les perpendiculaires DC, FG; l'on aura toûjours deux triangles équiangles & rectangles ACD, AFG.

Nommons la donnée DG, a; les inconnuës AC, x; CD, y; AF, z; FG, v; AG, f; AD ſera $DG - AG$, $n - f$.

A cauſe des triangles équiangles AC, $x : CD$, $y :: AF$, $z : FG$, v; $y = \frac{vx}{z}$. Et AC, $x : AD$, $a - f :: AF$, $z : AG$, f; $x = \frac{az - fz}{f}$.

Soit la courbe connuë AD une Parabole, dont l'équation eſt $yy = px$; $y = \sqrt{px} = \frac{vx}{z} : x = \frac{pzz}{vv} = \frac{az - fz}{f}$; $f = \frac{avv}{pz + vv}$

La formule generale eſt ici $\overline{AG}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FG}^2$, $ff = zz + vv$. Subſtituez pour f ſa valeur & vous aurez l'équation à la nouvelle courbe v^6. $- aav^4 + 2pzv^4 + zzv^4 + ppzzvv + 2pz^3vv + ppz^4 = 0$.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE" NAPOLI

Gravé par Daudet.

Digitized by Google

PARTIE SECONDE.

Suite de la Queſtion de Pappus.

M. DESCARTES parle en cet endroit premierement de la ſolution generale du Problême de Pappus en quelque nombre de lignes, que la queſtion ſoit propoſée ; ſecondement de la ſolution particuliere du même Problême, lorſqu'il n'eſt propoſé qu'en trois ou quatre lignes ; à la fin il eſt parlé des lieux geometriques ; troiſiémement de la ſolution particuliere de ce Problême, lorſqu'il eſt propoſé en cinq lignes, l'on trouvera encore ici quelque choſe touchant la deſcription des lignes courbes.

SECTION I.

Solution generale du Problême de Pappus.

M. DESCARTES.

OR après avoir reduit toutes les lignes courbes à certains genres, il m'eſt aiſé de pourſuivre en la démonſtration de la réponſe, que j'ai tantôt faite à la queſtion de Pappus. Car premierement ayant fait voir-ci deſſus, * que lorſqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, l'équation qui ſert à déterminer les points cherchez, ne monte que juſques au quarré ; il eſt évident, que la ligne courbe, où ſe trouvent ces points, eſt neceſſairement quelqu'une de celles du premier genre : à cauſe que cette même équation explique le rapport, qu'ont tous les points des lignes du premier genre à ceux d'une ligne droite. Et que lorſqu'il n'y a point plus de huit lignes droites données, cette équation ne monte que juſqu'au quarré de quarré tout au plus, & que par conſequent la ligne cherchée n'eſt que du ſecond genre, ou au deſſous. Et que lorſqu'il n'y a point plus de douze lignes données, l'équation ne monte que juſques au quarré de cube, & que par conſequent la ligne cherchée n'eſt que du troiſiéme genre, ou au deſſous, & ainſi des autres. Et même à cauſe que la poſition des lignes droites don-

Suite de l'explication de la queſtion de Pappus miſe au Livre precedent.
* *L. 1. Part. 3. Sect. 4.*

nées peut varier en toutes ſortes, & par conſequent faire changer tant les quantitez connuës, que les ſignes + & — de l'équation en toutes les façons imaginables; il eſt évident, qu'il n'y a aucune ligne courbe du premier genre, qui ne ſoit utile à cette queſtion, quand elle eſt propoſée en quatre lignes droites; ni aucune du ſecond, qui n'y ſoit utile, quand elle eſt propoſée en huit; ni du troiſiéme, quand elle eſt propoſée en douze, & ainſi des autres. En ſorte qu'il n'y a pas une ligne courbe, qui tombe ſous le calcul, & puiſſe être reçûë en Geometrie, qui n'y ſoit utile pour quelque nombre de lignes.

Tout cet endroit ſe comprendra aſſez pour les choſes, que l'on a dites, L. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 1.

SECTION II.

Solution particuliere du Problême de Pappus, lorſqu'il n'eſt propoſé qu'en trois ou quatre lignes.

POur expliquer cette Section, qui paroît embarraſſée en quelques endroits à ceux, qui liſent la Geometrie de M. DESCARTES pour la premiere fois, il nous faut traiter 1° du reſte de la reſolution du Problême commencée, L. 1. Part. 3. Sect. 3. 2° Du commencement de la reſolution, qui peut-être commun à toutes les lignes, qui ſatisfont à ce Problême. 3° De la conſtruction particuliere à la ligne droite. 4° De la conſtruction commune aux trois Sections coniques, & au cercle. 5° De la conſtruction particuliere à la parabole. 6° De la conſtruction particuliere au cercle & à l'ellipſe. 7° De la conſtruction particuliere à l'hyperbole par rapport à ſes diametres. 8° De la conſtruction particuliere à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. 9° De la démonſtration que M. DESCARTES apporte de la ſolution du Problême appliqué au cercle. 10° Des lieux plans & ſolides, & de la façon de les trouver. L'on diviſera auſſi le texte de M. DESCARTES ſelon le beſoin.

ARTICLE I.

Suite de la reſolution du Problême commencée au Livre I.

M. DESCARTES.

MAis il faut ici plus particulierement, que je détermine & donne la façon de trouver la ligne cherchée, qui ſert en chaque cas, lorſqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données; & on verra par même moyen que le premier genre des lignes courbes n'en contient aucune autre que les trois Sections coniques & le cercle.

Solution de cette queſtion quand elle n'eſt propoſée qu'en trois, ou quatre lignes.

Reprenons Fig. 38. les quatre lignes AB, AD, EF, & GH données * ci-deſſus, & qu'il faille trouver une autre ligne, en laquelle il ſe rencontre une infinité de points tels que C, duquel ayant tiré les quatre lignes CB, CD, CF, & CH à angles donnez, ſur les données; CB multipliée par CF produit une ſomme égale à CD multipliée par CH. c'eſt à dire ayant fait $CB = y$; $CD = \frac{ezy+bcx}{zz}$, $CF = \frac{ezy+dek+dex}{zz}$, & $CH = \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$ l'équation eſt

$$yy = \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\ +cfglz\end{matrix}\right\}\begin{matrix}y\\ \end{matrix}\left\{\begin{matrix}-dezzx\\ -cfgzx\\ +bcgzx\end{matrix}\right\}y\begin{matrix}+bcfglx\\ \\ -bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz}$$

Au moins en ſuppoſant ez plus grand que cg: car s'il étoit moindre, il faudroit changer tous les ſignes + & —. Et ſi la quantité y ſe trouvoit nulle, ou moindre que rien en cette équation, lorſqu'on a ſuppoſé le point C en l'angle DAG, il faudroit le ſuppoſer auſſi en l'angle DAE, ou EAR, ou RAG, en changeant les ſignes + & — ſelon qu'il ſeroit requis à cet effet. Et ſi en toutes ces quatre poſitions la valeur de y ſe trouvoit nulle, la queſtion ſeroit impoſſible au cas propoſé. Mais ſuppoſons la ici être poſſible, & pour en abreger les termes, au lieu des quantitez $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ écrivons $2m$, & au lieu de $\frac{dezzx+cfgzx-bcgzx}{ez^3-cgzz}$ écrivons $\frac{2n}{z}$, & ainſi nous aurons $yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}$, dont la racine eſt $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx}{ez^3-cgzz} - \frac{bcfgxx}{cgzz}}$. Et derechef pour abreger, au lieu de $\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}$

Fig. 38. écrivons o, & au lieu de $\frac{nn}{zz} \frac{-bcfg}{ez^3-cgzz}$ écrivons, $\frac{p}{m}$, car ces quantitez étant données, nous les pouvons nommer comme il nous plaît; & ainſi nous avons $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, qui doit être la longueur de la ligne BC, en laiſſant AB, ou x indeterminée. Et il eſt évident que la queſtion n'étant propoſée qu'en trois ou quatre lignes, on peut toûjours avoir de tels termes; excepté que quelques-uns d'eux peuvent être nuls, & que les ſignes + & — peuvent diverſement être changez.

1. $CB \times CF$ produit $\frac{ezyy + dekx + dexy}{zz}$, & $CD \times CH$ produit $\frac{egzxyy + bcgzxy + cfglzy + bcfglx - cfgzxy - bcfgxx}{z^4}$. Reduiſez à la même denomination ces deux produits, qui par la ſuppoſition ſont égaux; laiſſez les denominateurs communs, & vous aurez $ez^3yy + dekzzy + dezzxy = egzzyy + bcgzxy + cfglzy + bcfglx - cfgzxy - bcfgxx$; ordonnez ainſi les termes $ez^3yy - cgzzyy = -dekzzy + cfglzy - cfgzxy - dezzxy + bcgzxy + bcfglx - bcfgxx$; diviſez tout par $ez^3 - cgzz$, vous trouverez $yy = \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\ +cfglz\end{matrix}\right\}y \left.\begin{matrix}-dezzx\\ -cfgzx\\ +bcgzx\end{matrix}\right\}y \left.\begin{matrix}+bcfglx\\ -bcfgxx\end{matrix}\right.}{ez^3 - cgzz}$

Afin d'abreger les termes, pour $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ écrivez $2m$, pour $+\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ écrivez $\frac{2n}{z}$, ou pour $\frac{-dezz - cfgz + bcgz}{ez^3 - cgzz}$ écrivez $-\frac{2n}{z}$. L'équation precedente ſe changera en celle-ci $yy = 2my - \frac{2nx}{z}y + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$. En ſubſtituant $2m$ & $2n$ plûtôt que m & n, l'on évite les nouvelles fractions que donneroit l'extraction de la racine quarrée, que l'on doit bientôt faire. L'on ne ſubſtituë point encore de valeur abregée aux deux derniers termes, parceque dans l'extraction de la racine quarrée l'on en trouvera deux autres, dont l'un aura x, l'autre xx; & alors l'on ſubſtituera une valeur abregée aux deux termes, qui auront x, & une autre aux deux termes, qui auront xx.

Je range ainſi l'équation $yy - 2my + \frac{2nx}{z}y = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$. Je mets de chaque côté $mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz}$, afin que le premier membre de l'équation ſoit exprimé par une formule de quarré; & je fais $yy - 2my + \frac{2nx}{z}y + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$. Enſuite j'extrais la racine quarrée de chaque côté, & je trouve $y - m + \frac{n}{z}x = \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$. C'eſt maintenant que

faiſant $-\frac{2mn}{z}+\frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}=o$, ou plûtôt $=\omega$, afin que o, qui peut ſignifier zero, ne faſſe point d'équivoque; & $\frac{nn}{zz}\frac{-bcfg}{ez^3-cgzz}=-\frac{p}{m}$, je diminuerai le nombre des termes, & je reduirai l'équation à $y-m+\frac{n}{z}x=\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$, $y=m-\frac{n}{z}x+\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$, valeur de la ligne CB.

L'on a ſubſtitué les quantitez $+2m$, $-\frac{2n}{z}$, $+\omega$, $-\frac{p}{m}$, parcequ'on ſuppoſe, qu'après avoir examiné la valeur des termes, à la place deſquels on les a miſes, l'on a trouvé que les unes étoient poſitives, les autres negatives. En effet l'on verra Art. 6. Exemp. 13. n. 2. 3. 4. que $b=1$. $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$, $e=2$, $f=1$; $g=\frac{2}{3}$, $k=3$, $l=5$, $m=1$, $n=\frac{1}{2}$, $\omega=4$, $p=\frac{3}{4}$, $z=1$, & que par conſequent ez^3-cgzz eſt $+1$, $\frac{cfglz-dekzz}{ez^3-cgzz}$ eſt $+2=+2m$, $\frac{-dezz-cfgz+bcgz}{ez^3-cgzz}$ eſt $-1=-\frac{2n}{z}$, & $n=\frac{1}{2}$, $\frac{-2mn}{z}+\frac{bcfgl}{ez^3-cgzz}$ eſt $+4=+\omega$, $\frac{nn}{zz}-\frac{bcfg}{ez^3-cgzz}$ eſt $-\frac{3}{4}=p$, ou $=\frac{p}{m}$ parceque $m=1$, & que $y=1-\frac{1}{2}x+\sqrt{1+4x-\frac{3}{4}xx}$.

M. DESCARTES dit dans une * de ſes Lettres, que touchant cette queſtion de Pappus, il n'a mis que la conſtruction, & la démonſtration, ſans en rapporter toute l'Analyſe. J'ai mis ici cette partie de la reſolution, qui avoit été omiſe. * *Tom 3. Lett. 69.*

2. L'équation $yy-2my+\frac{2nxy}{z}+mm-\frac{2mnx}{z}+\frac{nnxx}{zz}=mm-\frac{2mnx}{z}+\frac{nnxx}{zz}+\frac{bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}$, a deux racines quarrées; l'une poſitive, que l'on a extraite; l'autre negative, qui eſt $-y+m-\frac{nx}{z}=\sqrt{mm-\frac{2mnx}{z}+\frac{nnxx}{zz}+\frac{bcfglx-bcfgxx}{ez^3-cgzz}}$, ou $y=m-\frac{nx}{z}-\sqrt{mm+\omega x-\frac{p}{m}xx}$. M. DESCARTES s'eſt contenté d'extraire la racine poſitive parceque, comme on l'a dit, Liv. 1. Part. 1. Sect. 4. Regle 10. C'eſt la racine poſitive qui donne la ſolution de la queſtion pour la partie du lieu, pour laquelle on la cherche. La negative comme, on l'enſeigne dans les lieux geometriques, reſout auſſi la queſtion dans une autre partie du lieu.

3. ez eſt plus grand que cg, car, $ez=2$, $cg=1$. Ainſi $ez-cg=1$. & multipliant par $zz=1$. l'on a $ez^3-cgzz=1$. Mr DESCARTES veut que l'on range ainſi les termes $ez^3yy-cgzzyy=-dekzzy+cfglzy-cfgzxy-dezzxy+bcgzxy+bcfglx-bcfgxx$, ce qui, en diviſant tout par ez^3-cgzz, donne

$$yy=\frac{-dekzzy-cfgzxy+bcfglx-dezzxy+cfglzy+bcgzxy-bcfgxx}{ez^3-cgzz}$$

Il veut, dis-je, que l'on range ainſi les termes, afin que le quarré $ez^3yy-cgzzyy$ ſoit poſitif, ce que l'on a coutume d'obſerver.

Mais quoiqu'on eût autrement ordonné les termes, l'on auroit toûjours trouvé la même racine.

Soit donc $cgzzyy - ez^3yy = dekzzy - cfglzy + dezzxy + cfgzxy - bcgzxy - bcfglx + bcfgxx$; diviſons tout par $cgzz - ez^3$, l'on fera $yy = \frac{+dekzzy + dezzxy - bcfglx}{-cfglzy - bcgzxy + bcfgxx + cfgzxy}$ où les ſignes ſont tous changez dans le ſecond membre.

Afin d'abreger pour $\frac{+dekzz - cfglz}{cgzz - ez^3}$ il faut mettre $+2m$, comme on l'a mis n. 1. pour $\frac{-dekzz + cfglz}{ez^3 - cgzz}$, parceque ſi le numerateur & le denominateur de cette derniere fraction ſont poſitifs, & par leur diviſion donne le ſigne +; le numerateur & le denominateur de la premiere fraction ſeront tous deux negatifs, & donneront auſſi par leur diviſion le ſigne +. En effet, comme on le conclurra de ce qui ſe dira Art. 9. $\frac{-dekzz + cfglz}{ez^3 - cgzz}$ eſt $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{+dekzz - cfglz}{cgzz - ez^3}$ eſt $\frac{-2}{-1} = 2$.

De même ſi $\frac{-dezz - cfgz + bcgz}{ez^3 - cgzz}$ eſt $\frac{-1}{+1} = -1$, $\frac{+dezz + cfgz - bcgz}{cgzz - ez^3}$ eſt $\frac{+1}{-1} = -1$, ainſi il faut toûjours écrire $-\frac{2n}{z}$ pour la ſeconde fraction auſſi bien que pour la premiere.

L'on formera donc comme n. 1. $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} = \frac{-bcfglx + bcfgxx}{cgzz - ez^3}$ où le premier membre eſt le même que n. 1. & enſuite $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} \frac{-bcfglx + bcfgxx}{cgzz - ez^3}$, dont la racine ſera, $y - m + \frac{nx}{z} = \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} - \frac{bcfglx + bcfgxx}{cgzz - ez^3}}$. Dans laquelle pour $\frac{-2mn}{z} - \frac{bcfgl}{cgzz - ez^3} = \frac{-1}{+1} \frac{-5}{-1} = -1 + 5 = 4$, il faut encore mettre $+\omega = 4$, & l'on aura $+\omega x$; pour $+\frac{nn}{zz} + \frac{bcfg}{cgzz - ez^3} = \frac{+1}{+4} \frac{+1}{-1} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ il faut encore écrire $-p$, ou $-\frac{pm}{m}$, & l'on aura $-\frac{p}{m}xx$. De ſorte que la racine ſera comme auparavant $y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, $y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$.

4. M. DESCARTES veut, que ſi la quantité y ſe trouvoit nulle, ou moindre que rien, c'eſt-à-dire negative, lorſqu'on a ſuppoſé le point C dans l'angle DAG, il faudroit le ſuppoſer auſſi dans l'angle DAE, & enſuite, s'il étoit encore neceſſaire dans l'angle EAR, & enfin dans l'angle RAG: & ſi dans ces quatre poſitions la valeur de y ſe trouvoit nulle, la queſtion ſeroit impoſſible au cas propoſé.

La ligne $CB = y$ doit ſe terminer à la ligne donnée EAG par l'hypotheſe: donc tout l'eſpace, dans lequel elle peut être, eſt compris par les quatre angles, qui ſont autour du point A, & ces angles ſont DAG, DAE, EAR, RAG. Ainſi on peut la chercher dans ces quatre angles:

Tandis qu'on trouve la valeur de CB, y negative, l'on continuë à la chercher ailleurs, parceque c'eſt ſa valeur poſitive, que l'on veut trouver. Ce n'eſt pas, qu'une valeur negative trouvée ne ſerve de quelque choſe, puiſque, comme on l'a expliqué, L. 1. Part. 1. Sect. 4. Regl. 10. elle ſignifie, que la valeur poſitive eſt du côté oppoſé à celui, vers lequel on l'a ſuppoſé. Si CB ayant été poſé du côté de D par rapport à la droite AB, on trouvoit par le calcul ſa valeur negative; ce ſeroit une marque certaine, que la poſitive ſeroit de l'autre côté de AB, c'eſt-à-dire, du côté de S. Parceque, comme on le pratique dans les lieux geometriques, les CB, y ſortant toutes de la ligne AB, ſi les $-y$ vont du côté de D, les $+y$ s'étendront du côté de S.

* L'on oppoſe contre cet endroit, que le point C eſt par tous les quatre angles, que M. DESCARTES ne nomme point celui, où il ne peut pas être & que jamais la queſtion n'eſt impoſſible. A quoi M. DESCARTES répond ainſi. **. *Il eſt évident qu'il ſe trompe en ce qu'il dit, que je n'ai pas nommé l'angle, où le point* C *ne peut être; car ayant nommé tous les quatre angles, qui ſe font par l'interſection des deux lignes* DR *&* EG, *j'ai nommé toute la ſuperficie indéfiniment étenduë de tous côtez, & par conſequent tous les lieux, tant ceux où le point* C *peut être, que ceux où il ne peut pas être; en ſorte qu'il auroit été ſuperflu, que j'euſſe conſideré d'autres angles. Enfin il ſe trompe de dire que cette queſtion n'eſt jamais impoſſible: car bien qu'elle ne le ſoit pas en la façon que je l'ai propoſée, on la peut propoſer en pluſieurs autres, dont quelques-unes ſont impoſſibles, & je les ai voulu toutes comprendre dans mon diſcours.*

* *Tom. 1. Lett. 76.*

** *Lett. 77.*

L'on verra pluſieurs Exemples, dans leſquels les points C occupent les quatre angles DAG, DAE, EAR, RAG; & pluſieurs, dans leſquels ils ne les occupent pas tous quatre. L'on trouvera auſſi des Exemples, dans leſquels le même Problême, qui eſt impoſſible par rapport à un angle, eſt poſſible par rapport à un autre. Tels ſont à la ligne droite, Exemp. 6. à la parabole, Exemp. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 1. 2. 3. 5. 7. 9. 10. 11. 12. 14. à l'hyperbole rapportée à ſes diametres, Ex. 1. 2. 6. ſans parler des points où les x & les y commencent, & où étant nuls ils font le Problême impoſſible.

Il peut auſſi arriver qu'un Problême ſoit entierement impoſſible, car on peut y apporter des conditions, qui ne peuvent ſe trouver enſemble, & alors y ſera partout égale à zero, ou elle aura une valeur imaginaire. Voyez Sect. 3. Art. 5.

5. Monſieur DESCARTES reconnoît que dans cette équation

$$yy = \frac{-dekzzy - dezzxy + bcfglx - cfgzxy + cfglzy + bcgzxy - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$$

il y a deux défauts. Le premier, c'eſt qu'il a omis le cas, où il n'y a point de yy, mais ſeulement

Tom 3. Lett. 71.

xy avec quelques autres termes ; ce qui donne toûjours, ajoûte-t-il un lieu à l'hyperbole, dont l'aſymptote eſt la ligne AB, ou bien lui eſt parallele. Le ſecond défaut eſt, qu'il forme cette équation, ſans y mettre aucun terme, qui ſoit compoſé de quantitez connuës, & quoique cela ſoit bon, pourſuit-il, pour la queſtion de Pappus, à cauſe qu'il ne s'y en trouve jamais par la façon qu'il l'a reduite ; il en falloit pourtant mettre un, pour ne rien omettre touchant les lieux.

M. DESCARTES regarde donc cette équation, comme une formule generale, pour le Problême de Pappus propoſé en trois ou quatre lignes. Il ne me ſemble pas que cette formule, ait le premier défaut, dont on vient de parler, car puiſque M. DESCARTES aſſure que l'on peut toûjours trouver de tels termes, excepté, que quelques-uns d'eux peuvent être nuls ; l'on peut autant ſuppoſer que yy ne s'y rencontre pas, que xx : & comme le terme xx manquant n'empêche pas, que la formule ne ſoit generale, l'on doit raiſonner de même du terme yy.

Lorſque une équation a le plan xy des inconnuës avec xx le quarré de l'une des inconnuës, ſans avoir le quarré yy de l'autre inconnuë ; elle peut, ainſi qu'on l'apprend dans les lieux geometriques, ſe conſtruire avec l'hyperbole priſe ou par rapport à ſes aſymptotes, ou par rapport à ſes diametres. L'on verra qu'il peut arriver, que ni la ligne AB, ni aucune de ſes paralleles ne ſoit l'aſymptote de l'hyperbole, qui ſatisfait au Problême de Pappus, Voyez Art. 8. Exemp. 5.

Touchant le ſecond défaut, il eſt certain que lorſqu'on donne une formule ou équation generale pour tous les lieux à une courbe particuliere, on met un terme, où il n'y a que des quantitez connuës. Soit x, y les ſeules inconnuës.

Pour la ligne droite, $y = \frac{e}{b}x + e \quad + \frac{2nrx}{m} + rr$

* M. de l'Hôpital lieux geometriques.

* Pour la parabole, $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry - \frac{ep}{m}x + pf = o$

Pour le cercle ou l'Ellipſe $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x - \frac{prr}{2r} + \frac{eep}{2mmr}xx - \frac{2epfx}{2mr} + \frac{pff}{2r} + rr = o$

Pour l'hyperbole par rapport à ſes diametres. $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x \pm \frac{prr}{2r} - \frac{eep}{2mmr}xx + \frac{2epfx}{2mp} - \frac{pff}{2r} + rr = o.$

Pour l'hyperbole entre ſes aſymptotes. $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} - rx - mp = o.$

La

La Methode dont on ſe ſert pour faire ces formules generales, *conſiſte à conſtruire d'abord une parabole, en ſorte que l'équation qui en exprime la nature, ſoit la plus compoſée qu'il ſe puiſſe; de faire enſuite la même choſe dans l'ellipſe, & dans l'hyperbole rapportée à ſes diametres, & conſiderée entre ſes aſymptotes, ce qui fournit des équations ou formules generales.* Mr le M. de l'Hôp. lieux Geomet.

Ainſi M. DESCARTES a raiſon de dire que ſon équation, qui doit ſervir de formule generale, devoit renfermer un terme compoſé de ſeules quantitez connuës : comme dans les formules, que l'on vient de rapporter, le dernier terme, où il n'y a ni x, ni y, eſt compoſé de ſeules quantitez connuës.

De plus nous verrons, que pour la queſtion même de Pappus, de la façon, que M. DESCARTES l'a reduite, il arrive quelquefois, qu'un des termes n'a que des quantitez connuës; que même il n'y a quelquefois que des quantitez connuës dans un des membres de l'équation, la queſtion étant propoſée autrement, que M. Deſcartes ne l'a propoſée. Ce qui fait encore plus voir la neceſſité, qu'il y avoit de mettre dans l'équation generale un terme tout compoſé de quantitez connuës. Voyez à la ligne droite, Exemp. 1. 6. à la parabole, Ex. 2. 6. 9. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 2. 8. 10. 14. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, Exemple 1. 2. 6. 8. 9. 12. 13. 14.

6. M. Deſcartes * dit encore, qu'au lieu de s'être employé à conſtruire la queſtion de Pappus, & de n'avoir parlé des lieux geometriques après cela, qu'en forme de corollaire; il eut mieux fait, d'expliquer par ordre tous les lieux, & de dire enſuite que par ce moyen la queſtion de Pappus étoit conſtruite. * *Tom. 3. Lett. 71.*

Mais aujourd'hui, que l'on trouve les lieux geometriques expliquez dans pluſieurs traitez : j'ai cru devoir ſuivre M. Deſcartes, & faire comme lui la conſtruction du Problême de Pappus en pluſieurs Exemples, & en ſi grand nombre d'Exemples, qu'il y eût dequoi contenter tout le monde. Car quelques-uns ſeront bien aiſe de ſavoir, comment le Problême ſe conſtruit, lorſqu'on a une certaine équation; quelques autres, lorſqu'on en a une autre. Dans chaque Exemple je mettrai la reſolution ſuivant la Methode de M. Deſcartes, & quelquefois encore par l'évanoüiſſement des ſeconds termes, comme on le pratique ordinairement dans les lieux Geometriques; & l'on trouvera, que des deux manieres l'on vient à la même conſtruction. Voyez les deux ſortes de conſtructions à la ligne droite, Ex. 5. à la parabole, Ex. 3. 7. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 5. 6. 9. 10. 13. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, Ex. 2. 3. 5. 6. 7. 10. 11. 13. 15. 16.

M. DESCARTES parle encore Art. 10. des lieux geometriques, & il fait voir, que les ſeules lignes courbes du premier genre ſont le cercle & les trois Sections coniques, ce qui eſt déja connu par ceux, qui ont étudié les lieux geometriques, dans leſquels les inconnuës n'ont au plus que deux dimenſions.

ARTICLE II.

Commencement de la conſtruction commune à tous les Problêmes.

M. DESCARTES.

FIG 69 *Dans cette Figure BK eſt trop grande, elle ne doit être que le tiers de AE.*

APrès cela je fais KI Fig. 69. égale & parallele à BA, en ſorte qu'elle coupe de BC la partie BK égale à m, à cauſe qu'il y a ici $+ m$.

La ligne CB fait avec la ligne AB l'angle donné CBA par les conditions du Problème. L'on ignore encore la longueur de CB, c'eſt-à-dire, en quel endroit doit être le point C, quoique l'on ait la valeur de CB exprimée en termes algebriques. Il faut donc que ſur CB je prenne toutes les quantitez exprimées dans ſa valeur trouvée par l'Analyſe $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, je commence par le point B à déterminer cette valeur.

C'eſt pourquoi puiſque cette valeur contient $+ m$, ſur BC je coupe $BK = m$, en allant de B vers C. Enſuite par le point K je mene l'infinie KI parallele à AB, & je prends KI égale à AB, x. Les autres Exemples, où il y a $+ m$, ſont à la ligne droite, Exemple 1. 3. 6. 7. à la parabole, Exemp. 2. 4. 5. 7. 8. 9. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 4. 8. 9. 10. 11. 13. 14. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, Ex. 7. 13. 16.

Et je l'aurois ajoûtée, en tirant cette ligne IK de l'autre côté, s'il y avoit eu $- m$.

Lorſqu'il y a $- m$ dans la valeur de CB, $y = -m + \frac{n}{z}x$, &c. il faut retrancher la ligne m de la ligne qui donne la valeur totale de y. Alors ſur CB prolongée je coupe $BK = m$ au deſſus de AB, c'eſt-à-dire, du côté où le point C n'eſt pas.

Les Exemples, où il y a $- m$, ſont à la ligne droite, Exemple 4. à la parabole, Ex. 6. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 6. 12. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, Ex. 8. 9. 10. 11. 12. 14. 15. 16.

Et je ne l'aurois du tout point tirée, ſi la quantité m eût été nulle.

Les Exemples où m eſt nulle, ſont à la ligne droite, Fx. 2. 5. à la parabole, Ex. 1. 3. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 1. 2. 3. 5. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, Ex. 1. 2. 5. 6.

FIG. 64. Puis je tire auſſi IL, en ſorte que la ligne IK eſt à KL, comme z à n, c'eſt-à-dire, que IK étant x, KL eſt $\frac{n}{z}x$. Et par même

moyen je connois auſſi la proportion, qui eſt entre KL & IL, que je poſe comme entre n & a : ſi bien que KL étant $\frac{n}{z}x$, IL eſt $\frac{a}{z}x$. Et je fais que le point K ſoit entre L, & C, à cauſe qu'il y a ici $-\frac{n}{z}x$.

L'on a $IK = x$, qui eſt ici connuë, parceque, c'eſt l'inconnuë, que l'on a déterminée à être d'une telle grandeur. L'on peut donc faire cette Analogie $z : n :: IK, x : KL, \frac{n}{z}x$, dont le quatriéme terme $\frac{n}{z}x$ eſt connu, parceque les trois premiers le ſont.

Je coupe donc ſur BK, la ligne $KL = \frac{n}{z}x$. Je fais que le point K ſoit entre L & C, c'eſt-à-dire, que je prends KL en remontant du point K déja trouvé vers la ligne AB, parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$ dans la valeur de $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Car il faut retrancher $\frac{n}{z}x$ de la ligne, qui repreſente la valeur de y ; ce qui arrive, lorſque je prends ainſi KL. En effet ſuppoſant enſuite que LC eſt $\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, j'aurai $CB, y = BK = +m, -KL = -\frac{n}{z}x, +LC = +\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Dans le triangle IKL, le côté IK, x eſt pris à volonté, le côté KL eſt $= \frac{n}{z}x$. L'angle $LKI =$ à l'angle ABR eſt connu, donc on connoît tout le triangle & par conſequent le rapport des côtez KL, IL qui peut s'exprimer par la raiſon de la connuë n à la connuë a ; on aura donc $n : a :: KL, \frac{n}{z}x : IL, \frac{a}{z}x$.

Les autres Exemples, où il y a $-\frac{n}{z}x$ ſont à la parabole, Exemp. 8. 9. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 5. 8. 11. 12. 13. 14. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres. Ex. 6. 9. 10. 16.

Au lieu que Fig. 69. j'aurois mis L entre K & C, ſi j'euſſe eu $+\frac{n}{z}x$. Fig. 69.

Lorſqu'on a $+\frac{n}{z}x$, dans la valeur de CB, $y = m + \frac{n}{z}x \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, il faut que la ligne CB, qui repreſente cette valeur, contienne $KL = \frac{n}{z}x$, afin que j'aye $CB, y = BK = +m, +KL = +\frac{n}{z}x, +LC = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Les Exemples, où il y a $+\frac{n}{z}x$ ſont à la ligne droite, Exempl. 2. à la parabole, Ex. 3. 7. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 9. 10. à l'hyperbole rapportée à ſes diametres, Ex. 8. 10. 11. 12. 13. 14. 15.

Et je n'euſſe point tiré cette ligne IL, ſi $\frac{n}{z}x$ eût été nulle.

Les Exemples où $\frac{n}{z}x$ eſt nulle, ſont à la ligne droite, Ex. 1. 4. 6. 7. à la parabole, Ex. 1. 2. 4. 5. 6. au cercle ou à l'ellipſe, Ex. 1. 2. 3. 4. 6. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, Ex. 1. 2. 3. 7.

J'appellerai Regles dans la ſuite, ſoit les conditions que M. Deſcartes demande dans une équation, afin qu'elle appartienne à la ligne droite, ou au cercle, ou à une Section conique, ſoit les preceptes qu'il donne pour conſtruire chaque équation.

Je nommerai toûjours AB, x; CB, y; BK, m; IK, x; KL, $\frac{n}{z}x$; IL, $\frac{n}{z}x$; CL, ce qui ſera ſous le ſigne radical. Et parceque, m étant nulle dans une équation, dans laquelle $\frac{n}{z}x$ ſe trouve, le point I eſt en A; le point K en B; & l'on a BL au lieu de KL, AL au lieu de IL; je nommerai dans ce cas BL, $\frac{n}{z}x$; AL, $\frac{a}{z}x$. Il en ſera de même de pluſieurs autres points ou lignes, qui tombent ſur d'autres, comme il ſera facile de s'appercevoir. Je nommerai mm la quantité connuë, qui eſt ſous le ſigne radical, lorſqu'elle ſera le quarré de la quantité nommée m: ſſ, lorſqu'elle ne ſera pas ce quarré; ω la quantité qui multiplie x, $\frac{p}{m}$ la quantité qui multiplie xx ſous ce même ſigne. C'eſt ce que prevoient fort bien tous ceux qui donnent des formules generales, dont on a parlé, L. 1. Part. 1. Sect. 4. Regl. 11. Ainſi l'on ne doit pas regarder certaines regles de M. Deſcartes comme fauſſes, parcequ'il ne deſcend pas en détail dans chaque cas particulier, parcequ'il ne parle pas de AL, par exemple. Car il ſuffit, qu'il ait averti, que quelques termes de ſon équation generale peuvent être nuls, ce qui eſt une marque certaine, que quelques points & quelques lignes de ſa conſtruction peuvent auſſi manquer.

ARTICLE III.

Conſtruction particuliere à la ligne droite.

M. DESCARTES.

FIG. 69. OR cela fait, il ne me reſte plus pour la ligne LC que ces termes, $LC = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. D'où je vois, que s'ils étoient nuls, ce point C ſe trouveroit en la ligne droite IL; & que s'ils étoient tels, que la racine s'en pût tirer, c'eſt-à-dire, que mm & $\frac{p}{m}xx$ étant marquez d'un même ſigne +, * $\omega\omega$ fût égal à $4pm$; ou bien que les termes mm & ωx, ou ωx & $\frac{p}{m}xx$ fuſſent nuls; ce point C ſe trouveroit en une autre ligne droite, qui ne ſeroit pas plus mal aiſée à trouver que IL.

* *Il y a dans les Editions Françoiſes de Leyde 1637. de Paris 1705. un même ſigne + ou —, ce qui eſt une faute d'impreſſion.*

M. Deſcartes donne en peu de mots les marques pour connoître; quand la queſtion de Pappus eſt un lieu à la ligne droite, & dans quelle ligne le point C, que l'on cherche, ſe trouve, lorſque c'eſt un lieu à la ligne droite.

La premiere marque, pour connoître, ſi un lieu eſt à la ligne droite, eſt celle-ci. Lorſque les inconnuës x, y n'ont toutes deux qu'une dimenſion dans une équation, & que leur plan xy ne s'y rencontre pas; le lieu de cette équation eſt toûjours une ligne droite. Tous ceux qui traitent des lieux geometriques, apportent cette Regle.

La ſeconde marque eſt celle-ci. Lorſque dans une équation, il n'y a qu'une des deux inconnuës, & qu'elle n'a qu'une dimenſion; le lieu de cette équation eſt encore une ligne droite. Quelques Geometres apportent cette marque dans leur traité des lieux geometriques, quelques autres l'omettent.

Il faut donc faire voir dans les regles ſuivantes, que M. Deſcartes nous propoſe ici des équations, qui ont une de ces deux marques; d'où il ſuit, que lorſque l'équation eſt telle, qu'il la détermine, le Problême ſe conſtruira par une ligne droite.

REGLE I.

SI dans la derniere équation, dont $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$ eſt la formule generale, ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt nul, elle ſe conſtruira par la ligne droite. Voyez Exemple 1. 2. 3.

Lorſque ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt nul, l'équation ſe reduit à $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x$; où, ſi le terme $\frac{n}{z}x$ eſt encore nul, elle ſe reduit à $y = \pm m$; & elle a les marques d'un lieu à la ligne droite.

REGLE II.

LOrſque ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt nul, le point *C* eſt dans la droite *IL* Fig. 69. Cette Regle ſuppoſe qu'il y a tout enſemble *m* & $\frac{n}{z}x$. Voyez Ex. 3. 4. Mais lorſque *m* eſt nul, le point *C* eſt dans la droite *AL*. Voyez Ex. 2. lorſque $\frac{n}{z}x$ eſt nul, le point *C* eſt dans la ligne *IK*. Voyez Ex. 1.

REGLE III.

S'Il y a quelque quantité ſous le ſigne radical, & qu'on en puiſſe extraire la racine quarrée; le point *C* eſt encore ſur une ligne droite. Voyez Ex. 4. 5. 6. 7.

La racine quarrée de xx eſt x. Dès que l'on pourra extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical, l'inconnuë x qui s'y trouve n'aura plus qu'une dimenſion. D'un autre côté l'inconnuë y n'a auſſi qu'une dimenſion dans la formule generale: ainſi les inconnuës n'auront alors toutes deux qu'une dimenſion; marque certaine d'un lieu à la ligne droite.

Lorſque ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt tout connu, comme $\sqrt{\frac{p}{m}}$, il eſt aiſé d'en extraire la racine quarrée, ſuivant ce que l'on a dit, Liv. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. Car ſi Fig. 7. *FG* eſt l'unité, $GH = \frac{p}{m}$; la perpendiculaire *GI* eſt $\sqrt{\frac{p}{m}}$, que je puis égaler à une connuë, & alors l'équation ſera $y = f$, ou $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x + f$, qui ſignifie encore un lieu à la ligne droite. FIG. 7.

Mais quand eſt-ce que l'on pourra extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical de la formule $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$?

1. Lorſque les termes mm & ωx ſont nuls, & que $\frac{p}{m}xx$ eſt poſitif ; car alors l'on aura $\sqrt{\frac{p}{m}xx}$, ou $x\sqrt{\frac{p}{m}}$, comme l'on vient de dire. Mais ſi le terme $\frac{p}{m}xx$ étoit ſeul & negatif $\sqrt{-\frac{p}{m}xx}$, ou $x\sqrt{-\frac{p}{m}}$, la racine ſeroit imaginaire, & l'on ne pourroit pas en extraire la racine.

2. Lorſque les termes ωx & $\frac{p}{m}xx$ ſont nuls, & que mm eſt poſitif ; car alors l'on aura $\sqrt{mm} = m$; & la formule ſe reduira à $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x + m$. L'on ne peut pas extraire la racine de $\sqrt{-mm}$.

3. Lorſque les trois termes ſont ſous le ſigne radical, il faut que les deux mm, $\frac{p}{m}xx$ ſoient marquez d'un même ſigne +, & que $\omega\omega$ ſoit égal à $4mp$, ou $\omega = \sqrt{4mp} = 2\sqrt{mp}$. La raiſon eſt qu'alors ce qui ſe trouve ſous le ſigne radical eſt ſous la forme d'un quarré parfait algebrique, $\sqrt{mm + 2x\sqrt{mp} + \frac{p}{m}xx}$, dont la racine quarrée eſt $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$; ou bien ſous la forme $mm - 2x\sqrt{mp} + \frac{p}{m}xx$, dont la racine quarrée eſt $m - x\sqrt{\frac{p}{m}}$, ou $-m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$.

4. L'on ne peut pas extraire la racine quarrée, lorſque ſous le ſigne radical il n'y a que deux termes $\sqrt{\pm mm \pm \omega x}$, ou $\sqrt{\pm mm \pm \frac{p}{m}xx}$; $\sqrt{\pm \omega x \pm \frac{p}{m}xx}$; ainſi dans tous ces cas, le lieu n'eſt pas à la ligne droite. L'on ne peut pas non plus extraire la racine quarrée, lorſque ce qui eſt ſous le ſigne radical n'eſt pas une formule de parfait quarré algebrique. La raiſon en eſt évidente.

REGLE IV.

LOrſqu'on peut extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical, le point C eſt dans une autre ligne que IL, Voyez Ex. 5. 6. 7. n. 5. Le point C eſt auſſi dans une autre ligne que IL, Ex. 1. Quoiqu'il n'y ait point d'extraction de racine à faire : & il eſt dans IL, Ex. 4. quoiqu'on ait pû extraire la racine.

EXEMPLE I. $y = m$.

Fig. 70 1. SOient Figure 70. les quatre lignes droites AB, QD, EF, GH données de poſition paralleles entr'elles, & qu'il faille trouver un point C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites, CB, CD, CF, CH ſur les données, & faiſant avec elles un même angle de 60. degrez CBA, CDQ, CFE, CHG. De ſorte que ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CH, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD & CF.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons les diſtances données des paralleles entr'elles, BD, b ; DF, c ; FH, d ; & les inconnuës CB, y ; $CD = CB + BD$, $y + b$; $CF = CB + BD + DF$, $y + b + c$; $CH = CB + BD + DF + FH$, $y + b + c + d$.

3. On a par les conditions du Problême cette équation $yy + by + cy +$

$dy = yy + 2by + cy + bb + bc$; d'où l'on forme $y = \frac{bb+bc}{d-b}$ & en faisant $\frac{bb+bc}{d-b} = m$; on aura $y = m$.

4. Prenez $BC = m$; par le point c menez la ligne droite ICK parallele à AB ; la ligne IK eſt le lieu cherché, & ſatisfait au Problême en tous ſes points.

Dém. Au point quelconque c de la ligne IK on trouve la même équation qu'au point C. Menez ch parallele à CH, vous aurez mêmes lignes, & mêmes angles, d'où l'on tire, comme n. 3. $y = m$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer 1° que la ligne droite IK ſe trouve par la Geometrie ſimple, en coupant CB ſur l'infinie CH ; & que par conſequent le Problême eſt plan. 2° Que les points cherchez Gc ne ſe trouvent pas ſur la ligne IL de Fig. 69. mais ſur la ligne IK, ſuivant la Regle 2. 3° Que y n'a point de valeur negative ; car les y partent de la droite IK, & s'étendent toutes du côté de la ligne Hh. 4° Que la valeur de y eſt conſtante, puiſque l'on a toûjours $cb = CB$.

5° Si la derniere équation étoit $y = -m$, ou $-y = m$; l'on nommeroit CB, $-y$.

EXEMPLE II. $y = \frac{n}{z}x$.

1. SOient Fig. 71. données de poſition les quatre lignes droites AB, AD, EF, GH, qui compoſent un parallelogramme. Il faut trouver un point C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH, ſur les données ; & dont CD, CH ſoient paralleles à AB, & CB, CF paralleles à AD : ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CH, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD & de CF. Fig. 71.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons les données $AE, n = NL = BF$; $AN, z = LE = DH$; & les inconnuës CB, y ; $CF = BF - CB$, $n - y$; $AB = CD$, x ; $CH = DH - CD$, $z - x$.

3. Puiſque l'on demande que $CB \times CH$ ſoit égal à $CD \times CF$, l'on aura $zy - xy = nx - xy$; $zy = nx$, $y = \frac{n}{z}x$.

4. L'équation $zy = nx$ donne cette proportion & en même tems cette conſtruction $AN, z : NL, n :: AB, x : BC, y$; & 24. 6. Eucl. Le point C eſt ſur le diametre du parallelogramme $ANLE$. Ainſi tirez la diagonale ACL, prolongez-la à l'infini des deux côtez ; elle eſt le lieu cherché.

Dém. Au point C, il eſt évident que $AN, z : NL, n :: AB, x : BC, y$, $y = \frac{nx}{z}$. Ou bien $CB \times CH = CD \times CF$, $zy - xy = nx - xy$, $zy = nx$, $y = \frac{n}{z}x$. Au point quelconque c pris dans l'angle ILG à cauſe des triangles ſemblables ANL, Abc, $AN, z : NL, n :: Ab, x : bc, y$; $y = \frac{nx}{z}$. Ou bien $cb \times ch = cd \times cf$, $xy - zy = xy - nx$, $y = \frac{n}{z}x$. Au point c pris dans l'angle MAP, $AN, z : NL, n :: Ab, -x :$

Fig 71. bc, $-y$, $y=\frac{nx}{z}$. Ou bien $cb\times ch=cd\times cf$, $xy-zy=xy-nx$, $y=\frac{n}{z}x$. Ainſi tous les points de la diagonale AL prolongée ſatisfont au Problème, & elle eſt le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Si $ANLE$ étoit un quarré ou un rhombe, n ſeroit égal à z, & l'équation $y=\frac{n}{z}x$, ſe changeroit en $y=x$; & les CB ſeroient égales aux CD.

6. Il faut remarquer 1° que le lieu AL ſe trouve par la Geometrie ordinaire, en faiſant $AN, z:: NL, n:: AB, x:: BC, y$. Car le point C ainſi trouvé eſt dans le diametre du parallelogramme.

Le Problême eſt donc plan. 2° Les points cherchez C, c ſont ſur AL & non pas ſur IL de Fig. 69. Regl. 2. 3° Les inconnuës x, y ont des valeurs poſitives & negatives variables, comme dans les lieux geometriques. 4° Au point A, x & y ſont nulles; parcequ'elles commencent en A. 5° Le Problême n'eſt auſſi poſſible que dans les deux angles, par leſquels la diagonale CN paſſe.

EXEMPLE III. $y=m-\frac{n}{z}x$.

Fig.72. 1. FIg. 72. comme n. 1. Ex. 2. excepté que l'on demande ici, que $CB\times CD$ ſoit égal à $CF\times CH$.

2. Comme n. 2. Ex. 2.

3. Puiſque $CB\times CD=CF\times CH$, l'on aura $xy=nz-zy-nx+xy$; $y=n-\frac{n}{z}x$, & faiſant $m=n$, $y=m-\frac{n}{z}x$.

4. Parce qu'il y a $+m$, ſur BC prolongée au deſſous de AB prenez $BK=m=n=BF$; par le point K ou F, menez IK parallele & égale à AB; la ligne IK ſera la même que EF. Enſuite faites, $IG=AN$, $z:GN=AE$, $n:: IK,=AB$, $x:KL=KC$, $\frac{nx}{z}$. Donc $CB=BK-CK$, $m-\frac{n}{z}x=y$.

Le point C eſt un point du diametre du parallelogramme $ANGE$. Tirez donc le diametre infini IL, il ſatisfait en tous ſes points au Problême.

Dém. Au point quelconque c pris au dedans du parallelogramme, étant $Ab, x=cd$; $bN=AN-Ab$, $z-x=ch$; cb, y; $cf=bf-cb$, $n-y$, les triangles IGN, Ikl ſont ſemblables, & donnent cette Analogie, $IG, z:GN, n:: Ik=AB, x$; $kl=cf, n-y$; $y=n-\frac{n}{z}x=m-\frac{n}{z}x$, ou bien $cb\times cd=cf\times ch$, $xy=nz-nx-zy+xy$; $y=n-\frac{nx}{z}=m-\frac{nx}{z}$. 2° Au point c pris hors du parallelogramme dans l'angle dIf, $cb\times cd=cf\times ch$; $-xy=-xy+zy+nx-nz$; $y=n-\frac{n}{z}x$. 3° Au point c pris hors du parallelogramme dans l'angle bNh, $cb\times cd=cf\times ch$, $-xy=-xy+zy+nx-nz$; $y=n-\frac{n}{z}x=m-\frac{n}{z}x$. La ligne droite IL eſt donc le lieu du Problême propoſé, Ce qu'il falloit démontrer.

5. Les points cherchez C, c, ſont ſur la ligne IL. Reg. 2.

EXEMPLE

EXEMPLE IV. $y = -m + \sqrt{\frac{p}{m}}xx$.

1. FIg. 73. ſoient données de poſition les trois lignes AB, AD, EF; dont AB, EF ſont paralleles entr'elles; & AD leur eſt perpendiculaire. Il faut trouver le point C, duquel ayant tiré les droites CB, CD, CF perpendiculaires ſur les données; le rectangle ſous CB & CF, ſoit égal au quarré de CD multiplié par AI, moins le quarré de AI moitié de AE, c'eſt-à-dire, à $\overline{CD}^2 \times AI - \overline{AI}^2$. Fig. 73.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons la connuë AE, $2m = BF$; AI, m; les inconnuës CB, y; $AB = CD$, x; $CF = CB + BF$, $y + 2m$,

3. Par l'hypotheſe $CB \times CF = \overline{CD}^2 \times AI - \overline{AI}^2$; $yy + 2my = mxx - mm$; $yy + 2my + mm = mxx$; dont les racines ſont $y + m = \sqrt{mxx}$, & ſi l'on prend m pour l'unité, & $p = m$, l'équation pourra ſe changer en $y + m = \sqrt{\frac{p}{m}}xx$; $y = -m + \sqrt{\frac{p}{m}}xx$, ou, puiſque $\frac{p}{m} = 1$, $y = -m + \sqrt{xx}$, $y = -m + x$.

4. Parcequ'il y a $-m$, au deſſus de AB prenons $BK = m$; par le point K menons KI parallele à AB & infinie; coupons $AL = AI$, & par les points I, L, tirons l'infinie IL, qui eſt le lieu cherché.

Dém. 1° Au point C, à cauſe des triangles équiangles IAL, ICD, $IA : AL :: ID : CD$. Mais $IA = AL$, donc $ID = CD$, x; or CK eſt égal à ID, donc CK, x. Et $CB = CK - KB = x - m$. 2° Au point c, étant $Ab = cd$, $-x$; cb, $-y$, $bf = EA$, $2m$, $cf = cb - bf$, $-y - 2m$. Les triangles IAL, IEl ſont égaux en tout ſens, & les triangles IEl, Idc ſont équiangles : donc $IE : El :: Id : dc$; & étant $IE = El$, l'on aura $Id = cd$, $-x$. D'un autre côté $ck = Id$, $-x$. Ainſi $cb - y = ck + kb$, $-x + m$; $y = -m + x$. L'on trouvera la même équation dans tous les autres points de la droite, IL, par exemple au point c de cette façon. Suppoſons $cb \times cf = \overline{cd}^2 \times AI - \overline{AI}^2$, $yy + 2my = mxx - mm$; d'où l'on tire, comme n. 2. $y + m = \sqrt{mxx} = \sqrt{\frac{p}{m}}xx$, $y = -m + \sqrt{\frac{p}{m}}xx$. C'eſt pourquoi la ligne IL ſatisfait au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

Les points C, c ſont ſur la droite IL, Regle 2. Car quoique la quantité x ſoit ſeule dans l'équation $y = -m + x$, elle ſera $\frac{n}{z}x$, ſi l'on poſe $n = z = 1$.

EXEMPLE V. $y = \frac{-n}{z}x + \sqrt{\frac{p}{m}}xx$.

1. SOient données de poſition les quatre lignes AB, AD, AH, AF. Fig. 74. qui ſe coupent toutes au point A, où elles font entr'elles des angles BAR, RAS, SAT, chacun de 30. degrez. Il faut trouver un point C, duquel on puiſſe tirer quatre lignes droites CB, CD, CF, CH ſur les données, faiſant les angles CBG, CDA, CFA, CHA de ſoixante Fig. 74.

degrez de ſorte que le rectangle ſous CB, CH ſoit égal au rectangle ſous CD, CF.

2. Suppoſons la choſe faite, & ayant prolongé CB, juſqu'à ce qu'elle coupe toutes les données; nommons AB, x; CB, y. Et parce que le Problème ne fournit point d'unité, prenons la ligne z pour l'unité.

Tous les angles du triangle ABR ſont donnez. Le côté AB, que j'ai pris d'une grandeur déterminée, eſt connu. Puiſque je connois les angles, je connoîtrai le rapport de leurs Sinus, qui ſont pour l'angle droit ARB le Sinus total 100000, pour l'angle BAR de 30. deg. le Sinus 50000 la raiſon de 100000 à 50000, eſt comme 2, que je nomme b, à 1, que je nomme z. Je connoîtrai encore par le Theorême de la Trigonometrie, L. 1. Part. 3. Sect. 1. Art. 2. La raiſon des côtez AB, BR, qui étant la même que celle des Sinus de leurs angles oppoſez, l'on aura cette proportion $b : z :: AB, x : BR; \frac{xz}{b}$; & $CR = CB + BR, \frac{by+xz}{b}$.

De même dans le triangle CRD les angles ſont connus. L'angle CRD eſt droit, l'angle CDR ou CDA de 60. degrez, dont le Sinus eſt 86602; dont la raiſon au Sinus total 100000, eſt celle de $1 = z$ à $\frac{100000}{86602}$, que je nomme $2c$. Ainſi la raiſon de leurs côtez oppoſez CR, CD ſera la même, & l'on pourra dire, $z : 2c :: CR, \frac{by+zx}{b} : CD, \frac{2bcy+2czx}{bz}$.

FIG. 74 Les angles du triangle BAS ſont de 60. degrez. Le triangle eſt donc équilateral, & $BS = AB$, x; $CS = CB + BS$, $y + x$.

Après cela le triangle SCH, dont les angles CSH ou BSA, CHS ou CHA ſont de 60. degrez, ſera auſſi équilateral; & $CH = CS$, $y + x$.

Enſuite dans le triangle ABT, l'angle ABT ou ABS eſt de 60. degrez, l'angle BAT de 90. l'angle ATB de 30. Or le Sinus 50000 de BTA eſt au Sinus 100000 de BAT, comme $1 = z$ à $2 = b$; donc $z : b :: AB, x : BT, \frac{bx}{z}$; & $CT = \frac{zy+bx}{z}$.

Enfin dans le triangle CTF tous les angles ſont connus; CTF eſt de 30. degrez, CFT de 60. Or la raiſon de 86602 Sinus de l'angle de 60. degrez eſt à 50000 Sinus de l'angle de 30. comme $1 = z$ à $\frac{50000}{86602} = c$. Donc $z : c :: CT, \frac{zy+bx}{z} : CF, \frac{czy+bcx}{zz}$.

5. L'on demande $CB \times CH = CD \times CF$, c'eſt-à-dire, en termes analytiques $yy + xy = \frac{2bcczyy+2cczzxy+2bbccxy+2bczzxx}{bz^3}$; & $bz^3yy + bz^3xy = 2bcczyy + 2cczzxy + 2bbccxy + 2bczzxx$; $2bcczyy - bz^3yy + 2bbccxy + 2cczzxy - bz^3xy = -2bczzxx$; & diviſant par $2bccz - bz^3$, l'on fait $yy + \frac{2bbccxy+2cczzxy-bz^3xy}{2bccz-bz^3} = \frac{-2bczzxx}{2bccz-bz^3}$. Mettez $\frac{2n}{z}$ pour $\frac{2bbcc+2cczz-bz^3}{2bccz-bz^3}$ l'équation ſera $yy + \frac{2nxy}{z} = \frac{-2bczzxx}{2bccz-bz^3}$, ajoûtez de chaque côté $\frac{nnxx}{zz}$, vous trouverez $yy + \frac{2nxy}{z} + \frac{nnxx}{zz} = \frac{nnxx}{zz} - \frac{2bczzxx}{2bccz-bz^3}$; ſubſtituez encore $\frac{p}{m}$ à la place de $\frac{nn}{zz} - \frac{2bccz}{2bccz-bz^3}$; ce ſera $yy + \frac{2nxy}{z} + \frac{nnxx}{zz} = \frac{p}{m}xx$; dont les raci-

nes ſont $y + \frac{nx}{z} = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$; $y = -\frac{n}{z}x + x\sqrt{\frac{p}{m}}$. Soit Fig. 7. $Fg = z$; $gH = \frac{p}{m}$; gi ſera $\sqrt{\frac{p}{m}}$, L. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. que j'appelle f, Ainſi l'on aura $y = -\frac{n}{z}x + fx$. Soit enfin $f - \frac{n}{z} = \frac{b}{z}$, ce ſera $y = \frac{b}{z}x$.

4. Fig. 74. Faites $z : b :: AB, x : BC$, $\frac{b}{z}x = y$. Par les points A, C, tirez l'infinie AC, elle eſt le lieu cherché. Fig. 74.

Dém. 1° Au point quelconque c pris dans l'angle FAG, tirez cb parallele à CB ; les triangles ABC, Abc ſont équiangles ; $AB : CB :: z : b :: Ab, x : cb$, $\frac{b}{z}x = y$. 2° Au point quelconque c pris dans l'angle PAT, menez cb parallele à CB, & nommez Ab, $-x$; cb, $-y$. Deſlors $AB : CB :: z : b :: Ab, -x : cb, -y$; & $-zy = -bx$; $y = \frac{b}{z}x$. De plus ſi au même point c pris dans l'angle PAT, vous tirez encore cd parallele à CD, cf à CF, ch à CH ; vous trouverez des triangles ſemblables à ceux, qui ont été ſupputez n. 3. & qui donneront en ſuivant la même Methode, $cd = \frac{-2bcy - 2czx}{bz}$; $ch = -y - x$; $cf = \frac{-czy - bcx}{zz}$. C'eſt pourquoi $cb \times ch = cf \times cd$ s'exprimera ainſi $yy + xy = \frac{2bcczyy + 2ccczzxy + 2bbccxy + 2bczxx}{bz^3}$ même équation que n. 3. d'où l'on tirera auſſi, comme là, $y = -\frac{n}{z}x + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, & enfin $y = \frac{b}{z}x$. La ligne AL ſatisfait donc en tous ſes points au Problême, & elle eſt le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer 1° que les points C, c ſont ſur la ligne AL Regle 2. 2° Que l'équation $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\frac{p}{m}xx}$, a été reduite à la forme $y = \frac{n}{z}x$ par l'extraction de la racine quarrée. 3° Que le Problême n'eſt poſſible que dans les angles FAB, TAP.

6. L'on auroit pû reſoudre l'équation $yy + \frac{2n}{z}xy = \frac{-2bccxx}{2bccz - bz^3}$ par l'évanoüiſſement du ſecond terme, & prenant $y + \frac{n}{z}x = v$, $v - \frac{n}{z}x = y$; car ſubſtituant pour y & yy leur valeur, l'on auroit trouvé $v = \sqrt{\frac{nnxx}{zz} - \frac{2bccxx}{2bccz - bz^3}}$. Soit $\frac{nn}{zz} - \frac{2bcc}{2bccz - bz^3} = \frac{p}{m}$; l'on trouvera par la ſubſtitution $v = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$; & remettant encore pour v ſa valeur, l'équation eſt $y + \frac{n}{z}x = \sqrt{\frac{p}{m}xx}$. Et l'on achevera comme n. 3. 4.

EXEMPLE VI. $y = m + \sqrt{f}$.

1. SOient Fig. 75. les quatre lignes AB, QD, EF, GH, données de poſition, toutes paralleles entr'elles & également éloignées l'une de l'autre ; & qu'il falloit trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données ; ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CH, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD & CF. Fig. 75.

2. Suppoſons la choſe faite, & parceque le Problême eſt poſſible en quelques endroits, impoſſible en d'autres ; commençons par les cas, où il eſt impoſſible ; aprés avoir nommé a chaque diſtance des paralleles $BD = DF = FH$; & y la ligne cherchée qui ſe termine à AB,

FIG. 75. 3. Suppoſons que le point cherché ſoit N pris hors des paralleles au deſſous de AB. Les lignes cherchées ſont NB, y; $ND = NB + BD, y + a$; $NF = NB + BD + DF, y + 2a$; $NH = NB + DF + FH, y + 3a$.

Et parce qu'on demande que $NB \times NH$ ſoit égal à $ND \times NF$, l'équation ſera $yy + 3ay = yy + 3ay + 2aa$, qui ſe reduit à $2aa = 0$. Ce qui montre que le Problême eſt impoſſible dans tout point N pris au deſſous de AB. Il eſt évident qu'en tout point P pris au deſſus de GH on aura la même preuve de l'impoſſibillté $2aa = 0$.

4. Au point R pris entre les paralleles EF, QD les lignes cherchées ſont RB, y; $RD, y - a$; $RF, 2a - y$; $RH, 3a - y$; ce qui donnera $-2aa = 0$ Problême encore impoſſible.

5. Maintenant ſuppoſons que le point C eſt pris entre les paralleles AB, QD. Les lignes cherchées ſont CB, y; $CD, a - y$; $CF, 2a - y$; $CH, 3a - y$. Ce qui donne cette équation $3ay - yy = 2aa - 3ay + yy$; $yy - 3ay = -aa$. Ajoûtons de chaque côté $\frac{9}{4}aa$; l'équation ſera $yy - 3ay + \frac{9}{4}aa = \frac{5}{4}aa$. Extrayons les racines quarrées de chaque membre. La premiere eſt $y - \frac{3}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$; $y = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. La ſeconde $-y + \frac{3}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, $y = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Les deux $y = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ poſitives.

6. L'on conſtruit la ſeconde racine $y = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, en extrayant la racine quarrée de $\frac{5}{4}aa$, Liv. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. que je nomme b, & l'équation eſt $y = \frac{3}{2}a - b$, & faiſant $\frac{3}{2}a - b = m$, l'on fait $y = m$. C'eſt pourquoi l'on coupe BK ou $BC = m$, par le point C l'on mene l'infinie Cc ou IK parallele à AB, elle eſt la ligne cherchée.

Dém. Du point quelconque c tirez ſur les données les perpendiculaires cb, cd, cf, ch, elles ſeront chacune égales aux lignes qui partent du point C, & qui ont les mêmes lettres : donc $cb = CB, y = m = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. D'où il ſuit encore que $cb \times ch = cd \times cf$ donnera la même équation $3ay - yy = 2aa - 3ay + yy$ comme n. 6. Cc eſt donc la ligne cherchée. Ce qu'il falloit démontrer.

7. L'on conſtruira la premiere racine $y = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, en prenant $BM = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, & menant par le point M l'infinie Mm parallele à AB. La ligne Mm ſatisfait auſſi au Problême.

Dém. Au point quelconque m, l'on aura $mb = MB, \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa} = y$. De plus mb étant y, l'on aura $md = y - a$; $mf = y - 2a$; $mh = 3a - y$; & $cb \times ch = cd \times cf$, $3ay - yy = yy - 3ay + 2aa$; même équation que n. 5. la ligne Mm ſatisfait donc au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

8. Il faut remarquer 1° que les droites Cc, Mm ont été trouvées par l'extraction de la racine quarrée, & en ne ſe ſervant que de la regle & du compas ; ainſi le Problême eſt plan. 2° L'équation $y = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa}$ ne peut pas d'abord ſe reduire à la formule de M. DESCARTES $y = m \pm \sqrt{mm}$, parceque poſant $\frac{3}{2}a = m$, $\frac{5}{4}aa$ n'eſt pas mm, c'eſt pour cela que j'ai mis

au commencement $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{f}$. Je me ſervirai de f, ff pour m, mm dans des cas ſemblables. Elle ſe reduit pourtant à la formule $y = m$ n. 6. 3° Les points C, c ſont ſur la ligne IK, Regle 4. Les valeurs de y ſont conſtantes puiſque l'on a par tout $cb = CB, y$; $mb = MB, y$. Il n'y a point de x. 4° L'inconnuë y n'a que des valeurs poſitives, ſoit qu'elle ſorte de la droite Cc, ſoit qu'elle ſorte de la droite Mm; puiſque toutes les y ſe terminent à la parallele AB. Ainſi l'équation $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa}$ a deux racines poſitives. 5° Le Problême eſt poſſible en deux endroits, impoſſible en trois. 6° Quoiqu'on ne cherchât que la ligne Cc, la reſolution a encore donné la ligne Mm.

EXEMPLE VII. $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. SOient Fig. 71. 72. données de poſition les lignes AB, AD, EF, GH, qui ſont un parallelogramme EN. Il faut trouver un point C, d'où l'on tire les lignes CB, CD, CF, CH, ſur les données; étant CB, CF paralleles à AD; CD, CH à AB. Il faut encore que $CB \times CF$ ſoit égal à $CD \times CH$. Fig. 75. a.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons AE, $2m = BF$; AN, $\omega = DH$, CB, y; AB, $x = CD$. L'on aura $CF = 2m - y$, $CH = \omega - x$. Si l'on fait $p = m = 1$, & que AN ſoit double de AE, on aura $\omega = 2\sqrt{mp} = \sqrt{4mp}$.

3. Par l'hypotheſe $CB \times CF = CD \times CH$, c'eſt-à-dire $2my - yy = \omega x - xx$; $yy - 2my = xx - \omega x$. Mettons mm de chaque côté & extrayons les racines quarrées. Elles ſeront $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + xx}$. Et parceque $p = m$, on trouvera la formule de M. Deſcartes $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, ou parceque $\omega = 2\sqrt{mp}$, $y = m \pm \sqrt{mm - 2x\sqrt{mp} + \frac{p}{m}xx}$, qui par l'extraction des racines devient $y = m \pm m \mp x\sqrt{\frac{p}{m}}$, ou $y = 2m - x\sqrt{\frac{p}{m}}$, $y = x\sqrt{\frac{p}{m}}$; ou parceque $\sqrt{\frac{p}{m}} = 1$, $y = 2m - x$, $y = x$.

4. Pour conſtruire l'équation $y = 2m - x$; parce qu'il y a $+ 2m$, prenez $BK = 2m = AE$ au deſſous de AB, par le point K menez IK ou EF parallele à AB, de BK retranchez KL ou $FC = IK = AB$, x, par les points I, L tirez l'infinie IL; c'eſt le lieu cherché.

Dém. Au point C vous avez $CB = BF - CF$, $2m - x$. Au point c pris au deſſus de AB, on a cette proportion $EF : FC :: Ef : fc$; mais $EF = AB = FC$, x; donc $Ef = Ab$, $x = fc$. Et $cb = cf - bf$, $-y = x - 2m$, $y = 2m - x$. Au point c pris au deſſous de EG, où vous avez $-x$ vous trouverez $cb = cf + fb$, $-x + 2m$.

Pour conſtruire l'équation $y = x$, il faut couper $BC = AB$, & par les points A, C mener une droite infinie, qui ſera le lieu cherché.

5. L'équation $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$ ſe reduit à $y = 2m - x$, $y = x$; ou en poſant $z = n = 1$, $y = 2m - \frac{nx}{z}$, $y = \frac{nx}{z}$. Les points C, c ſont ſur IL dans le premier cas, ſur AL dans le ſecond, Regle 2.

ARTICLE IV.

Conſtruction commune aux trois Sections coniques, & au cercle.

M. DESCARTES.

MAis lorſque cela n'eſt pas, ce point C eſt toûjours en l'une des trois Sections coniques, ou en un cercle, dont l'un des diametres eſt en la ligne IL, & la ligne LC eſt l'une de celles, qui s'appliquent par ordre à ce diametre; ou au contraire LC eſt parallele au diametre, auquel celle qui eſt en la ligne IL eſt appliquée par ordre. A ſavoir ſi le terme $\frac{p}{m}xx$ eſt nul, cette Section conique eſt une parabole; & s'il eſt marqué du ſigne +, c'eſt une hyperbole, & enfin s'il eſt marqué du ſigne —, c'eſt une ellipſe; excepté ſeulement ſi la quantité aam eſt égale à pzz, & que l'angle ILC ſoit droit, auquel cas on a un cercle, au lieu d'une ellipſe.

REGLE I.

LOrſque ſous le ſigne radical, qui ſe trouve dans la valeur de y, il y a quelque quantité, dont on ne peut pas extraire la racine quarrée, l'un des diametres eſt dans la ligne IL Fig. 69. & LC eſt une des appliquées à ce diametre. Ou au contraire LC eſt parallele au diametre, auquel une partie de IL eſt appliquée.

Les exceptions de cette Regle ſont pour chaque courbe dans l'Article, qui contient ſa conſtruction particuliere.

Fig. 69. Les diametres dont il eſt ici parlé ſont les diametres conjuguez.

Ainſi cette expreſſion ne regarde pas la parabole, qui n'a pas des diametres conjuguez. Bien plus, cela ne regarde que l'hyperbole, comme on le verra, Article VII.

REGLE II.

LOrſque $\frac{p}{m}xx$ n'eſt pas ſous le ſigne radical, la ligne, qui contient tous les points cherchez; eſt une parabole, Voyez Art. V.

Lorſque $-\frac{p}{m}xx$ eſt ſous le ſigne radical, la ligne qui reſout le Problême eſt un cercle, ou une ellipſe, Voyez Art. VI.

C'eſt un cercle, ſi 1° $aam = pzz$ ou $m = p$; ſi 2° l'angle ILC, ou l'angle que l'appliquée fait avec ſon diametre eſt droit. Voyez Art. 6. Ex. 2. 4. 6. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

C'eſt une ellipſe, ſi ces deux conditions, ou l'une des deux manquent. Voyez Art. 6. Ex. 3. 5. 14.

Lorſque $\frac{p}{m}xx$ eſt ſous le ſigne radical, le lieu cherché eſt une hyperbole. Voyez Art. 7.

Digitized by Google

L'on peut ajoûter, que c'eſt une hyperbole équilatere, ſi $aam = pzz$, ou $m = p$, Voyez Art. 7. Ex. 1. 2. 3. 6. 7. Fig. 69.

Et que, ſi aam n'eſt pas égal à pzz, ou m, à p, c'eſt une hyperbole non équilatere, Voyez Art. 7. Ex. 5. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.

Comme M. DESCARTES n'a point parlé de l'hyperbole conſiderée entre ſes aſymptotes; l'on peut rapporter ici la Regle, que l'on en donne dans les lieux Geometriques.

1° Lorſque le plan xy des deux inconnuës eſt dans l'équation, ſans aucun quarré des inconnuës, la ligne qui ſatisfait au Problême eſt une hyperbole conſtruite entre ſes aſymptotes.

2° Lorſque le plan xy ſe trouve dans une équation avec le quarré d'une des inconnuës ſeulement, la ligne cherchée eſt une hyperbole priſe ou par rapport à ſes diametres, ou par rapport à ſes aſymptotes: de ſorte que la même équation, ſi elle ſe reduit par l'évanoüiſſement des ſeconds termes, ſera à l'hyperbole rapportée à ſes diametres; & ſi elle ſe reduit par la ſimple ſubſtitution de nouvelles valeurs, elle ſera à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, Voyez Art. 7. Ex. 9. & Art. 8.

Au reſte les marques, par leſquelles M. DESCARTES veut que l'on reconnoiſſe le lieu qu'il faut conſtruire, reviennent à celles que l'on donne communément dans les lieux Geometriques. Il n'y a qu'à les comparer; les voici.

Le lieu eſt à la parabole, lorſque l'équation ne contient que le quarré de l'une des inconnuës, & que le plan xy ſous les deux inconnuës ne s'y trouve pas; l'exemple eſt $yy = px$. Extrayez la racine quarrée des deux côtez pour avoir $y = \sqrt{px}$; ce qui eſt ſous le ſigne radical de la valeur de y ne contient pas $\frac{p}{m}xx$, ou le quarré de la ſeconde inconnuë x; ce qui eſt la Regle de M. DESCARTES touchant la parabole.

Le lieu eſt au cercle, lorſque l'équation contient le quarré de chaque inconnuë, ſi 1° les quarrez étant l'un d'un côté de l'équation, l'autre de l'autre, ils ont des ſignes contraires; ſi 2° ces quarrez ſont reduits à l'unité; ſi 3° l'angle des abſciſſes avec les appliquées eſt droit; l'exemple eſt $yy = aa - xx$, ou $yy = 2ax - xx$. Extrayez la racine quarrée des deux membres; vous ferez $y = \sqrt{aa - xx}$, ou $y = \sqrt{2ax - xx}$; vous aurez, ainſi que M. DESCARTES le demande $-xx$, ou $-\frac{p}{m}xx$ ſous le ſigne radical; il veut auſſi que l'angle des abſciſſes avec les ordonnées ſoit droit; la troiſiéme condition que M. DESCARTES exige, c'eſt $aam = pzz$, c'eſt-à-dire, comme ces deux quantitez expriment le rapport du diametre au parametre, qu'il exige que le diametre ſoit égal au parametre, ce qui convient au cercle.

Or dans les lieux geometriques la condition, qui répond à celle-ci, c'eſt que les quarrez des deux inconnuës ſoient reduits à l'unité: ce qui arrive toûjours dans la derniere équation reduite; lorſque le diametre eſt égal au

FIG. 69 parametre. D'où il ſuit que c'eſt la même choſe de vouloir $aam = pzz$, ou les deux quarrez reduits à l'unité, Voyez Art. 6. Ex. 6. 9. 10.

Le lieu ſera à l'ellipſe & non pas au cercle, ſi la ſeconde & la troiſiéme condition, que l'on a rapportées pour le cercle, ou même ſi l'une des deux manquent. L'Exemple eſt $\frac{d}{p}yy = aa - xx$, ou $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$; ou bien $yy = \frac{aap - pxx}{d}$, $yy = \frac{2apx - pxx}{d}$. Extrayez la racine quarrée $y = \sqrt{\frac{aap}{d} - \frac{p}{d}xx}$, $y = \sqrt{\frac{2ap}{d}x - \frac{p}{d}xx}$. Tou cela eſt auſſi conforme à ce que M. Deſcartes demande pour l'ellipſe.

Le lieu eſt à l'hyperbole par ſes diametres, lorſque les deux quarrez des inconnuës étant l'un d'un côté de l'équation, l'autre de l'autre, ils ont tous deux le même ſigne. L'Exemple eſt $\frac{d}{p}yy = xx + aa$, ou $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$; ou bien $yy = \frac{pxx + paa}{d}$, $yy = \frac{2ax + pxx}{d}$. Extrayez la racine quarrée, $y = \sqrt{\frac{pxx}{d} + \frac{aap}{d}}$, $y = \sqrt{\frac{2ax}{d} + \frac{p}{d}xx}$; & vous avez, ainſi que M Deſcartes le veut, $y + \frac{p}{d}xx$ ſous le ſigne radical.

Il ne faut pas oublier que l'on peut avoir pour la paraboſe une valeur de y, dans laquelle il n'y aura point de ſigne radical, & où il y aura xx, Voyez Art. 5. Ex. 1. Le même peut auſſi arriver dans l'hyperbole rapportée à ſes diametres. Voyez Art. 7. Ex. 9. La valeur de y a moins ſouvent le ſigne radical, lorſqu'il s'agit de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, Voyez Art. 8.

ARTICLE V.

Conſtruction particuliere à la Parabole.

M. DESCARTES.

QUe ſi cette Section eſt une parabole, ſon côté droit eſt égal à $\frac{ax}{a}$, & ſon diametre eſt toûjours en la ligne IL de Fig. 69. & pour trouver le point N, qui en eſt le ſommet, il faut faire IN égale à $\frac{amm}{\omega z}$; & que le point I ſoit entre L & N, ſi les termes ſont $+ mm + \omega x$; ou bien que le point L ſoit entre I & N, s'ils ſont $+ mm - \omega x$; ou bien il faudroit que N fût entre I & L, s'il y avoit $- mm + \omega x$. Mais il ne peut jamais y avoir $- mm$, en la façon que les termes ont ici été poſez. Et enfin le point N ſeroit le même que le point I, ſi la quantité mm étoit nulle. Au moyen de quoi il eſt aiſé de trouver cette parabole par le premier Problême du premier Livre d'Apollonius.

Ce Problême eſt la Propoſition 52. qui apprend à décrire ſur un plan une parabole, étant donnez le parametre, le ſommet du diametre, & l'angle que les ordonnées doivent faire avec les coupées.

L'on

L'on trouve auſſi, dans tous les Traitez des Sections coniques, differentes methodes pour décrire une parabole ſur un plan. L'on a donné Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2. la maniere de décrire une parabole en cherchant ſes differens points ſur un plan : d'où l'on peut déja conclurre que les Problêmes, qui ſe conſtruiſent avec une parabole ſeulement, ſont plans. Voyez auſſi Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. fig. 69.

REGLE I.

LE côté droit, ou le parametre de la parabole, qu'il faut conſtruire, eſt $\frac{\omega z}{z}$. Cette Regle ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ dans l'équation à conſtruire. Voyez Exemple 3. 7. 8. 9.

Car le parametre eſt ω dans les Ex. 1. 2. 4. 5. 6.

REGLE II.

LE diametre de la parabole eſt dans la ligne *IL* de Fig. 69. cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 7. 8. 9.

Car le contraire arrive aux Ex. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

REGLE III.

LE point *N* eſt le ſommet de la parabole. Pour le trouver ſur la ligne *IL* l'on coupe $IN = \frac{mm}{\omega}$. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 7. 8. L'on prend $IN = \frac{mm}{\omega}$. Ex. 9.

Le contraire arrive aux Exemp. 4. 5. 6.

REGLE IV.

LOrſqu'il y a $+mm+\omega x$ ſous le ſigne radical, il faut faire en ſorte que le point *I* ſoit entre le ſommet *N*, & le point *L*; c'eſt-à-dire, qu'il faut prendre *IN* du côté oppoſé à celui, où eſt le point *L*, comme il arrive Fig. 69. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 7.

Car le même n'arrive pas entierement, Ex. 4.

REGLE V.

LOrſqu'il y a $+mm-\omega x$ ſous le ſigne radical, il faut faire tomber le point *L* entre le point *I* & le ſommet *N*; c'eſt-à-dire, que l'on prend *IN* du côté, où eſt le point *L*. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, & que *IN* eſt plus grande que *IL*, V. Ex. 8.

Car il n'arrive pas entierement la même choſe, Ex. 5.

REGLE VI.

LOrſqu'il y a $-mm+\omega x$ ſous le ſigne radical, il faut faire tomber le ſommet *N* entre le point *I* & le point *L*; c'eſt-à-dire, que l'on prend en-

core IN du côté, où eſt le point L, mais que IN eſt moindre que IL. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 3.

Car ce n'eſt pas entierement le même, Ex. 6.

REGLE VII.

LOrſque la quantité mm eſt nulle, le ſommet N eſt le même que le point I, Voyez Ex. 2.

Mais cela n'arrive pas, Ex. 1. 3.

REGLE VIII.

FIG. 76. J'Ajoûterai comme une Regle, 1° ſoit Fig. 76. l'abſciſſe AD, x; l'ordonnée CD, y; le parametre de la parabole p. Tous les lieux à la parabole ſont fondez ſur cette proprieté $yy = px$; c'eſt à dire, que le quarré d'une appliquée quelconque CD eſt égal au rectangle fait ſous le parametre p & l'abſciſſe correſpondante AD; laquelle commence toûjours au ſommet A du diametre, ſur lequel les x s'étendent. Et cela eſt vrai, ſoit que l'équation $yy = px$ ait d'abord été donnée par le Problême, ſoit qu'elle ſoit la reduite d'une autre plus compoſée, que les conditions du Problême ont produite. On dira la même d'une autre équation de même forme $xx = py$ $vv = fz$. 2° De ſorte que le diametre, dont on doit ſe ſervir, eſt toûjours ſur la ligne droite, à laquelle ſe termine l'inconnuë y ou v, dont l'équation contient le quarré. Et ſi l'autre inconnuë x ou z étoit ſur une autre ligne, il faudroit la tranſporter ſur le diametre, ſuivant la Regle 10. Sect. 4. L. 1. & faire enſuite dans l'équation les changemens, que cette Regle demande, comme on verra Ex. 3. n. 4. 6. Ex. 4. n. 6. Ex. 5. n. 7. Ex. 7. n. 6. où l'on connoîtra, comment Mr DESCARTES a trouvées les Regles, qu'il a données.

M. DESCARTES avertit, qu'il ne peut y avoir $-mm$ dans l'équation, de la façon dont les termes ſont ici poſez. Cet avertiſſement regarde autant le cercle, l'ellipſe, l'hyperbole, que la parabole. Car M. DESCARTES met ſon équation $yy = \frac{-dekzzy - dezzxy + bcfglx - cfgzxy + cfglzy + begzxy - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$ comme une formule generale, dans laquelle il n'y a point de terme compoſé de ſeules quantitez connuës: ainſi il ne peut y avoir de terme entierement connu dans la valeur de y, que celui qu'on y fera entrer. Or, comme l'on a vû, Part. 2. Sect. 2. Art. 1. n. 1. Ayant $yy = 2my - \frac{2nxy}{z} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, ou $yy, -2my + \frac{2nxy}{z} = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, il faut, pour en tirer la valeur de y, ajoûter dans chaque membre de cette équation $mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz}$, afin d'avoir $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} +$

$\frac{nnzx}{zz} = mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, & enfin $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. C'eſt pourquoi dans l'opinion, où étoit M. DESCARTES, que ſa formule ne devoit point avoir de terme entierement connu, & qu'il falloit, pour avoir la valeur de y, faire neceſſairement entrer $+ mm$, il pouvoit avertir, que de la façon que les termes ſont ici poſez, la valeur de y, ne contiendroit jamais $- mm$. Voyez pour la parabole, Ex. 6. 9. Pour le cercle ou l'ellipſe, Ex. 7. 10. 14. Pour l'hyperbole rapportée à ſes diametres, Ex. 2. 6. 12. 15. Ou l'on a $- mm$ ou $- ff$.

EXEMPLE I. $y = \frac{p}{m}xx$.

1. SOient Fig. 76. AB, AD, EF, trois lignes données de poſition, dont AB, EF ſont paralleles entr'elles, & la troiſiéme AD les coupe à angles droits; & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF perpendiculaires ſur les données; ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CF ſoit égal au quarré de CD, + le quarré de CB. FIG. 76.

2. Je ſuppoſe la choſe déja faite, & je nomme la connuë AE, $m = BF = bf$, CB, $y = AD$; AB, $x = CD$; $CF = CB + BF\,y + m$.

3. Puiſque l'on demande que $CB \times CF$ ſoit égal à $\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2$, l'on aura l'équation $yy + my = xx + yy$; $my = xx$; $y = \frac{xx}{m}$; & mettant $p = m = 1$. $y = \frac{p}{m}xx$. Or l'équation $my = xx$ eſt à la parabole.

4. Je prends AE, m pour le parametre de la parabole, qu'il faut conſtruire; AD pour ſon axe; A pour le ſommet de l'axe; CD pour une appliquée à cet axe; & je décris la parabole CAc, en faiſant $m : x :: x : \frac{xx}{m} = y = CB$; par ce moyen chaque fois que je déterminerai une nouvelle grandeur de AB, x, je trouverai une nouvelle grandeur de CB, y; & par conſequent un point C de la parabole CAc, qui eſt le lieu cherché. La demonſtration en eſt facile.

5. Il faut remarquer 1° que le Problême eſt plan. 2° Que la quantité y n'a point de valeurs negatives, que x a des valeurs poſitives & negatives; que les valeurs de x & de y ſont variables, comme dans les lieux geometriques; que le point A étant le commencement des x & des y, ces deux inconnuës ſont nulles dans ce point, il ſuit auſſi que le Problême eſt impoſſible dans les angles BAE, bAE. 3° Que le parametre n'eſt pas $\frac{\omega z}{a}$, mais ω, ou m, Regle 1. que le diametre n'eſt pas dans la ligne IL de Fig. 69. ni dans aucune, qui paroiſſe tenir ſa place, Regle 2. mais le diametre AD eſt parallele à CB; & l'appliquée CD eſt parallele à AB. Voyez le Texte de M. DESCARTES, Art. 4. 4° Que, quoique l'on trouve ici $y = + \frac{p}{m}xx$, il n'y a pourtant rien de contraire à la Regle 2. Art. 4. qui détermine les lieux à l'hyperbole conſiderée par rapport à ſes diametres: parceque

Fig. 76. cette Regle ſuppoſe que $+\frac{p}{m}xx$ eſt ſous un ſigne radical, ce qui n'arrive pas dans ce Problème. Seulement il faut conclurre que la valeur de y n'a pas toûjours un ſigne radical, & que même elle peut avoir $+\frac{p}{m}xx$ dans une équation à la parabole. Or cette équation $y=\frac{xx}{m}$ eſt fort naturelle à la parabole, dont l'équation eſt $yy=px$, $x=\frac{yy}{p}$.

6. De l'équation $my=xx$ l'on auroit pû faire $x=\sqrt{my}$, ou en poſant $m=\omega$, $x=\sqrt{\omega y}$, qui reſſembleroit à la formule $y=\sqrt{\omega x}$, & l'on chercheroit les points de la parabole par des extractions de racines quarrées : mais la conſtruction ne ſeroit pas ſi ſimple, que celle que l'on a fait n. 4. en ne ſe ſervant que d'une proportion.

EXEMPLE II. $y=m\pm\sqrt{\omega x}$.

Fig. 77 1. SOient Figure 77. données de poſition les quatre droites AB, AD, EF, GH, qui ſont un rectangle $AGLE$. Soit AI la moitié de AE. Il faut trouver un point C, duquel on tire les quatre droites, CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données, de ſorte que le produit de $BC\times FC$, plus le quarré de AI, ſoient égaux au produit de $CD\times CH$, plus le quarré de AB.

2. Suppoſons la choſe faite, & nommons AE, $2m=GL=BF$; $AI=m$; & AG, $\omega=HD$; les inconnuës AB, $x=CD$; CB, y; $CF=CB-BF$, $y-2m$; $CH=HD-CD$, $\omega-x$.

3. Par la ſuppoſition $\overline{BC\times CF}+\overline{AI}^2=\overline{CD\times CH}+\overline{AB}^2$ c'eſt-à-dire en termes analytiques $yy-2my+mm=\omega x$; dont les racines ſont, la poſitive $y-m=\sqrt{\omega x}$, $y=+m+\sqrt{\omega x}$; la negative $-y+m=\sqrt{\omega x}$, $y=m-\sqrt{\omega x}$; les deux $y=m\pm\sqrt{\omega x}$. Equation à la parabole.

4. Pour conſtruire l'équation $y=m+\sqrt{\omega x}$; parcequ'il y a $+m$, ſur la ligne BC prenez $BK=m$; par le point K menez l'infinie KI, qui ſera le diametre de la parabole, dont le ſommet N tombera ſur I parceque mm eſt nul Regle 7. & le parametre $\omega=AG$. Ces choſes étant données avec l'angle droit ABC ou NKC qui lui eſt égal, lequel angle NKC eſt celui que les coupées & les ordonnées font enſemble; l'on peut décrire la parabole CNc, & trouver tous ſes points C, c, en ne faiſant pour le plus qu'extraire la racine quarrée de ωx, après avoir déterminé la valeur de x : car alors on aura la valeur de CB, y, qui correſpond à chaque valeur arbitraire de x. Voyez Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. n. 2. & L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

Je dis que cette parabole eſt le lieu cherché, qui donne la même valeur de y dans tous ſes points : mais qui ne donne l'équation $yy-2my+mm=\omega x$, que ſur les portions déterminées XV, xv.

Dém. Chaque abſciſſe NK, Nk eſt x; ω étant le parametre, tous les CK, ck ſont $\sqrt{\omega x}$. Maintenant 1° au point C pris ſur l'arc déterminé VX de la parabole, l'on a CB, $y=CK+KB$, $\sqrt{\omega x}+m$. 2° Au point c

pris ſur l'arc déterminé NV, l'on a cb, $y = ck + kb$, $\sqrt{\omega x + m}$. Mais on a là $\overline{bc \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $2my - yy + mm = \omega x - xx + xx$; $yy - 2my + mm = 2mm - \omega x$; $y = m \pm \sqrt{2mm - \omega x}$. Ce qui ne s'accorde pas avec l'équation & les racines trouvées n. 3. Puiſque ce que l'on trouve ici eſt un lieu à une autre parabole. 3° Au point c pris ſur l'arc infini XZ; cb, $y = ck + kb$, $\sqrt{\omega x + m}$, Mais l'on a $\overline{bc \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $yy - 2my + mm = xx - \omega x + xx$; $y = m \pm \sqrt{-\omega x + 2xx}$, équation à l'hyperbole. 4° Au point c pris ſur l'arc ux, cB a une valeur negative $-y = cK - kB$, $\sqrt{\omega x - m}$, qui ſe change en $y = m - \sqrt{\omega x}$, racine negative de n. 3. $\overline{cB \times cF} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $yy - 2my + mm = \omega x$, même équation que n. 3. 5° Au point c pris ſur l'arc fini Nu, cb a la valeur poſitive de n. 3. $y = bk - ck$, $m - \sqrt{\omega x}$. Mais on a là $\overline{cb \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $2my - yy + mm = \omega x$, d'où l'on tire $y = m \pm \sqrt{2mm - \omega x}$, équation à une autre parabole. 6° Au point c pris ſur l'arc infini xz, cb a une valeur negative $-y = ck - bk$, $\sqrt{\omega x - m}$; $y = m - \sqrt{\omega x}$. Mais l'on a $\overline{cb \times cf} + \overline{AI}^2 = \overline{cd \times ch} + \overline{AB}^2$, $yy - 2my + mm = -\omega x + 2xx$. $y = m \pm \sqrt{-\omega x + 2xx}$ à l'hyperbole. Il eſt donc vrai, que tous les points de la parabole CNc donnent la même valeur de y; & l'équation $yy - 2my + mm = \omega x$ ſur les arcs finis XV, xu. Fig. 77.

5. Il faut remarquer 1° que le Problême eſt plan. 2° Que la quantité x n'a point de valeurs negatives, parceque la parabole ne s'étend que du côté de G, H, vers lequel les poſitives ſe prennent; que la quantité y n'a des valeurs negatives, que ſur l'arc indefini uxz; qu'elle en a deux poſitives ſur l'arc déterminé VNu; qu'au point V elle en a une poſitive, qu'au point u elle n'en a point, comme x n'en a point au ſommet N, qui répond au point A ſon origine; que le point u eſt auſſi le commencement des y; que les valeurs tant de x que de y ſont variables. 3° Que le parametre n'eſt pas $\frac{u}{n}$, mais ω, Regle 1. Que le diametre n'eſt pas dans IL, mais dans IK, Regle 2. Le point N eſt le même que le point I, parceque $mm = o$, Regle 7. 4° Le Problême eſt non ſeulement impoſſible dans les angles RAE, RAP, par leſquels la parabole ne paſſe pas; mais encore ſur l'arc fini VNu, & ſur les infinis XZ, xz, puiſque l'on ne trouve pas dans ces endroits l'équation qu'il y faut avoir, quoiqu'on y trouve la valeur de y qu'on cherche, à ſavoir la poſitive $y = m + \sqrt{\omega x}$ ſur toute la portion infinie NZ, la negative $y = m - \sqrt{\omega x}$ ſur toute la portion infinie Nz. D'où il ſuit qu'afin qu'une ligne ſoit le lieu cherché, il ne ſuffit pas que l'on trouve dans tous ſes points la valeur de y par l'addition ou ſouſtraction de quelques lignes: mais il faut encore qu'on y trouve l'équation, d'où l'on ait tiré cette valeur de y. L'équation n'eſt donc conſtruite que ſur les arcs

qui donnent les racines de y & l'équation de n. 3. & en conſtruiſant la racine poſitive, l'on a auſſi conſtruit la negative. 5° L'équation $yy - 2my + mm = \omega x$ contient un terme qui n'a point de quantité inconnuë.

EXEMPLE III. $y = \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x}$.

FIG. 78. 1. SOient Fig. 78. données de poſition les lignes AD, AB, EF; dont AB, EF ſont paralleles entr'elles, & AD leur eſt perpendiculaire. Il faut trouver pluſieurs points tels que C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, le produit de CD multipliée par CF ſoit égal au quarré de CB plus le quarré de la moitié de CD.

2. Suppoſez la choſe faite, & nommez la donnée AE, $\omega = BF$; les inconnuës CB, y; AB, $x = CD$; $CF = CB + BF$, $y + \omega$.

3. Par l'hypotheſe $CD \times CF = \overline{CB}^2 + \frac{1}{4}\overline{CD}^2$; $xy + \omega x = yy + \frac{1}{4}xx$; $yy - xy + \frac{1}{4}xx = \omega x$; dont les deux racines ſont $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega x}$, ou $y = \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x}$, en poſant $n = 1 = \omega$, $z = 2$. Equation à la parabole.

4. Pour la conſtruction, coupez $BL = \frac{n}{z}x$ au deſſous de AB, parcequ'il y a $+\frac{n}{z}x$ Art. 2. Par les points A, L tirez l'infinie AL, ſur laquelle Regle 8. le diametre ſera, parceque $CL = \sqrt{\omega x}$ eſt l'appliquée de la parabole cherchée. Il faut donc tranſporter l'abſciſſe AB, x ſur $AL = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BL}^2} = x\sqrt{\frac{1}{4}}$; & faiſant $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{n}{z}$, AL eſt $\frac{n}{z}x$ expreſſion de M. DESCARTES pour IL de Fig. 69. Pour avoir la valeur du parametre p, il faut conſiderer que par la nature de la parabole $\overline{CL}^2 = p \times AL$, $\omega x = \frac{p\,n\,x}{z}$, donc le parametre $p = \frac{\omega z}{n} = \frac{1}{1}\sqrt{1}$. Ayant le parametre, le diametre AL, l'angle ALC, que les coordonnées doivent faire, on décrira la parabole CAc, laquelle eſt le lieu cherché. Le ſommet N eſt au point A.

Dém. $\overline{CL}^2 = \omega x$; $CL = \sqrt{\omega x}$. Cette expreſſion convient à toutes les ordonnées cl. Maintenant 1. au point C, vous avez CB, $y = BL + LC$, $\frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x}$ racine vraye; que vous trouverez, auſſi bien que l'équation de n. 3. ſur toute la partie infinie NC de la parabole. 2° Au point c pris entre les paralleles AB, EF, où cB a une valeur negative, l'on a $cd \times cF = \overline{cB}^2 + \frac{1}{4}\overline{cd}^2$, $\omega x + xy = yy + \frac{1}{4}xx$ même équation que n. 3. 3° Au point c pris ſur l'arc infini VZ, ou cb, $y = \frac{n}{z}x - \sqrt{\omega x}$ racine negative; de plus $cd \times cf = \overline{cb}^2 + \frac{1}{4}\overline{cd}^2$, $xy + \omega x = yy + \frac{1}{4}xx$, même équation que n. 3.

La parabole CNc ſatisfait donc au Problême, & donne la racine poſitive de y ſur la partie infinie NC, la negative ſur la partie infinie NVZ. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer 1° que le Problême eſt plan. 2° Que la quantité y n'a des valeurs negatives, que ſur l'arc déterminé NV, & que $y = 0$ au

point *V*. 3° Que la partie infinie *NC* de la parabole donne la racine positive $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x}$; & la partie infinie *NVZ* la negative $y = \frac{n}{z}x - \sqrt{\omega x}$; & parceque l'on trouve dans tous les points la même équation ; en conſtruiſant la racine poſitive, l'on a auſſi conſtruit la negative. 4° Que le parametre eſt $\frac{\omega z}{a}$, Regle 1. Le diametre eſt dans *AL*, Regle 2. Le ſommet *N* tombe ſur *A*, parceque *mm* eſt nulle, Regle 7. 5° Que le Problème eſt impoſſible dans les angles *PAE*, *PAD*, par leſquels la parabole ne paſſe pas. FIG. 78.

6. Si l'on vouloit reduire l'équation $yy - xy + \frac{1}{4}xx = \omega x$ par l'évanoüiſſement du ſecond terme ; l'on prendroit $y - \frac{1}{2}x = v$, $v + \frac{1}{2}x = y$; & mettant pour yy & pour xy leur valeur ; la premiere équation ſe changeroit en $vv = \omega x$, lieu à la parabole, qui ſe conſtruit ainſi.

Faiſons 2 : 1 :: *AB*, *x* : *BL*, $\frac{1}{2}x$; par les points *A*, *L*, tirons *AL*, qui ſera le diametre Regl. 8. parceque *CL*, $v = CB - BL$, $y - \frac{1}{2}x$, qui eſt l'ordonnée de la reduite $vv = \omega x$, ſe termine à la ligne *AL*. Donc *AL* eſt abſciſſe, dont nous trouverons la valeur $\frac{n}{z}x$, comme n. 4. auſſi bien que celle du parametre $\frac{\omega z}{a}$. La parabole *CNc* décrite ſur le diametre *AL*, dont le ſommet eſt *A*, avec le parametre $\frac{\omega z}{a}$, & l'angle *CLA* des abſciſſes & des ordonnées, ſera le lieu cherché.

Dém. Au point *c* pris entre les paralleles *AB*, *EF*. Par la nature de la parabole $\overline{cL}^2 = \frac{\omega z}{a} \times AL$, $\frac{n}{z}x$; $vv = \omega x$, & pour vv ſubſtituant ſa valeur ; l'on forme $yy - xy + \frac{1}{4}xx = \omega x$; équation à conſtruire. Ce qu'il falloit démontrer.

L'on voit comment M. DESCARTES a pû connoître que le parametre de la parabole eſt $\frac{\omega z}{a}$, lorſque l'équation contient $\frac{n}{z}x$, que le diametre eſt dans *AL*, & que le ſommet eſt au point *A*, étant $mm = o$.

EXEMPLE IV. $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$.

1. FIg. 79. ſoient données de poſition les quatre lignes droites *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, qui font un parallelogramme rectangle ; & qu'il faille trouver un point *C*, duquel on puiſſe tirer quatre autres lignes droites *CB*, *CD*, *CF*, *CH* ſur les données, de ſorte que ce qui ſe produit par la multiplication de *BC*, *CF*, moins le quarré de *CD*, ſoit égal à ce qui ſe produit par la multiplication *CD*, *CH*.

2. Nommons les données AE, $2m = Gm = BF = bf$; AG, $\omega = Em = DH = dh$; & les inconnuës *AB*, $x = CD$; *CB*, y ; *CF*, $y - 2m$; *CH*, $\omega - x$.

3. Puiſque l'on demande $\overline{BC \times \epsilon F} - \overline{CD}^2 = CD \times CH$, l'équation ſera $yy - 2my - xx = \omega x - xx$; $yy - 2my + mm = mm + \omega x$, dont les racines ſont $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$, à la parabole.

4. Parcequ'il y a $+m$, je coupe $BK = m$ au deſſous de *AB*, & par le

Fig. 79. point K je mene l'infinie KI parallele à AB. Le point I eſt le milieu de AE, & $AI = BK$, m; $IK = AB$, x. Le parametre eſt ω; ſur KI je prends $IN = \frac{mm}{\omega}$ Regle 3. N eſt le ſommet de la parabole; le diametre ſur IK; parcequ'il y a $+ mm + \omega x$, je fais que le point I ſoit entre le ſommet N & le point K Regle 4. L'angle CKN des abſciſſes avec les ordonnées eſt droit. Je puis donc décrire la parabole CNc, comme on l'a dit, Exemple 2. n. 4. Je dis qu'elle donne à la verité la même valeur de y dans tous ſes points : mais qu'elle ne donne l'équation $yy - 2my = \omega x$ que ſur les arcs finis EZ, AZ.

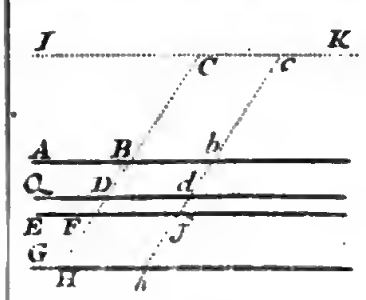
En effet tous les KN, kN ſont $\frac{mm}{\omega} + x$, tous les CK, ck ſont $\sqrt{mm + \omega x}$, le parametre étant ω. Sur l'arc EZ les CB, y ſont $= m + \sqrt{mm + \omega x}$ racine poſitive; ſur l'arc Az, $y = m - \sqrt{mm + \omega x}$ racine negative & dans tous les deux arcs on a l'équation $yy - 2my = \omega x$, comme n. 3. ſur les arcs EN, AN on a cb, $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$ & l'équation $yy - 2my = \omega x - 2xx$ à l'ellipſe, differente de n. 3. Sur les arcs XZ, xz on a cb, $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$ & ſur tous les deux l'équation $yy - 2my = -\omega x + 2xx$ à l'hyperbole, encore differente de n. 3.

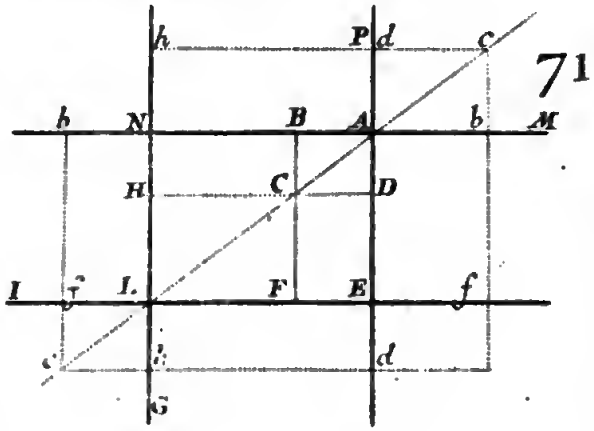
5. Il faut remarquer 1° que le Problême eſt plan. 2° Que les inconnuës x, y ont des valeurs poſitives & negatives; au point A il n'y a ni x, ni y. 3° Que la moitié infinie NC de la parabole donne la valeur poſitive de y; & la moitié infinie Nc donne la negative. 4° Que le parametre eſt ω, Regle 1. le diametre dans IK, Regle 2. le point I eſt entre le ſommet N & le point K parcequ'il y a $+ mm + \omega x$, Regle 4. $IN = \frac{mm}{\omega}$, Regle 3. 5° Qu'il ne ſuffit pas qu'une ligne donne dans tous ſes points la valeur de y, pour être le lieu de l'équation propoſée; mais qu'il faut encore que tous les points donnent l'équation, dont la valeur de y a été tirée.

6. L'on connoîtra que le parametre doit être ω, & $IN = \frac{mm}{\omega}$, ſi l'on reduit l'équation $yy - 2my = \omega x$ en faiſant évanoüir le ſecond terme. Soit $y - m = v$, $y = v + m$, la reduction donne $vv = mm + \omega x$. 1° L'abſciſſe NK, qui doit être multipliée par le parametre contient x, & le produit de cette multiplication eſt $mm + \omega x$, qui par la nature de la parabole eſt égal à vv quarré de l'appliquée; je prends donc ω pour le parametre, afin que multipliant IK, x j'aye dans le produit ωx. De plus le même parametre doit multiplier toute l'abſciſſe NK, nommons IN, r, NK ſera $NI + IK$, $r + x$, qui étant multipliée par ω, fera $\omega r + \omega x$. Mais ce produit doit être égal à $mm + \omega x$, puiſque ces deux quantitez ſont chacune égale au quarré vv de l'appliquée. J'ai donc $\omega r + \omega x = mm + \omega x$; $\omega r = mm$; $r = \frac{mm}{\omega} = IN$. Voyez Regle 8.

7. Vous avez Exemp. 5. n. 3. $y = m \pm \sqrt{mm + \omega x}$, dont la conſtruction donneroit une parabole, qui dans tous les points ſatisferoit au Problême.

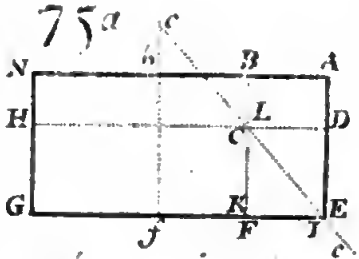
EXEMPLE

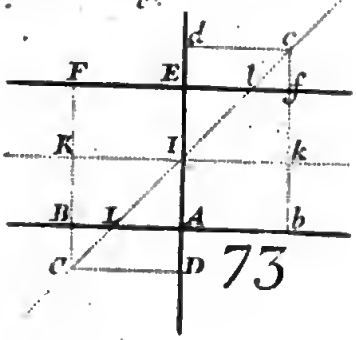




71

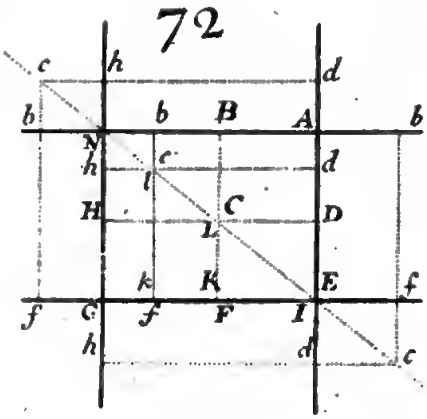
75a



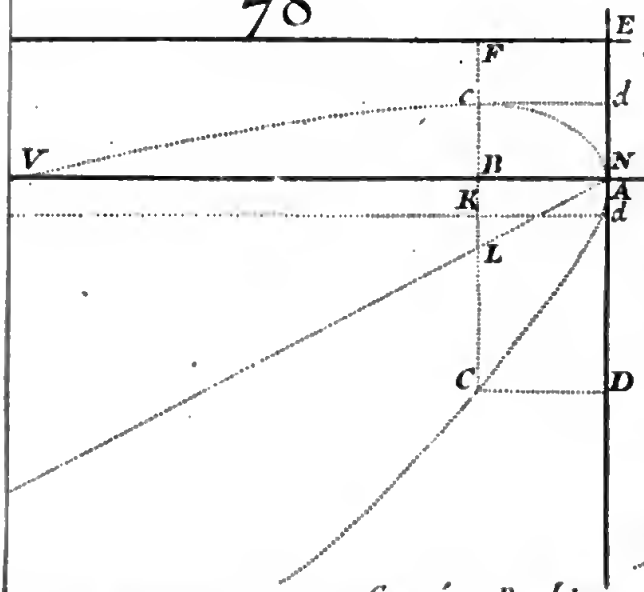


73

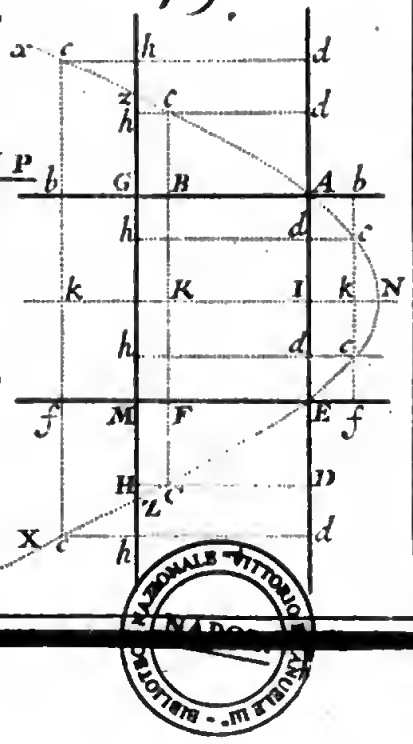
72



78



79.



Gravé par Daudet.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

EXEMPLE V. $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x}$.

1. FIg. 80. ſoient données de poſition les quatre droites AB, AD, EF, GH, dont les trois AD, EF, GH ſont, en ſe coupant, un triangle équilateral, & la quatriéme AB eſt parallele à EF. Il faut trouver un point C, duquel on puiſſe tirer quatre autres lignes droites CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données, de telle ſorte qu'on ait $CB \times CD = CF \times CH$. FIG. 80.

2. Après avoir ſuppoſé la choſe faite, & pris la donnée BF diſtance des paralleles AB, EF, pour l'unité ; vous nommerez les inconnuës AB, x; CB, y; $CF = BF - CB$, $1 - y$: Prolongez CB en R; & remarquez que tous les angles, qui ſe font autour du point A ſont de 60. degrez.

Maintenant dans le triangle ABR l'angle ABR eſt droit ſupp. l'angle BAR de 60. degrez; donc l'angle ARB eſt de 30. Le ſinus de 60. degrez eſt *86602*. celui de 30. eſt *50000*; & la proportion du ſecond au premier eſt comme 1 à $\frac{86602}{50000}$ ou $\frac{43301}{25001}$, que je nomme b. Or par le Theorême de Trigonometrie, L. 1. Part. 3. Sect. 1. Art. 2. L'on a cette proportion des côtez du triangle ABR avec le ſinus de leurs angles oppoſez, $1 : b :: AB, x : BR, bx$; & $CR = CB + BR$, $y + bx$.

Enſuite dans le triangle CHR rectangle en H ſupp. l'on a cette analogie, comme le ſinus total *100000* de l'angle droit CHR eſt à *50000* ſinus de l'angle CRH; ou comme $2 : 1 ::$ ainſi le côté CR, $y + bx$ eſt à CH $\frac{y+bx}{2}$.

De plus les triangles ABT, ABR, ſont égaux; donc $BT = bx$; & $CT = y - bx$.

Après cela les angles du triangle CDT ſont connus; donc le ſinus total *100000* de l'angle droit CDT eſt à *50000* ſinus de l'angle CTD de 30. degrez; ou 2 eſt à 1, comme le côté CT, $y - bx$ eſt au côté CD, $\frac{y-bx}{2}$.

3. L'on demande $CB \times CD = CF \times CH$; l'équation ſera donc $\frac{yy - bxy}{2} = \frac{y + bx - yy - bxy}{2}$; dont les racines ſont $y = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}bx}$, équation ſemblable à celle de l'Exemple IV.

4. Que l'on demande $CB \times CF = CD \times CH$; l'équation ſera celle-ci; $yy - \frac{4}{5}y = \frac{1}{5}bbxx$; dont les racines ſont $y = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{5}bbxx}$, équation à l'hyperbole, qui ſeroit $y = m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$, en poſant $\frac{2}{5} = m$, $\frac{1}{5}bb = \frac{p}{m}$.

5. Mais ſi l'on demande $CB \times CH = CD \times CF$, l'équation eſt $yy - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}bx$; dont les racines ſont $y = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{2}bx}$, qui ſe reduit à $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x}$, en faiſant $\frac{1}{4} = m$; $\frac{1}{2}b = \omega$, & l'équation eſt à la parabole.

Fig. 80. 6. L'on conſtruira le Problême de cette maniere. Parcequ'il y a $+m$, ſur CB coupez $BK = m$ de ſorte que le point K ſoit entre B & C; par le point K menez l'infinie KI parallele à AB, tel que la partie IK ſoit égale à AB, x; prenez $IN = \frac{mm}{\omega}$ Regle 3. parcequ'il y a $mm - \omega x$, faites que le point K tombe entre N & I, Regle 4. le point N eſt le ſommet de la parabole; le diametre eſt IK, Regle 2. le parametre ω, Regle 1. l'angle CKI des coupées & des ordonnées eſt droit. Vous pouvez donc, comme on l'a dit Exemple 2. n. 4. décrire la parabole cCN, qui eſt le lieu cherché.

Dém. L'abſciſſe NK eſt $IN - IK$, $\frac{mm}{\omega} - x$. Par la nature de la parabole $CK = \sqrt{mm - \omega x}$; ce qui ſe peut démontrer de tous les ck, parceque lorſque le point c eſt pris au deſſous de IA, $Ik = Ab$, $-x$; & $Nk = NI + Ik$, $\frac{mm}{\omega} - x$, qui étant multipliée par le parametre ω, donne $mm - \omega x$ pour $\overline{ck}^2$, & $ck = \sqrt{mm - \omega x}$. 1° Au point C, l'on a $CB = BK + KC$, $y = m + \sqrt{mm - \omega x}$, racine vraye. Et c'eſt à ce point C qu'on a fait le calcul de n. 5. 2° Au point c pris entre le ſommet N & le point A, (ce point c n'eſt pas écrit, pour éviter la confuſion dans la Figure,) on a $cB = KB - Kc$, $y = m - \sqrt{mm - \omega x}$ racine fauſſe de n. 5. 3° Au point c pris auprès de G, l'on a $cb = bk + kc$, $y = m + \sqrt{mm - \omega x}$ racine vraye. De plus comme n. 2. l'on trouvera dans le triangle Abr, que br eſt $-bx$, parceque Ab eſt là $-x$; cb, y; $cf = 1 - y$; $cr = y + bx$; dans le triangle chr, ch eſt $\frac{y + bx}{2}$; $bt = br$, $-bx$; $ct = y - bx$; dans le triangle cdt, cd eſt $\frac{y - bx}{2}$. Enſuite par la ſuppoſition $cb \times ch = cd \times cf$, $yy - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}bx$, même équation que n. 5. 4° Au point c pris dans l'angle Zat, (l'on n'a pas tiré la ligne ch pour éviter la confuſion dans la Figure) l'on trouvera Ab, $-x$; cb, $-y$; $cf = -y + 1$; br, $-bx$; $cr = -y - bx$; ch, $\frac{-y - bx}{2}$; $bt = br$, $-bx$; $ct = -bx$; $+y$; cd, $\frac{-bx + y}{2}$. Et $cb \times ch = cd \times cf$, $\frac{yy + bxy}{2} = \frac{bxy - yy - bx + y}{2}$, même équation que n. 5. 5° La parabole paſſe par le point A, car à ce point par la nature de la parabole, l'on aura le parametre $\omega \times IN$, $\frac{mm}{\omega} = \overline{IA}^2$, c'eſt-à-dire, $mm = mm$. Enfin dans tous les points de la parabole l'on trouve les valeurs de y, la poſitive ſur la moitié NCc, la negative ſur la moitié NAc; & par tout l'équation $2yy - y = -bx$: La parabole CNA eſt donc le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

7. Faiſons $y - \frac{1}{4} = v$, $y = v + \frac{1}{4}$, l'équation $yy - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}bx$ ſe reduira par la ſubſtitution à $vv = \frac{1}{16} - \frac{1}{2}bx$, où faiſant $\frac{1}{4} = m$, $\frac{1}{2}b = \omega$, $vv = mm - \omega x$. Maintenant par la nature de la parabole vv eſt le quarré de CK, $mm - \omega x$ eſt le rectangle ſur $NK \times$ le parametre. De plus les deux termes de ce rectangle prouvent que x n'eſt pas égale à l'abſciſſe, &

le terme ωx prouve que le parametre eſt ω. A preſent ſoit $r - x$ l'abſciſſe, le rectangle $NK \times \omega$ eſt $\omega r - \omega x = mm - \omega x$; d'où l'on tire $r = \frac{mm}{\omega}$ la quantité IN, de laquelle il faut ôter IK, x pour avoir l'abſciſſe NK, & on connoît ainſi que le point K doit être entre les points I, N. Le parametre eſt ω, Regle 1. le diametre dans IK, Regle 2. IN eſt $\frac{mm}{\omega}$, Regle 3. le point K eſt entre le ſommet N & le point I, parcequ'il y a $mm - \omega x$, Regle 5.

EXEMPLE VI. $y = -m \pm \sqrt{-ff + \omega x}$.

1. COmme Exemple 5. n. 1. excepté, que l'on ſuppoſe le point C dans l'angle BAR Figure 81. & que l'on demande $CB \times CD = \overline{CF \times CH} - \overline{BF}^2$. FIG. 81.

2. Comme n. 2. tous les angles autour du point A ſont de 60. degrez, l'on nommera AB, x; CB, y; BF, 1; mais l'on aura CF, $y + 1$.

L'on trouvera encore BR, bx; mais $CR = BR - CB$, $bx - y$.

L'on trouvera par conſequent CH, $\frac{bx - y}{2}$.

Enſuite l'on trouvera $BT = BR$, bx; mais $CT = CB + BT$, $y + bx$. Enfin CD, $\frac{y + bx}{2}$.

3. Puiſque il faut que $CB \times CD$ ſoit égal à $\overline{CF \times CH} - \overline{BF}^2$, l'équation ſera $\frac{yy + bxy}{2} = \frac{bxy - yy + bx - y}{2} - 1$; dont les racines ſont $y = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{15}{16} + \frac{1}{2}bx}$ ou $y = -m \pm \sqrt{-ff + \omega x}$, en faiſant $\frac{1}{4} = m$; $\frac{1}{2}b = \omega$; $\frac{15}{16} = ff$, l'on ne peut pas mettre mm, parceque $\frac{15}{16}$ n'eſt pas le quarré de $\frac{1}{4} = m$.

4. L'on doit ainſi conſtruire le Problême, Parcequ'il y a $-m$, l'on prendra $BK = m$ de l'autre côté de AB, où C n'eſt pas, ſuivant l'Art. 2. par le point K l'on menera KI parallele & égale à AB, x. Sur IK l'on coupera $IN = \frac{ff}{\omega}$ Regle 3. & l'on fera que le point N tombe entre les points I, & K, parcequ'il y a $-ff$, Regle 6. & le point N eſt le ſommet de la parabole, dont le parametre eſt ω, Regle 1. le diametre IK, Regle 2. l'angle CKN eſt celui des abſciſſes & des appliquées. L'on peut donc décrire la parabole CNc, ſuivant ce qui a été dit Exemple 2. n. 4. Je dis que cette parabole donne par tout l'une des valeurs de y, & l'équation $yy + \frac{1}{2}y = -1 + \frac{1}{2}bx$ ſur l'arc indeterminé VCc.

Dém. L'abſciſſe NK eſt $IK - IN$, $x - \frac{ff}{\omega}$, qui étant multipliée par le parametre ω, produit $\omega x - ff$; donc $CK = \sqrt{-ff + \omega x}$; l'on peut démontrer le même de toutes les abſciſſes Nk, & de toutes les ordonnées ck.

1° Au point C pris ſur l'arc indefini VC, l'on a $CB = CK - KB$, $y = \sqrt{-ff + \omega x} - m$. C'eſt au point C que le calcul a été fait n. 3. 2° Au point c pris ſur l'arc Nu, ou cB a des valeurs negatives, vous trouverez $cB = cK + KB$, $-y = \sqrt{-ff + \omega x} + m$; $y = -m - \sqrt{-ff + \omega x}$

FIG. 81. racine fauſſe de n. 3. & par l'hypotheſe $\overline{cB \times cd} = \overline{cF \times ch} - \overline{BF}^2$, $\frac{-bxy-yy}{2} = \frac{-y+bx-yy+bxy}{2} - 1$; $2bxy - y + bx = 2$, équation à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes. 3° Au point c pris ſur l'arc NV (l'on n'a pas marqué les lignes, qui peuvent être tirées de ce point c ſur les données, de peur de mettre de la confuſion dans la figure) où y a des valeurs negatives l'on aura $cb = kb - ck$, $-y = m - \sqrt{-ff + \omega x}$, $y = -m + \sqrt{-ff + \omega x}$ valeur vraye de n. 3. Tout le reſte eſt comme au point c pris ſur l'arc Nu. 4° Au point c pris ſur l'arc indefini uZ, l'on trouvera $cb = ck + kb$, $-y = \sqrt{-ff + \omega x} + m$, $y = -m - \sqrt{-ff + \omega x}$ racine fauſſe de n. 3. Et l'équation $\frac{-bxy-yy}{2} = \frac{yy-bxy+y-bx}{2} - 1$; $yy + \frac{1}{2}y = 1 + \frac{1}{2}bx$, à la même parabole, mais differemment poſée, par la Regle IV.

Remarquez 1° qu'au point V, l'on trouve $y = o$. & ce point eſt l'origine des y. 2° Que la racine poſitive ſe trouve dans la moitié NC de la parabole, la negative ſur l'autre moitié NZ, mais que l'équation $yy + \frac{1}{2}y = -1 + \frac{1}{2}bx$, ne ſe trouve que ſur la partie infinie VCc. 3° Que le Probleme eſt impoſſible non ſeulement dans les angles EAG, GAP, PAR, RAH, par leſquels la parabole ne paſſe point; mais encore dans l'angle EAB, dans lequel une partie infinie VNZ de la parabole eſt décrite. L'équation eſt conſtruite pour les deux racines en même tems, de la façon que cela ſe peut faire. 4° Qu'il y a un terme dans l'équation qui n'a que des quantitez connuës.

EXEMPLE VII. $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm + \omega x}$.

FIG. 82. 1. FIg. 82. ſoient les trois lignes AB, AD, EF données de poſition, faiſant par leur interſection un triangle AEG équilateral. Il faut trouver un point C dans l'angle AEF, d'où l'on puiſſe tirer les lignes CB, CD, CF ſur les données, de telle ſorte que les lignes cherchées ſoient parallelés aux données. Il faut encore que le produit de CB multipliée par CF ſoit au quarré de CD, comme 1 à 4.

2, Suppoſons la choſe faite, & nommons les données $AE = AG = GE$, 1; les inconnuës AB, x; CB, y: Puiſque BF eſt parallele à AG, le triangle EBF eſt équilateral comme le triangle EAG. Ainſi FB eſt égal $EB = 1 + x$; & $CF = 1 + x - y$; CD égal à AB, x.

3. Le Problème demande $CB \times CF : \overline{CD}^2 :: 1 : 4$. $y + xy - yy : xx :: 1 : 4$. $4y + 4xy - 4yy = xx$; $yy - y - xy = -\frac{1}{4}xx$. Mettez de chaque côté $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}xx$; vous ferez $yy - y - xy + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$; dont les deux racines ſont $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x}$, ou $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm + \omega x}$, en prenant $z = 1$; $m = n = \omega = \frac{1}{2}$.

4. Parcequ'il y a $+m$, prenons $BK = m$, du côté où eſt le point C;

par le point *K* menons *IK* parallele & égale à *AB*, x; parcequ'il y a $+\frac{n}{z}x$; faiſons $z = 1 : n = \frac{1}{2} :: IK, x : KL, \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$; & je mets le point *L* entre les points *K* & *C*. L'on prouvera de la même façon que tous les *IK* priſes du côté de *B* ſont $+x$; tous les *KL* priſes du même côté ſont $\frac{n}{z}x$. Il ne ſera pas difficile de prouver que les *Ik* priſes du côté de *N* ſont $-x = Ab$; & les *kl* ſont $-\frac{n}{z}x$. L'infinie *IL* ayant été tirée par les points *I*, *L*. Enſuite étant $AI = m = \frac{1}{2}$, le point *I* eſt au milieu de $AG = 1$. De plus l'angle *IKL* eſt de 60. degrez. C'eſt pourquoi dans le triangle *IKL*, les deux autres angles *KLI*, *KIL* ſont enſemble 120. degrez. D'ailleurs comme le côté *IK*, x eſt double du côté *KL*, $\frac{1}{2}x$. Il faut que les angles *KLI*, *KIL* ſoient tels, que le ſinus de l'angle *KLI* oppoſé au côté *KI*. ſoit double du ſinus de l'angle *KIL* oppoſé au côté *KL*. Or tout cela ne convient qu'à l'angle de 90. degrez, dont le ſinus eſt 100000, & à l'angle de 30. degrez, dont le ſinus eſt 50000. Ainſi l'angle *ILK* eſt droit; donc $\overline{IL}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{KL}^2$, $xx - \frac{1}{4}xx = \frac{3}{4}xx$; & $IL = \sqrt{\frac{3}{4}xx} = x\sqrt{\frac{3}{4}}$. Appellons $\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{a}{z}$; l'on aura $IL = \frac{a}{z}x$; cette valeur convient à toutes les *IL* priſes en allant de *I* vers *L*; comme au contraire les *Il* priſes en allant de *I* vers *N* ſont $-\frac{a}{z}x$, parceque les x ſont negatives de ce côté-là. Fig. 82.

Sur *IL* prenons $IN = \frac{amm}{\omega z}$ Regle 3. faiſons tomber le point *I* entre le ſommet *N* & le point *L*, parcequ'il y a $+mm + \omega x$, Regle 4. le parametre ſera $\frac{\omega z}{a}$, Regle 1. *N* le ſommet; le diametre eſt dans *IL*, Regle 2. les angles *CLN* des coordonnées eſt droit. Nous pourrons par conſequent décrire la parabole *CNc*, qui ſera le lieu cherché.

En effet *NL* eſt $\frac{amm}{\omega z} + \frac{a}{z}x$, ſi on multiplie cette quantité par le parametre $\frac{\omega z}{a}$, le produit ſera $mm + \omega x$, donc $CL = \sqrt{mm + \omega x}$, valeurs de tous les *cl*. 1° Au point *C*, on a fait le calcul de n. 3. 2° Au point *c* pris ſur l'arc infini *uz*, nous trouvons *cB*, $y = m + \frac{n}{z}x - \sqrt{mm + \omega x}$ racine fauſſe, avec l'équation de n. 3. 3° Au point *c* pris ſur l'arc *NV*, on a *cb*, $y = m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x}$ racine vraye, & la même équation. 4° Au point *c* pris ſur l'arc *Nu*, y eſt $= m + \frac{n}{z}x - \sqrt{mm + \omega x}$ racine fauſſe de n. 3. l'on trouvera auſſi la même équation. Nous pouvons donc conclurre, que la parabole *CNc* eſt le lieu cherché.

5. Il faut remarquer que y n'a que des valeurs poſitives; qu'au point *A*, $x = 0$; que la racine poſitive ſe trouve ſur la moitié *NZ*, la negative ſur la moitié *Nz*, & la même équation $yy - y - xy = -\frac{1}{4}xx$ dans tous les points de la parabole; ainſi en conſtruiſant la racine poſitive, l'on a auſſi conſtruit la negative. Le Problème n'eſt poſſible que dans l'angle *AEF*, dans lequel on l'a cherché.

6. Par l'évanoüiſſement des ſeconds termes, ſi l'on prend $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = v$; on trouvera $v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x} = \sqrt{mm + \omega x}$.

Je prens $BK = \frac{1}{2} = m$; je tire par le point *K* l'infinie *KI* parallele à

Fig. 82. AB, & $IK = AB, x$; je coupe encore $KL = \frac{1}{2} IK = \frac{1}{2} x$; & par les points L, I je tire l'infinie LI. La ligne CL eſt $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x = v$; & parceque v eſt l'appliquée dans l'équation $vv = mm + \omega x$, & qu'elle eſt terminée à la ligne IL, il eſt certain Regle 8. que le diametre de la parabole eſt dans IL. Enſuite je conſidere, que tous les points de la parabole, qu'il faut décrire, doivent me donner l'équation $vv = mm + \omega x$; & que $mm + \omega x$ eſt le produit de l'abſciſſe par le parametre égal au quarré vv de l'appliquée; & que s'il m'étoit libre, comme il l'eſt ordinairement dans les lieux geometriques, de nommer x la ligne IL, je n'aurois qu'à prendre ω pour le parametre, & faire $IN = \frac{mm}{\omega}$; car $\omega \times IN + IL \frac{mm}{\omega} + x$, donneroit $mm + \omega x$. Mais étant $IK = AB, x$; IL ne peut plus être appellée x; je cherche donc la valeur $\frac{a}{z} x = IL$, comme n. 4. Enſuite parceque le parametre multipliant $\frac{a}{z} x$ doit produire ωx je nomme le parametre p; & j'ai $\frac{pax}{z} = \omega x$, $\frac{pa}{z} = \omega$, $p = \frac{\omega z}{a}$, & le parametre de la parabole, qu'il faut décrire, eſt déterminé.

Après cela pour avoir la valeur de IN, quantité toute connuë qu'il faut ajoûter à IL, parcequ'il y a $\omega x + mm$, je fais encore reflexion que IN multipliée par le parametre $\frac{\omega z}{a}$ doit produire mm; je nomme donc IN, r; & j'ai $\frac{r\omega z}{a} = mm$, $r = \frac{amm}{\omega z} = IN$.

Enfin puiſque IN doit être ajoûtée à IL, il faut faire tomber le point I entre le ſommet N & le point L. Ainſi vous voyez comment M. DESCARTES a trouvé ce qu'il dit, Regle 1. 2. 3. 4. Il eſt aiſé de voir comment la parabole ZNz eſt le lieu cherché.

EXEMPLE VIII. $y = m - \frac{n}{z} x \pm \sqrt{mm - \omega x}$.

Fig. 83. 1. FIg. 83. qui eſt la même que Fig. 38. de M. DESCARTES, ſoient données les mêmes lignes que Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. Il faut que $CB \times CF + 6\,AB$ ſoient égaux à $CD \times CH + \frac{1}{4} \overline{AB}^2$.

2. Encore comme Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. Prenez la valeur des lignes cherchées, ôtez-en les lettres b, f, z, dont la valeur eſt 1, ainſi qu'on le verra Art. 6. Ex. 13. n. 2. 3. Vous aurez $CD, cy + cx$; $CF, ey + dek + dex$; $CH, gy + gl - gx$.

3. L'équation ſera $eyy - egyy + deky - egly + dexy = egl x - 6x - cgxx + \frac{1}{4} xx$; où mettant encore la valeur des lettres connuës à leur place, Voyez Art. 6. Ex. 13. n. 2. 3. vous formerez une équation, dont les deux racines ſont $y = 1 - \frac{1}{2} x \pm \sqrt{1 - 2x}$, ou $y = m - \frac{n}{z} x \pm \sqrt{mm - \omega x}$, en faiſant $m = z = 1$; $n = \frac{1}{2}$; $\omega = 2$.

4. Sur CB je prends $BK = m$ au deſſous de AB; par le point K je mene KI égale & parallele à AB; je fais $z : n :: 1 : \frac{1}{2} :: IK, x : KL$, $\frac{1}{2} x$; je fais tomber le point L entre B & K ſuivant l'Art. 2. parcequ'il y a $- \frac{n}{z} x$, & par les points L, I, je tire l'infinie IL; tous les KL pris depuis I juſqu'à N, ſont auſſi $\frac{n}{z} x$; mais tous les lk pris de l'autre côté de I

ſont $-\frac{n}{z}x$, parceque les $Ik = Ab$ pris de ce côté ſont $-x$. Je prouverai comme Ex. 7. n. 4. que les IL pris depuis I juſqu'à N ſont $+\frac{n}{z}x$, & pris de l'autre côté de I ſont $\frac{-n}{z}x$. Aprés cela ſur IL je coupe $IN = \frac{nmm}{\omega z}$ Regle 3. & je fais tomber le point L entre les points N, I parcequ'il y a $mm - \omega x$, Regle 5. Le parametre ſera $\frac{\omega z}{n}$ Regle 1. N, le ſommet; le diametre eſt dans IL, Regle 2. l'angle CLN des abſciſſes & des appliquées eſt droit. Je puis donc décrire la parabole CNc, laquelle ſera le lieu cherché.

Tous les CL, cl ſeront $\sqrt{mm - \omega x}$. Au point C où l'on a fait le calcul de n. 3. on a la racine poſitive. On l'aura encore au point c pris ſur l'arc VZ, & l'on y trouveroit encore l'équation de n. 3. ſi de ce point l'on tiroit des lignes paralleles aux lignes CD, CF, CH, parcequ'on auroit des triangles ſemblables à ceux, qui ont déja été calculez pour avoir les valeurs de CD, CF, CH. Ce qui arrivera auſſi au point C pris au deſſus de la ligne AB, mais ce point donne la racine negative auſſi bien que le point c pris ſur l'arc AN.

La parabole CNc paſſe par le point A, car alors l'appliquée eſt $AI = BK, m$, & l'abſciſſe eſt IN, $\frac{nmm}{\omega z}$: & le parametre $\frac{\omega z}{n} \times IN$, $\frac{nmm}{\omega z} = mm = \overline{AI}^2$. De tout ce que nous venons de dire il ſuit que la parabole CNc eſt le lieu cherché.

EXEMPLE IX. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-ff + \omega x}$.

1. FIg. 84. qui eſt la même que Fig. 38. de M. DESCARTES, ſoient données les mêmes lignes que Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. Il faut que $\overline{CB \times CF} + AE$ ſoient égaux à $\overline{CD \times CH} + \frac{3}{4}\overline{AB}^2$. FIG. 84.

2. Comme n. 2. de l'Exemple 8. De plus $AE = 3$.

3. L'équation ſera $eyy - cgyy + dey - cgly + dexy = -3 + cglx - cgxx + \frac{3}{4}xx$, où mettant la valeur des lettres connuës à leur place, on aura une équation dont les racines ſont $y = 1 - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-2 + 4x}$, ou $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-ff + \omega x}$, en faiſant $m = 1 = z$; $n = \frac{1}{2}$; $f = \sqrt{2}$; $\omega = 4$. Nous ne pouvons pas écrire mm ſous le ſigne radical, parceque 2 n'eſt pas le quarré de $1 = m$.

4. Comme Ex. 8. n. 4. l'on conſtruira $+m - \frac{n}{z}x$, & l'on trouvera que les IL ſont $\frac{n}{z}x$, le parametre $\frac{\omega z}{n}$; mais IN ſera $\frac{4ff}{\omega z}$, & l'on fera tomber le ſommet N entre les points I & L, parcequ'il y a $-ff + \omega x$ Regle 6. l'angle CLN eſt celui des coordonnées. Nous pouvons donc décrire la parabole, CNc, qui eſt le lieu cherché dans ſon arc NC.

Tous les CL, cl ſeront $\sqrt{-ff + \omega x}$; mais au point c pris ſur l'arc Nz, on ne trouvera pas l'équation de n. 3. parceque cB eſt là $-y$; & que cd, cf, ch, ſi on les tiroit, auroient les mêmes valeurs qu'au point C, où y eſt poſitive.

Digitized by Google

Si l'on demandoit $CB \times CF + AE + 6AB = CD \times CH + \frac{1}{4}\overline{AB}^2$, le Problême ſeroit abſolument impoſſible.

ARTICLE VI.

Conſtruction particuliere au cercle & à l'ellipſe.

M. DESCARTES.

QUe ſi la ligne demandée eſt un cercle, ou une ellipſe, ou une hyperbole, il faut premierement chercher le point *M*, Fig. 69. qui en eſt le centre, & qui eſt toûjours en la ligne droite *IL*, où on le trouve en prenant $\frac{aam}{2pz}$ pour *IM*. En ſorte que ſi la quantité ω eſt nulle, ce centre eſt juſtement au point *I*. Et ſi la ligne cherchée eſt un cercle, ou une ellipſe, on doit prendre le point *M* du même côté que le point *L*, au reſpect du point *I*, lorſqu'on a $+\omega x$; & lorſqu'on a $-\omega x$, on le doit prendre de l'autre. Mais tout au contraire en l'hyperbole, ſi on a $-\omega x$, ce centre *M*, doit être vers *L*; & ſi on a $+\omega x$, il doit être de l'autre côté. Après cela le côté droit de la figure doit être $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{\pm mpzz}{aa}}$, lorſqu'on a $+mm$, & que la ligne cherchée eſt un cercle, ou une ellipſe, ou bien lorſqu'on a $-mm$, & que c'eſt une hyperbole. Et il doit être $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{\pm mpzz}{aa}}$, ſi la ligne cherchée étant un cercle ou une ellipſe, on a $-mm$; ou bien ſi étant une hyperbole, & la quantité $\omega\omega$ étant plus grande que $4mp$, on a $+mm$. Que ſi la quantité mm eſt nulle, ce côté droit eſt $\frac{\omega z}{a}$; & ſi ωx eſt nulle, il eſt $\sqrt{\frac{\pm mpzz}{aa}}$. Puis pour le côté traverſant, il faut trouver une ligne, qui ſoit à ce côté droit, comme aam eſt à pzz. A ſavoir ſi ce côté droit eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{\pm mpzz}{aa}}$, le traverſant eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzzxx} + \frac{\pm aam^3}{pzz}}$. Et en tout ces cas le diametre de la Section eſt en la ligne *IM*, & *LC* eſt l'une de celles, qui lui ſont appliquées par ordre; ſi bien que faiſant *MN* égale à la moitié du traverſant, & le prenant du même côté du point *M*, qu'eſt le point *L*, on a le point *N* pour le ſommet de ce diametre. Enſuite dequoi il eſt aiſé de trouver la Section par le ſecond & troiſiéme Problême du premier Livre d'Apollonius.

1. Les

1. Les mêmes Regles ſervent au cercle & à l'ellipſe, parceque le cercle n'eſt autre choſe, qu'une ſorte d'ellipſe, dont tous les diametres ſont égaux entr'eux, & à leurs parametres. De là vient, que les équations à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = aa - xx$, $\frac{d}{p}yy = 2ax - xx$, deviennent des équations au cercle $yy = aa - xx$, $yy = 2ax - xx$, dès que le diametre d eſt égal au parametre p, & que l'angle que les coordonnées ſont avec leurs abſciſſes eſt droit. Car l'on ſçait que dans chaque ellipſe, il y a deux diametres conjuguez, qui ſont égaux entr'eux & avec leurs parametres, & dont l'équation par conſequent eſt exprimée comme celle du cercle : mais les ordonnées de ces diametres ſont avec leurs abſciſſes des angles obliques. FIG. 69.

2. M. DESCARTES mêle les Regles, qui regardent l'ellipſe, avec celles qui regardent l'hyperbole, parceque, quoique ces deux Sections ſoient differentes en ce que l'ellipſe eſt fermée & terminée, tandis que l'hyperbole eſt ouverte & infiniment étenduë : cependant elles ont beaucoup de rapport, en ce qu'elles ont toutes deux un centre, où tous leurs diametres ſe coupent en deux parties égales, le centre de l'ellipſe étant au dedans de cette courbe, & celui de l'hyperbole au dehors ; & en ce que leurs équations ne different que par les ſignes + & —; car les équations à l'hyperbole ſont $\frac{d}{p}yy = xx - aa$, $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$.

Nous laiſſerons pour l'article ſuivant les Regles, qui appartiennent à l'hyperbole ; & nous ne mettrons ici que celles, qui ſont pour l'ellipſe & pour le cercle.

3. Le côté droit d'une courbe eſt la même choſe que ſon parametre, & le côté traverſant eſt le diametre determiné de cette courbe. Dans le cercle & dans l'ellipſe tout diametre eſt déterminé ; dans l'hyperbole il y a des diametres déterminez, leſquels, lorſqu'ils ſont prolongez, s'appellent indéterminez, la parabole n'a que des diametres indéterminez. Les traitez des Sections coniques nous l'apprennent.

On appelle Figure d'une courbe le rectangle fait ſous un diametre déterminé & ſous le parametre de ce diametre.

M. DESCARTES a fait une attention particuliere au cas de l'hyperbole, où l'on a $+ mm$, & où $\omega\omega$ eſt plus grand que $4mp$. Mais il n'a rien dit du cas ſemblable de l'ellipſe, où l'on a $- mm$, & où $\omega\omega$ n'eſt pas plus grand que $4mp$. Je parlerai de ce cas dans une des Regles qui ſuivent. Et c'eſt apparemment parceque ce cas eſt impoſſible, & que par conſequent il ne demande ni côté droit, ni côté traverſant, que cette Geometrie n'en parle pas.

4. Le Problême ſecond du Livre premier d'Apollonius eſt la Propoſition 53. de ce Livre, où il donne la maniere de décrire une hyperbole. Le Problême troiſiéme du Livre ſecond d'Apollonius eſt la Propoſition 54. de ce Livre, où il donne la Methode pour décrire une ellipſe, étant donnez le diametre avec ſon ſommet, le parametre, & l'angle que les coupées & les

ordonnées ſont enſemble. L'on a donné Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2. la maniere de décrire une ellipſe en cherchant ſes differens points ſur un plan ; & Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. la maniere de décrire une hyperbole en cherchant auſſi ſes points differens. D'où l'on peut conclurre, que les Problêmes qui ſe conſtruiſent avec une ellipſe, ou une hyperbole, ſont plans, patcequ'on ne ſe ſert dans leurs deſcriptions que de la Regle & du Compas. Pour le cercle, qui ſe décrit avec le Compas, il eſt certain par cette raiſon, que les Problêmes ſont plans, lorſqu'il ſert ſeul à les conſtruire.

REGLE I.

Fig. 69. L'On commence par chercher le centre *M*, qui eſt ſur la ligne *IL*, & on le trouvera en prenant $\frac{a\omega}{2} \pm \frac{m}{pz}$ pour *IM*. Cette Regle ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$, & ωx dans l'équation. Voyez Exemple 8. 10. 11. 12. 13. 14.

Car les choſes ne ſont pas telles, Ex. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

REGLE II.

LOrſque la quantité ω eſt nulle, le point *M* eſt le même, que le point *I*. Cela ſuppoſe m dans l'équation, Voyez Ex. 4. 9.

Car cela n'eſt pas entierement ainſi, Ex. 2. 5.

REGLE III.

LOrſqu'il y a $+\omega x$, l'on prend le point *M* du même côté que le point *L*, par rapport au point *I*, c'eſt-à-dire, que le point *M* eſt ſur la partie de la ligne *IL* prolongée, ſur laquelle le point *L* ſe trouve. Cela ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$. Voyez Ex. 8. 10. 13. 14.

Car ce n'eſt pas tout-à-fait la même choſe, Ex. 3. 6.

REGLE IV.

LOrſqu'il y a $-\omega x$, l'on prend le point *M* de l'autre côté que le point *L*, par rapport au point *I*, c'eſt-à-dire, que le point *M* eſt ſur la partie de la ligne *IL* prolongée, ſur laquelle le point *L* ne ſe trouve pas. Cela ſuppoſe $\frac{n}{z}x$. Voyez Ex. 11. 12.

Car cela peut n'être pas entierement le même, Exemp. 7. n. 5.

REGLE V.

LOrſqu'il y a $+mm$, le côté droit, ou parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Ce qui ſuppoſe encore ωx & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 11. 12. 13.

Car le parametre eſt tout autre, Ex. 2. 4. 6. 7. n. 5.

Fig. 69.

REGLE VI.

LOrſqu'il y a — mm, & que $\omega\omega$ eſt plus grande que $4mp$, le côté droit ou parametre eſt $\sqrt{\frac{aazz}{bb} - \frac{4mpzz}{bb}}$. Cela ſuppoſe encore ωx & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 10. 14.

Car le parametre eſt different, Exemple 7.

REGLE VII.

LOrſque la quantité mm eſt nulle, le parametre eſt $\frac{az}{b}$. Cette Regle ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ & ωx dans l'équation. Voyez Ex. 5. 8.

Car le parametre n'eſt pas tel, Ex. 3.

REGLE VIII.

LOorſque la quantité ωx eſt nulle, le parametre eſt $\sqrt{\frac{4mpzz}{bb}}$. Cela ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 9.

Car le parametre eſt different, Ex. 2. 4.

REGLE IX.

DAns tous ces cas le diametre eſt dans la ligne IM, & la ligne LC eſt une de ſes ordonnées. Ce qui ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation, Voyez Ex. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Car cela eſt autrement, Ex. 2. 3. 4. 5. 6.

REGLE X.

APrès que le parametre, ou côté droit a été déterminé, pour avoir ſon côté traverſant ou ſon diametre; l'on fait, comme pzz à aam: ainſi le parametre a un quatriéme terme, qui eſt le diametre cherché. Cette Analogie ſuppoſe, que le parametre eſt $\sqrt{\frac{aazz}{bb} \pm \frac{4mpzz}{bb}}$, ou $\frac{az}{b}$, ou $\sqrt{\frac{4mpzz}{bb}}$ Voyez Ex. 5. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Car lorſque le parametre eſt different, la raiſon du parametre au diametre eſt auſſi differente. Voyez Ex. 2. 3. 4. 6. 7.

REGLE XI.

LA ligne MN eſt toûjours égale à la moitié du diametre, & l'on prend le point N ſur IM du même côté du point M, qu'eſt le point L, c'eſt-à-dire, que l'on prend le point N ſur la partie de la ligne IM prolongée, ſur laquelle le point L ſe trouve déja. Tout ceci ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ dans l'équation. Voyez Ex. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Car la choſe eſt un peu differente, Ex. 2. 3. 4. 5. 6. 8.

REGLE XII.

LOrſqu'il y a dans l'équation $-mm+\omega x$, il faut que $\omega\omega$ ſoit plus grand que $4mp$; autrement le Problême eſt impoſſible. Voyez Exemple 7. 10. 14.

Cette Regle eſt le cas, dont nous avons dit que M. DESCARTES n'avoit pas parlé.

REGLE XIII.

Fig. 87. J'Ajoûte ici comme une Regle, 1° Fig. 87. ſoit $AN=2a$ le diametre M le centre, $AM=MN=a$ le demi-diametre, $CB=y$ une appliquée, $AB=x$ un ſegment du diametre, $NB=AN-AB=2a-x$ l'autre ſegment du diametre. Tous les lieux au cercle ou à l'ellipſe ſont fondez ſur cette proprieté ; comme le diametre eſt au parametre ; ce qui s'exprime ainſi, comme d eſt à p : de même le rectangle $AB\times BN=2ax-xx$ ſous les ſegmens du diametre, eſt à yy quarré de l'appliquée correſpondante CB. D'où l'on forme l'équation $\frac{d}{p}yy=2ax-xx$. Que ſi l'on avoit pris le centre M pour l'origine des x, & que MB fût x ; le ſegment AB ſeroit $AM-MB$, $a-x$; le ſegment BN ſeroit $MN+MB$, $a+x$; le rectangle $AB\times BN$ des ſegmens ſeroit $aa-xx$, & l'équation auroit été $\frac{d}{p}yy=aa-xx$.

2° Dans ces deux équations, & dans celles qui ſont reduites à ces formules ; yy, ou vv quarré de l'inconnuë, en laquelle y a été changée, eſt toûjours le quarré de l'appliquée au diametre dont il faut ſe ſervir. Les connuës quelconques $\frac{d}{p}$ qui multiplient yy quarré de l'inconnuë qui eſt l'appliquée, expriment toûjours le rapport du diametre au parametre. Dans le cercle, où les diametres ſont égaux aux parametres, le numerateur d de la fraction eſt égal au denominateur p. L'inconnuë x ſe prend ſur le diametre : dans l'équation $\frac{d}{p}yy=2ax-xx$. l'inconnuë x commence au ſommet A, & la connuë $2a$ eſt la valeur du diametre : mais dans l'équation $\frac{d}{p}yy=aa-xx$, l'inconnuë x commence au centre M, & la connuë aa eſt le quarré exprimé affirmativement du demi-diametre $AM=a$.

3° De ſorte que, comme le diametre, dont il faut ſe ſervir pour conſtruire une équation, doit toûjours être la ligne droite, à laquelle ſe terminent ou y, ou l'inconnuë, en laquelle y a été changée : il ſuit, que ſi l'autre inconnuë quelconque x n'étoit pas ſur ce diametre, il faudroit lui ſubſtituer une ligne, pour le diametre, & faire enſuite dans l'équation les changemens dont il eſt parlé, Reg. 10. Sect. 4. Liv. 1. & tels qu'on les verra, Ex. 3. n. 6. Ex. 5. n. 6. Ex. 6. n. 6. Ex. 9. n. 6. Ex. 10. n. 8. Ex. 13. n. 6. qui eſt l'Exemple de M. DESCARTES. L'on connoîtra dans ces Exemples, comment cet Auteur a trouvé les Regles qu'il nous a données.

4° Lorſque l'équation ſe reduit à $\frac{d}{p}yy=-aa-xx$, où le quarré aa

du demi-diametre eſt exprimé negativement ; les racines ſont imaginaires, $y = \pm\sqrt{\frac{-aap - pxx}{a}}$, & le Problême eſt impoſſible.

EXEMPLE I. $y = \sqrt{-mm - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIgure 85. ſoient AB, AD, EF, GH, quatre lignes droites données de poſition, & qui ſont autour du point A huit angles de 45. degrez chacun ; & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme CB, CD, CF, CH, en ſorte que les angles CBA, CDA ſoient droits ; les angles CFE, CHA de 45. degrez ; & que ce qui eſt produit de la multiplication de CB par CD ſoit égal à ce qui eſt produit de la multiplication de CF par CH. Fig. 85.

2. Je nomme les inconnuës $AB, x = CD$; CB, y ; $HB = BF = AB, x$; ainſi $CF = y - x$; $CH = y + x$. Et comme il n'y a point de ligne déterminée, je prends la ligne z pour l'unité $= m$.

3. Puiſque l'on demande $CB \times CD = CF \times CH$; l'équation ſera $yy - xy = xx$; dont les racines ſont $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx}$, qui eſt à la ligne droite.

4. Si l'on demandoit, que $CD \times CF$ fût égal à $CB \times CH$; l'équation ſeroit $xy - xx = yy + xy$; $y = \sqrt{-xx}$, impoſſible : parceque $\sqrt{-\frac{p}{m}xx}$ eſt une racine imaginaire.

5. Si l'on demandoit que $CD \times CF$ — le quarré de la ligne m fût égal à $CB \times CH$; l'équation ſeroit $yy = -mm - xx$, $y = \sqrt{-mm - \frac{p}{m}xx}$ impoſſible.

EXEMPLE II. $y = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIgure 86. ſoient données de poſition les trois lignes droites AB, AD, FE ; dont AB & FE ſont paralleles, & AD leur eſt perpendiculaire. Il faut trouver un point C, duquel ayant tiré trois perpendiculaires CB, CD, CF ſur les données, l'on ait $\overline{CB \times CF} - \overline{CB \times EA} = \overline{CD^2} - \overline{AE^2}$. Fig. 86.

2. Nommons la diſtance donnée des paralleles AE, $m = p = FB$; les inconnuës $AB, x = CD$; CB, y ; $CF = m - y$.

3. L'équation ſera $my - yy - my = xx - mm$, $yy = mm - xx$; dont les racines ſont, $y = \pm\sqrt{mm - xx}$, ou $y = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Lieu au cercle parceque $m = p$, Art. 4. Regle 2.

4. Pour conſtruire cette équation, parceque la quantité ω eſt nulle, je prends A pour le centre, Regle 2. le diametre eſt dans la ligne AB, Regle 9. parceque la quantité ωx eſt nulle, le parametre eſt $\sqrt{4mp}$, Reg. 8. pour avoir le diametre je fais Reg. 10. $p : m :: \sqrt{4mp} : \frac{m}{p}\sqrt{4mp} = \sqrt{\frac{4m^3}{p}}$, qui eſt le diametre ; pour trouver le ſommet N Regle 11. Je fais AN égale au demi-diametre $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m^3}{p}} = \sqrt{\frac{m^3}{p}} = \sqrt{mm}$ parceque $p = m$; & $AN =$

Fig. 86. $m = AE$. C'eſt pourquoi du point A comme centre, de l'intervale AN, le point N étant pris du même côté, où B ſe trouve Regle 11. je décris le cercle NEn, qui touchera la ligne EF, m en E; les points N, n ſont les ſommets du diametre NA. Ce cercle ſatisfait au Problême dans tous les points du demi-cercle NEn.

Dém. NB eſt $\sqrt{\frac{m^1}{p}} - x$; & $Bn = x + \sqrt{\frac{m^1}{p}}$ valeurs de tous les ſegmens du diametre, le rectangle ſous les mêmes ſegmens $\frac{m^1}{p} - xx = mm - xx = yy$ donc $y = \pm\sqrt{mm - xx} = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. De plus 1° Au point C pris ſur le quart EN le calcul de n. 3. a été fait, & l'on a trouvé l'équation $yy = mm - xx$. 2° Au point c pris ſur l'arc Ne, où y a des valeurs negatives, l'on a l'équation $yy = xx - mm$, $y = \pm\sqrt{-mm + xx}$ à l'hyperbole. 3° Au point c pris ſur le quart En, ou $Ab = -x$, on a l'équation de n. 3. 4° Au point c pris ſur l'arc ne, ou Ab, $-x$; cb, $-y$ l'équation ſera $yy = xx - mm$ à l'hyperbole.

L'on voit que quoique l'on ait dans toute la circonference du cercle une des deux racines $y = \pm\sqrt{-mm\frac{p}{m}xx}$, cependant il n'y a que la moitié NEn de cette circonference, qui donne l'équation $yy = mm - xx$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer que le centre n'eſt pas dans la ligne IL, mais ſur AB, Regle 1. parceque la quantité ω eſt nulle, le centre n'eſt pas different du point A, Regle 2. quoiqu'il n'y ait pas ωx, le parametre n'eſt pas $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, mais $\sqrt{4mp}$, Regle 8. que le diametre n'eſt pas dans IM, & que LC n'eſt pas une ordonnée, Regle 9. que la raiſon du parametre au diametre n'eſt pas comme pzz à aam, mais comme p à m, Regle 10. que le ſommet N a été pris ſur AN du même côté ou B eſt, & AN eſt égal à la moitié du diametre, Regle 11.

6. L'on auroit pû conſtruire plus aiſément l'équation $yy = mm - xx$, en prenant un rayon AN égal à m, & en décrivant le cercle NEn du centre A, car comme l'on a vû dans les lieux Geometriques, ce cercle reſout le Problême, puiſqu'il eſt le même, que celui qu'on a décrit, n.4.

7. Si les racines $y = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$ avoient été un lieu à l'ellipſe parceque m ne ſeroit pas égale à p, Art.4. Regle 2. J'aurois cherché l'équation au point C & ailleurs de cette ſorte. Par la nature de l'ellipſe comme le diametre $2m$ eſt au parametre $2p$, ou comme m eſt à p: de même le rectangle $\frac{m^1}{p} - xx$ ſous les ſegmens NB, Bn du diametre Nn eſt à $mm - \frac{p}{m}xx$ quarré de l'appliquée $CB = yy$; donc $y = \pm\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. L'on connoît que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de m à p, en multipliant par m & diviſant par p l'équation $yy = mm - \frac{p}{m}xx$, car elle devient $\frac{m}{p}yy = \frac{m^1}{p} - xx$; & l'on ſçait que la fraction $\frac{m}{p}$ miſe devant yy marque le rapport du diametre au parametre.

EXEMPLE III. $y = \pm\sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. Fig. 87. les trois lignes droites AB, AD, EF ſont données de poſi- FIG. 87.
tion, & ſont un triangle équilateral. Il faut dans ce triangle trouver un point C, d'où ayant tiré les lignes CB, CD, CF, ſur les données, étant CD parallele à AB, CB & CF à AD; le rectangle $CD \times CF$ ſoit égal au quarré de CB, moins le rectangle $CB \times CD$.

2. Nommez les données $AE = AN = EN$, ω; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y; $FB = NB = NA - AB$, $\omega - x$; & tous les bf ſont de même $\omega - x$; enfin $CF = BF - CB$, $\omega - x - y$.

3. L'équation ſera $\omega x - xx - xy = yy - xy$; ou $yy = \omega x - \frac{p}{m}xx$ en faiſant $p = m$; les racines ſont $y = \pm\sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$ au cercle ou à l'ellipſe.

4. Le centre M eſt ſur la ligne AB, & non pas ſur IL, vous le trouverez en prenant $AM = \frac{\omega m}{2p}$, Regle 1. parcequ'il y a $+\omega x$, vous prendrez Regle 3. le point M ſur la partie de la ligne AB, où le point B ſe trouve; parceque les quantitez mm, $\frac{nx}{2}$ ſont nulles, le parametre eſt ω, Regle 7. le diametre eſt dans la ligne AB, & CB eſt une appliquée, Reg. 9. en faiſant $p : m :: \omega : \frac{\omega m}{p}$, vous aurez le diametre Reg. 10. ce diametre eſt en premier lieu égal à AN, ω, parceque $p = m$; il eſt en ſecond lieu double de $AM = \frac{\omega m}{2p}$ Regl. 10. Ainſi le centre M eſt au milieu de AN, & les deux ſommets ſeront A, N; & Regl. 11. l'on prendra le ſommet A ſur AB, du même côté par rapport au point M, qu'eſt le point B. Parceque l'angle CBA des coordonnées eſt oblique, le lieu eſt à l'ellipſe, Art. 4. Regl. 2. Vous pouvez décrire l'ellipſe ACN, & trouver tous ſes points C, c, en ne faiſant qu'extraire la racine quarrée de $\omega x - \frac{p}{m}xx$, après avoir déterminé la valeur de x. Voyez Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 2. & L. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Cette ellipſe donne dans tous ſes points une des deux racines $y = \pm\sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, & ſur l'arc ZA l'équation $yy = \omega x - \frac{p}{m}xx$.

Par la nature de l'ellipſe, comme le diametre eſt au parametre, ou comme m eſt à p; ainſi le rectangle ſous les ſegmens du diametre, $AB \times BN$, $\frac{\omega mx}{p} - xx$ eſt au quarré de l'appliquée correſpondante $\omega x - \frac{p}{m}xx = \overline{CB}^2$, yy; & $CB = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx} = y$. Vous trouverez tous les $bN = AN - Ab$, $\frac{\omega m}{p} - x$, & par conſequent tous les $bc = \pm y = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$; $y = \pm\sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, & l'on aura la racine poſitive ſur la moitié AZN, où ſont les $+y$; & la negative ſur la moitié AzN, où ſont les $-y$. Enſuite 1° Au point C l'on a fait le calcul de n. 3. & l'on y a trouvé l'équation $yy = \omega x - \frac{p}{m}xx$, ce qui convient à l'arc AZ. 2° Au point c pris ſur l'arc

AzN, on a l'équation $yy + 2xy = \omega x - xx$ differente de n. 3. 3° Au point c pris ſur l'arc ZN on a l'équation $yy - 2xy = -\omega x + xx$ à l'hyperbole. On a donc dans tous les points de l'ellipſe AZN une des racines $y = \pm\sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, & l'équation $yy = \omega x - xx$ ſur l'arc ZA.

5. En multipliant par m & diviſant par p, l'équation $yy = \omega x - \frac{p}{m}xx$, vous formez $\frac{m}{p}yy = \frac{\omega m}{p}x - xx$; qui Regle 13. fait connoître par le terme $\frac{m}{p}yy$, que le diametre eſt au parametre en raiſon de m à p; & par le terme $\frac{\omega m}{p}x - xx$, que le diametre AN eſt $\frac{\omega m}{p}$, puiſque par la nature de l'ellipſe ce terme eſt le produit du ſegment AB, x par le ſegment BN $\frac{\omega m}{p} - x = AN - AB$. Enſuite m eſt à p: comme le diametre $\frac{\omega m}{p}$ eſt à ω parametre. Le diametre eſt ſur AB, parceque l'appliquée CB, y eſt terminée à cette ligne AB. Parceque x eſt un côté du rectangle $\frac{\omega m x}{p} - xx$, & AB, x une abſciſſe, le ſommet de l'ellipſe eſt en A, & le centre M ſe trouve en prenant $AM = \frac{\omega m}{2p}$.

EXEMPLE IV. $y = m \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 86. 88. 1. FIg. 88. comme Ex. 2. n. 1. Fig. 86. excepté que l'on demande que le rectangle ſous CB & CF ſoit égal au quarré de CD.

2. Comme Exemple 2. n. 2.

3. L'équation ſera $my - yy = xx$; $yy - my = -xx$; dont les racines ſont $y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}mm - xx}$, ou $y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}mm - \frac{p}{m}xx}$ en faiſant $p = m$; équation au cercle, ou à l'ellipſe.

4. La conſtruction ſera telle. Parcequ'il y a $+\frac{1}{2}m$, l'on coupe $BK = \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}FB$; par le point K l'on mene KI égale & parallele à AB, x; & le point I le milieu de AE, que je prends pour le centre, parceque la quantité ω eſt nulle, Regle 2. & par la même raiſon le parametre eſt $\sqrt{mp}$, Regle 8. & faiſant $p : m :: \sqrt{mp} : \frac{m}{p}\sqrt{mp} = \sqrt{\frac{m^3}{p}} = \sqrt{mm}$, & enfin le diametre eſt $m = AE$, Regle 10. Sa moitié $\frac{1}{2}m$ ſera la longueur de IN, qui doit ſe prendre du côté où eſt K, & déterminer le ſommet N, Regle 11. & ſur la ligne IK, étant CK une appliquée, Regle 9. C'eſt pourquoi l'angle CKN que les appliquées font avec les abſciſſes étant droit, la ligne cherchée eſt un cercle, Art. 4. Regle 2. qui paſſera par A & E, car IN; $\frac{1}{2}m = AI = IE$.

NK eſt $\frac{1}{2}m - x$; Kn eſt $\frac{1}{2}m + x$; & le rectangle $NK \times Kn$, $\frac{1}{4}mm - xx$, donc $CK = \sqrt{\frac{1}{4}mm - xx}$, valeur de tous les ck. Maintenant 1° au point C la racine vraye de n. 3. & l'equation $my - yy = xx$. 2° Au point c pris ſur l'arc NA, l'on a la racine fauſſe. 3. Au point c pris ſur l'arc En, racine poſitive. Au point c pris ſur l'arc nA, racine negative, & dans tous ces points l'on trouve l'équation $my - yy = xx$.

5. Il faut remarquer que le centre n'eſt pas ſur la ligne IL, mais ſur IK,

Regle

Regle 1. parceque la quantité ω eſt nulle, le centre eſt au point I Reg. 2. quoiqu'il y ait $+ mm$, le parametre eſt $\sqrt{mp}$, parceque la quantité ωx eſt nulle, Regle 5. 8. le diametre n'eſt pas dans IM, mais dans IK, CL n'eſt pas une appliquée, mais CK Regle 9. la proportion du parametre au diametre eſt comme p à m, Regle 10.

EXEMPLE V. $y = -\frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 89. ſoient données de poſition les trois lignes AB, AD, AF; FIG 89. dont AB, AD ſe coupent à angles droits, & AF fait avec chacune au point A un angle de 45. degrez: & qu'il faille trouver pluſieurs points tels que C, duquel tirant les lignes CB, CD, CF, ſur les données, les angles CBA, CDA ſoient droits, & l'angle CFA de 45. degrez; & que ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CD ſoit égal au quarré de CF, moins le rectangle ſous AB & une ligne donnée de grandeur $\omega = 1$.

2. Nommons les inconnuës $AB, x, = CD$; CB, y; De plus $BA = BF, x$; $CF = y + x$.

3. L'équation ſera $yy + xy = \omega x - xx$; dont les racines quarrées ſont $y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{3}{4}xx}$, ou $y = -\frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, en faiſant $z = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 4$, $p = 3$. équation à l'ellipſe.

4. Pour conſtruire cette équation, faiſons $z : n :: AB, x : BL$, $\frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$; & parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$, nous ferons tomber le point B entre C & L, Art. 2. Il eſt évident que tous les bl ſont auſſi $\frac{n}{z}x$. Le triangle ABL eſt rectangle en B: donc $\overline{AL}^2 = \frac{5}{4}xx$; & $AL = x\sqrt{\frac{5}{4}}$. Nommons $\sqrt{\frac{5}{4}}, a$, AL ſera $\frac{a}{z}x$, l'on connoît auſſi que tous les Al ſont $\frac{a}{z}x$. Pour avoir le centre M, prenons $AM = \frac{a\omega m}{2pz}$ Regle 1. le point M étant mis du côté, où L eſt, parcequ'il y a $+ \omega x$ Regle 3. parceque la quantité mm eſt nulle, le parametre ſera $\frac{\omega z}{a}$ Regle 7. & l'on trouvera le diametre en faiſant $pzz : aam :: \frac{\omega z}{a} : \frac{am\omega}{pz}$, ce quatriéme terme eſt le diametre Regle 10. dont la moitié $\frac{am\omega}{2pz} = MN$ Reg. 11. mais $\frac{am\omega}{2pz}$ eſt auſſi AM; donc $MN = AM$, & comme l'on doit mettre le point N du côté où eſt L, il tombera en A. Le diametre eſt dans la ligne AL, & CL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. comme $pzz = 3$ n'eſt pas égal à $aam = 5$, la courbe cherchée eſt une ellipſe, que l'on peut décrire comme il a été dit, Ex. 3. n. 4. puiſque l'on connoît le parametre $\frac{\omega z}{a} = \sqrt{\frac{4}{5}}$; le demi-diametre $NM = AM = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Cette ellipſe eſt le lieu cherché.

5. Dém. $AL\ \frac{ax}{z}$, nL, $\frac{a\omega m}{pz} - \frac{ax}{z}$ donc par la nature de l'ellipſe $CL = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$ valeur de tous les cl. Maintenant 1. au point quelconque C pris ſur l'arc AZ nous avons la racine vraye & l'équation de n 3. 2° Au point c pris ſur l'arc Az, ou y a ſes valeurs negatives, nous avons la racine fauſſe; mais nous avons là l'équation $yy + 3xy = \omega x - xx$, à une ellip-

ſe differente de celle que l'on vient de décrire. 3° Au point e pris ſur l'arc Zn, nous avons encore des valeurs negatives de y; & la racine vraye de n. 3. mais nous avons là l'équation $yy + 3xy = \omega x - xx$. 4° Sur l'arc $nz\omega$ n a la racine fauſſe & l'équation $yy + 3xy = \omega x - xx$. 5° Au point z, où y eſt nulle, l'équation $y = -\frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, ſe change en $\frac{n}{z}x = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$: donc $Zl = zl$ eſt une appliquée, & l'ellipſe paſſe par les points Z, z de la ligne Zlz parallele aux appliquées.

Dans le calcul de n. 3. la lettre L auroit pû être en V, & alors il n'auroit pas fallu prendre MN du méme côté, qu'auroit été le point L. Le Problème eſt non ſeulement impoſſible dans les angles DAX, dAX, par leſquels l'ellipſe ne paſſe pas; mais encore dans l'angle dAZ, il n'eſt poſſible que dans DAZ.

6. Nous ferons évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy + xy = \omega x - xx$, en prenant $y + \frac{1}{2}x = v$, $v - \frac{1}{2}x = y$; & en ſubſtituant la valeur de y à ſa place, la reduite ſera $vv = \omega x - \frac{1}{4}xx$; $vv = \omega x - \frac{p}{m}xx$. Puiſque Regle 13. l'appliquée eſt $v = y + \frac{1}{2}x = CL$, le diametre eſt dans la ligne AL, à laquelle $CL = v$ ſe termine. L'abſciſſe n'eſt donc pas AB, x; mais $AL = \frac{a}{z}x$, n. 4. c'eſt pourquoi dans l'équation $vv = \omega x - \frac{p}{m}xx$, pour x qui en eſt l'abſciſſe, il faut ſubſtituer $\frac{az}{z}$, & afin que l'égalité ſubſiſte, il faut que à la place de l'analogie $x : v :: v : \omega - \frac{p}{m}x$, qui donne $vv = \omega x - \frac{p}{m}xx$, on faſſe celle-ci $\frac{az}{z} : \frac{av}{z} :: \frac{av}{z} : \frac{aa}{z} - \frac{apx}{mzz}$; $\frac{aavv}{zz} = \frac{aa\omega x}{zz} - \frac{aapxx}{mzz}$, & diviſant par p, & multipliant par m, $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aam\omega x}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Cette équation fait connoître dans la fraction $\frac{aam}{pzz}$ qui multiplie vv, que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de aam à pzz: elle fait auſſi connoître dans le terme $\frac{aam\omega x}{pzz}$, que le diametre eſt $\frac{a\omega m}{pz}$, parceque dans l'équation à l'ellipſe, $\frac{aam\omega x}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ eſt $LN \times Ln$: ainſi diviſant par la connuë $LN = AL$, $\frac{ax}{z}$, le quotient $\frac{am\omega}{pz} - \frac{ax}{x}$ ſera Ln, laquelle étant $Nn - NL$, il ſuit que $Nn = \frac{am\omega}{pz}$ le diametre & $AM = \frac{am\omega}{2pz}$. Enfin faiſant $aam : pzz :: \frac{a\omega m}{pz} : \frac{\omega z}{a}$, ce quatriéme terme eſt le parametre. On auroit encore pû faire évanoüir le ſecond terme ωx, comme on le fera, Ex. 6. 9. 10. 13.

EXEMPLE VI. $y = -m \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 90. 1. SOient Fig. 90. données de poſition les quatre droites AB, AD, EF, GH, qui font un parallelogramme par leur interſection. L'on cherche un point C, d'où ayant tiré les quatre droites CB, CD, CH, CF paralleles aux données, tel que $CB \times CF = CD \times CH$.

2. Nommez les connuës AE, $2m = BF$; EG, $\omega = AR = HD$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y; CH, $\omega - x$; $CF = y + 2m$.

3. L'équation ſera $yy + 2my = \omega x - xx$; dont les racines ſont $y = -m \pm \sqrt{mm + \omega x - xx}$; ou $y = -m \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, en poſant $p = m$. Equation au cercle ou à l'ellipſe.

4. Parcequ'il y a $-m$, vous prendrez $BK = m$ au deſſus de AB; & par le point K vous menerez IK égale & parallele à AB; le point I eſt le milieu de AE, $2m$, le centre M eſt ſur la ligne IK; & on le trouve en prenant $IM = \frac{\omega m}{2p}$, Regle 1. parcequ'il y a $+\omega x$, le point M tombe ſur la partie de la ligne IK prolongée, ſur laquelle eſt K, Regle 3. le parametre ſera $\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, & il y a $+mm$, Regle 5. ſi vous faites $p : m : \sqrt{\omega\omega + 4mp} : \sqrt{\frac{\omega\omega mm}{pp} + \frac{4m^3}{p}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre, Regle 10. dont la moitié eſt MN, $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}}$ & ſe prend ſur IM en mettant le point N du côté où le point K ſe trouve, c'eſt-à-dire, en allant de M vers K, & N eſt le ſommet Regle 11. car le diametre eſt ſur IM ou IK & CK une appliquée, Regle 9. l'angle CKN eſt celui des abſciſſes & des ordonnées : s'il eſt droit, c'eſt-à-dire, ſi le parallelogramme eſt rectangle; comme on le ſuppoſe ici, la courbe eſt un cercle : autrement c'eſt une ellipſe. L'on peut décrire le cercle CNc, du centre M, & du rayon MN, il ſatisfait à la queſtion. Fig. 50.

Dém. MK eſt $IM - IK = \frac{\omega m}{2p} - x$; & NK eſt $NM - MK$, $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}} - \frac{\omega m}{2p} + x$; nK, eſt $nM + MK$, $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}} + \frac{\omega m}{2p} - x$, car $nM = NM$; & le rectangle $NK \times Kn$ eſt $\frac{\omega mx}{p} - xx + \frac{m^3}{p}$ valeur de tous les rectangles $Nk \times nk$. Maintenant comme le diametre eſt au parametre, ou $m : p ::$ le rectangle ſous les ſegmens du diametre, $\frac{m^3}{p} + \frac{\omega mx}{p} - xx : mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$, quarré de chaque ordonnée correſpondante CK, ck donc chaque CK, $ck = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Enſuite 1° l'on a au point C la racine vraye. 2° Au point c pris ſur l'arc AN, ou ſur Rn, encore racine vraye. 3° Au point c pris ſur l'arc EG, & au point c pris ſur l'arc EN ou Gn la racine fauſſe. Le cercle CNc donne dans tous ſes points une des racines de y, & l'équation $yy + 2my = \omega x - xx$ de n. 3. Au point A $y = o$ donc AI eſt une appliquée, puiſque $m = \sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}xx}$, on dira le même des points, E, G, R.

Faites évanoüir le ſecond terme de l'équation $yy + 2my = \omega x - \frac{p}{m}xx$; en prenant $v - m = y$, & la ſubſtitution des valeurs de y & de yy produira $vv - mm = \omega x - \frac{p}{m}xx$. Multipliez par m, diviſez par p, vous ferez $xx - \frac{\omega mx}{p} = -\frac{m}{p}vv + \frac{m^3}{p}$. Prenez encore $x = z + \frac{\omega m}{2p}$; la ſubſtitution donnera $\frac{m}{p}vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p} - zz$.

Equation reduite qui montre d'abord Regle 13. dans le ſecond membre que le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p}}$, & le diametre $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{pp} + \frac{4m^3}{p}}$; & dans le premier $\frac{m}{p}vv$, que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de m à p; d'où il ſuit que le parametre eſt $\sqrt{\omega\omega + 4mp}$; que $v = y + m$ eſt l'appliquée CK, & par conſequent IK le diametre. Le ſecond mem-

bre nous apprend encore que z dans ces ſortes de reduites commence au centre M, étant MK, $z = x - \frac{\omega m}{2p}$, ou $\frac{\omega m}{2p} - x$; d'où il ſuit, IK étant x, que IM eſt $\frac{\omega m}{2p}$. L'on voit auſſi que les quarrées vv, zz des inconnuës ſont reduits à l'unité, puiſque $p = m$.

EXEMPLE VII. $y = -m \pm \sqrt{\mp mm \pm \omega x - \frac{p}{m} xx}$.

Fig 90. 1. SI l'on avoit demandé dans l'exemple precedent, que $\overline{CB \times CF}$ fût égal à $\overline{CD \times CH} - 2\overline{AI}^2$, l'équation auroit été $yy + 2my = \omega x - xx - 2mm$; dont les racines ſont $y = -m \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m} xx}$, qui ſera au cercle en ſuppoſant, que le reſte eſt comme Ex. 6.

2. Pour la conſtruction l'on trouvera les mêmes choſes, que Ex. 6. n. 4. excepté que le parametre Regle 6. eſt $\sqrt{\omega\omega - 4mp}$. C'eſt pourquoi l'on a dit Regle 12. qu'il faut que $\omega\omega$ ſoit plus grand que $4mp$, autrement le parametre eſt une racine imaginaire, & le Problème eſt impoſſible, comme il arrive ici, car étant $m = p$, Ex. 6. n. 3. l'on a $\sqrt{\omega\omega - 4mm}$ & comme AE, $2m$ eſt plus grand que EG, ω; il ſuit que $4mm$ eſt plus grand que $\omega\omega$. Que ſi $\omega\omega$ ſe trouvoit égal à $4mp$, le parametre ſeroit zero, & le Problème encore impoſſible.

3. L'on auroit auſſi connu l'impoſſibilité du Problème par l'évanoüiſſement des ſeconds termes, ſoit $v - m = y$; la premiere reduite eſt $vv = -mm + \omega x - \frac{p}{m} xx$; $xx - \frac{\omega m}{p} x = -\frac{m^2}{p} - \frac{m}{p} vv$. Soit $x - \frac{\omega m}{2p} = z$, ou $\frac{\omega m}{2p} - x = z$, la ſeconde reduite ſera $\frac{m}{p} vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^2}{p} - zz$, dont le demi-diametre $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^2}{p}}$, & le diametre $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{pp} - \frac{4m^2}{p}} = \sqrt{\frac{\omega\omega mm - 4m^2p}{pp}}$, où il faut que $\omega\omega$ ſoit plus grand que $4mp$; le parametre $\sqrt{\omega\omega - 4mp}$, où il faut encore la même choſe, IM eſt $\frac{\omega m}{2p}$.

4. Ce Problème, qui eſt impoſſible ſur l'arc ACR, eſt poſſible ſur l'arc ANE; car en cet endroit on a l'équation $yy + 2my + mm = 3mm + \omega x - xx$, dont les racines n'ont rien d'impoſſible.

5. Mais lorſque ſous le ſigne radical il y a $+mm - \omega x$, il n'eſt pas neceſſaire que $\omega\omega$ ſoit plus grand que $4mp$, parceque le diametre & le parametre n'ont point le ſigne $-$.

On demande que $CB \times CD$ ſoit égal à $CF \times CH - 2GE \times AB$. L'équation eſt $yy + 2my = -\omega x - \frac{p}{m} xx$, $y = -m \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m} xx}$. Soit $y = v - m$: la premiere équation ſe change en $xx + \frac{m\omega x}{p} = -\frac{m}{p} vv + \frac{m^2}{p}$. Soit encore $x = z - \frac{m\omega}{2p}$; la ſeconde reduite eſt $\frac{m}{p} vv = \frac{mm\omega\omega}{4pp} + \frac{m^2}{p} - zz$. Donc le diametre eſt $\sqrt{\frac{mm\omega\omega}{pp} + \frac{4m^2}{p}}$ le parametre $\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. IM eſt $\frac{m\omega}{2p}$.

EXEMPLE VIII. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. Fig. 91. les trois lignes AB, AD, EF font par leur interſection un triangle équilateral. Il faut trouver le point C, duquel on tire les lignes CB, CD, CF ſur les données ; étant CD parallele à AB ; CB, CF paralleles à AD ; le point C hors du triangle ſous la ligne EF. Il faut enfin que le rectangle ſous CB, CD ſoit égal au quarré de CF. Fig. 91.

2. Nous nommerons les connuës AE, $\omega = 1 = z = AI = IE$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y ; $EB = AE - AB$, $\omega - x$; $CF = CB - BF$, $y - \omega + x$.

3. L'équation ſera $yy - 2\omega y + xy = -\omega\omega + 2\omega x - xx$; dont les racines ſont $y = \omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{1}{4}xx}$, ou $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

4, La conſtruction eſt telle. Parce qu'il y a $+m$, Art. 2. Nous couperons $BK = AI$, m, & nous mettrons le point K entre B & C ; par le point I nous menerons IK égale & parallele à AB, x ; parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$, nous prendrons $KL = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}x = \frac{n}{z}x$, nous ferons tomber le point K entre L & C, & nous tirerons IL infinie. Dans le triangle IKL, l'angle IKL eſt égal à l'angle IAB de 60. degrez, IK eſt double de KL donc l'angle ILK eſt droit ; donc $\overline{IL}^2 = \overline{IK}^2$, xx, $-\overline{KL}^2$, $\frac{1}{4}xx$, & $IL = x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & nommant $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\frac{a}{z}$, Il eſt $\frac{ax}{z}$, & tous les Il ſont auſſi $\frac{ax}{z}$.

De plus le centre M ſe trouve en prenant $IM = \frac{aam}{2pz}$, Regle 1. l'on prend M ſur IL en allant de I vers L, parcequ'il y a $+\omega x$, Reg. 3. le parametre eſt $\frac{az}{a}$ parceque mm eſt nulle, Regle 7. le diametre eſt dans IL, dont CL eſt une appliquée, Regle 9. ſi l'on fait $pzz : aam :: \frac{az}{a} : \frac{am\omega}{pz}$, ce quatriéme terme Regle 10. eſt le diametre double de $IM = \frac{aam}{2pz}$; ainſi MN demi-diametre eſt égale à IM & le point N, tombera ſur I Regle 11. quoique ω ne ſoit pas nulle, Regle 2. l'angle CLN des coordonnées eſt droit ; & comme aam, $\frac{3}{4} = pzz$, la courbe eſt un cercle, qu'on décrira du centre M, & du rayon MN, ou ML. C'eſt la ligne cherchée, qui ſatisfait dans tous ſes points.

Dém. nL eſt $In - IL$, $\frac{aam}{pz} - \frac{ax}{z}$, & tous les nl ont la même valeur : donc tous les rectangles $IL \times Ln$ ſont $\frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$; or par la nature de l'ellipſe & du cercle ; $aam : pzz : \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz} : \omega x - \frac{p}{m}xx$; donc tous les CL, $cl = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Maintenant 1° au point C pris ſur l'arc ICZ, on a une racine vraye. 2° Au point c pris ſur l'arc Zn encore racine vraye. 3° Au point c pris ſur l'arc nE racine fauſſe. 4° Au point c pris ſur l'arc IE racine fauſſe & dans tous ces points l'équation de n. 3. Remarquez que $bf = bE = x - \omega$. 5° Le cercle paſſe par les points Z, E. Car au point E, ou $y = o$, l'équation $y = m - \frac{n}{z}x - \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$ ſe change en $m - \frac{n}{z}x = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$: ou

la ligne ZE eſt égale à AI, m ; $Zl = \frac{n}{z}x$; & $El = ZE - Zl$, donc El eſt une appliquée, & le point E eſt dans la circonference. Au point Z on a ZE, $y = m = AI$, & l'équation $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$, ſe change en $\frac{n}{z}x = \sqrt{\omega x - \frac{p}{m}xx}$: mais Zl eſt $\frac{n}{z}x$, elle eſt donc une appliquée ; & le point Z eſt dans la circonference.

EXEMPLE IX. $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

FIG 92. 1. FIgure 92. ſoient données de poſition les quatre lignes AB, AD, EF, GH, qui par leur interſection font l'angle EAS droit, & les angles GEA, GAE, GAS, GSA de 45. degrez chacun ; d'où il ſuit que les angles en G ſont droits. Il faut trouver le point C, duquel on puiſſe tirer les quatre droites CB, CD, CF, CH ſur les données, faiſant les angles CBA, CDA, CFA, CHG auſſi de 45. degrez chacun, ou bien il faut que CB & CH ſoient paralleles à AE ; CD & CF à AB. L'on demande que le produit de CB multipliant CF ſoit égal à celui de CD multipliant CH.

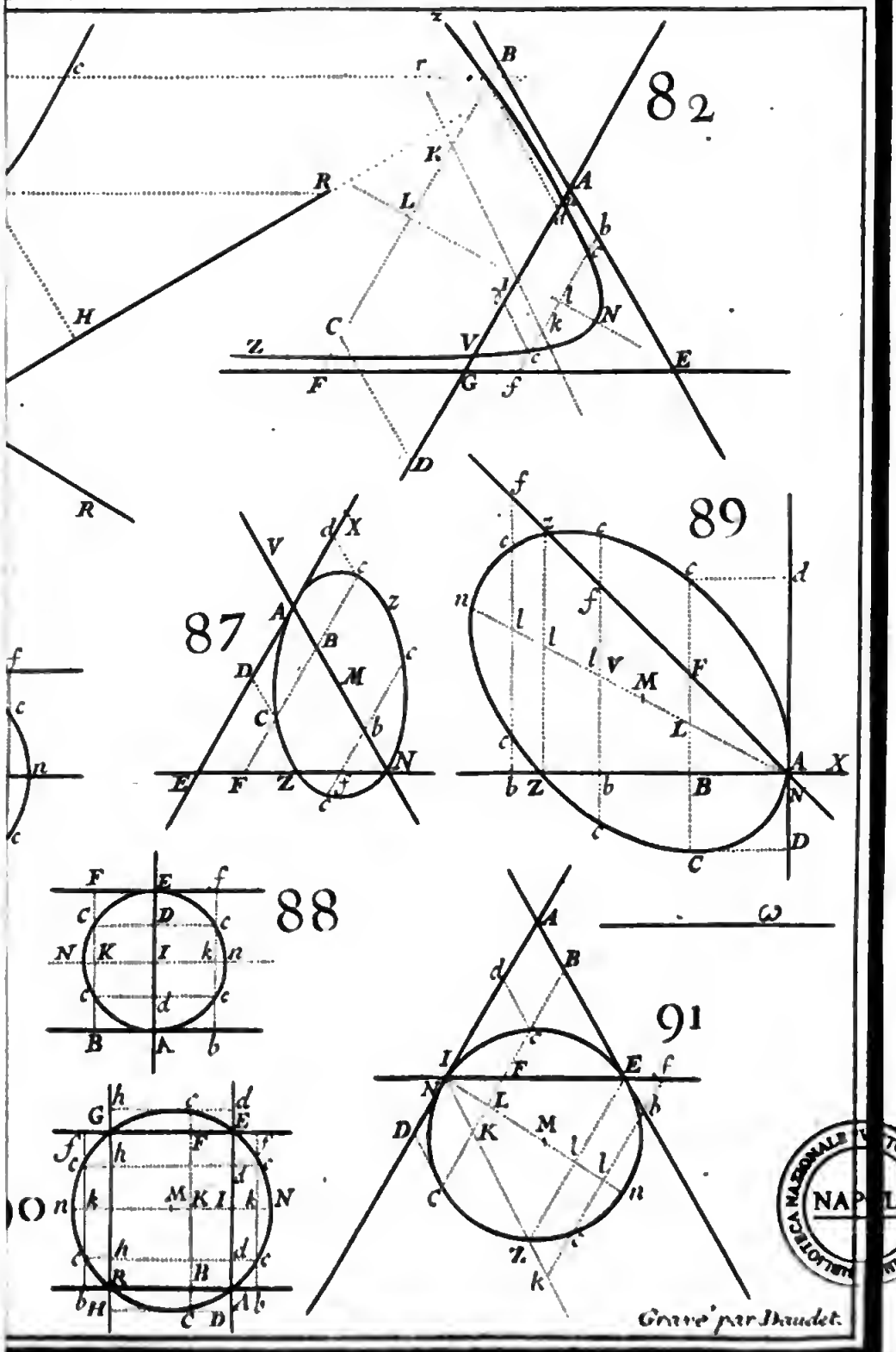
2. Nommons AG, $z = 1 = GS$, car AG eſt donnée de grandeur ; les inconnuës AB, $x = CF$, CB, y ; dans le triangle ARB l'angle ARB eſt droit, l'angle RBA eſt de 45. degrez = à l'angle RAB. La raiſon du Sinus de l'angle ARB, au Sinus de l'angle RAB de 45. degrez eſt celle de 1 à $\frac{707\,10}{1\,000\,00}$, que je nomme de 1 à n. Ainſi l'on fera cette proportion $1 : n :: BA, x : BR$, $nx = AR$; & $CR = y - nx$. Après cela dans le triangle CRD, on a cette Analogie $n : 1 :: CR, y - nx : CD$, $\frac{y - nx}{n}$.

L'angle AGS eſt droit, donc $AS = \sqrt{2}$, que je nomme $2m$; & $SR = 2m + nx = RH$. On aura donc $CH = RH - CR = 2m + 2nx - y$.

3. L'équation ſera $yy - 2my - 2nxy = -2mnx - 2nnxx$ dont les racines ſont $y = m + nx \pm \sqrt{mm - nnxx}$, ou $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$, en ſuppoſant $nn = \frac{p}{m}$, ou $p = mnn$.

4. Parcequ'il y a $+m$, je coupe $BK = m$, de ſorte que le point K tombe entre B & C, Art. 2. par le point K je mene IK parallele & égale à AB. Enſuite je fais, $z = 1 : n :: IK, x : KL$, $\frac{n}{z}x = IL = \frac{a}{z}x$ en faiſant $n = a$; & je fais tomber le point L entre K & C, parce qu'il y a $+\frac{n}{z}x$.

Maintenant le centre M eſt en I Regle 2. parceque la quantité ω eſt nulle ; & par la même raiſon le parametre eſt $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, Regle 8. le diametre eſt dans IL, & CL une de ſes appliquées, Regle 9. ſi l'on fait $pzz : aam : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{4aam^4}{pzz}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre, Regle 10. dont la moitié $\sqrt{\frac{aam^4}{pzz}} = MN$ le demi diametre, & N le ſommet qui ſe prend ſur la partie de IM, où eſt L, Regle 11. Enfin l'angle CLN des abſciſſes & des ordonnées eſt droit, & $aam = pzz$. La courbe eſt donc un cercle, qui ſe décrira du centre I ou M & du rayon $MN = IN$. C'eſt le lieu cherché, qui ſatisfait à la queſtion dans tous ſes points.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI

Dém. $IN = m$ puiſque elle eſt $= \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} = \sqrt{\frac{nnm^3}{nnmzz}}$ donc $IN = IA, IG,$ $IE = \frac{1}{2}\sqrt{2} = m$, donc le cercle qui paſſe par N, paſſe auſſi par A, G, E. Fig. 92.

Maintenant le rectangle ſous les ſegmens GL, LN du diametre eſt $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$, valeur de tous les rectangles ſous les ſegmens. Or par la nature du cercle, $aam : pzz ::$ le rectangle $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ des ſegmens : $mm - \frac{p}{m}xx = \overline{CL}^2$ quarré de l'appliquée : c'eſt pourquoi toutes les appliquées CL, cl ſont $\sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

Enſuite 1° au point C pris ſur l'arc NE, je trouve $CB = BK + KL + LC$, $y = m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$: & c'eſt au point C que le calcul a donné l'équation de n. 3. 2° Au point c pris ſur l'arc NA, j'aurai la racine negative de n. 3. De plus les triangles qui ſe font à ce point c étant ſemblables à ceux que l'on a examinez au point C, & les valeurs de x & de y étant poſitives aux deux endroits, l'on viendra à la même équation de n. 3. 3° Au point c pris ſur l'arc EG, j'aurai la racine poſitive, & l'équation de n. 3. 4° Au point c pris ſur l'arc AG on a une valeur negative & l'équation de n. 3.

Le Cercle CNc eſt donc le lieu cherché qui ſatisfait à la queſtion dans tous ſes points.

5. L'on fera évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy - 2my - 2nxy = -2mnx - 2nnxx$; ſi l'on fait $y - m - nx = v$, $y = v + m + nx$; la ſubſtitution donnera pour reduite $vv = mm - nnxx$; $vv = mm - \frac{p}{m}xx$, $\frac{m}{p}vv = \frac{m^3}{p} - xx$.

Le terme vv, qui dans ces ſortes de reduites, Regle 13. eſt le quarré de l'appliquée, nous apprend que CL, $v = CB - BK - KL$, $y - m - nx$ eſt l'appliquée de l'équation, & par conſequent IL le diametre. Le terme xx eſt le quarré de la partie du diametre pris depuis le centre I juſqu'à l'appliquée : mais IK, x, ne peut être cette appliquée, puis qu'elle ne ſe termine pas au point L ; il faut donc Regle 13. ſubſtituer IL $\frac{ax}{z}$ à la place de IK, x ; & $\frac{aaxx}{zz}$ à la place de xx : & afin que l'égalité ſubſiſte, il faut multiplier auſſi tous les termes de l'équation par $\frac{aa}{zz}$, comme l'on multiplie xx : ainſi la nouvelle équation, qui doit être conſtruite eſt $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Dans le premier terme $\frac{aam}{pzz}vv$, l'on voit que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de aam à pzz. Dans le terme $\frac{aam^3}{pzz}$, qui eſt toûjours le quarré du demi-diametre, l'on connoît que ce demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, & le diametre $2\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} = \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$. Et ſi l'on fait $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre. Enſuite dans cette ſorte d'équation le ſecond membre $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ eſt le rectangle ſous les ſegmens $NL \times LG$, $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} + \frac{ax}{z} \times \sqrt{\frac{aam^3}{pzz}} - \frac{ax}{z}$, étant l'origine des $\frac{ax}{z}$ au centre. Ainſi $IL = \frac{ax}{z}$ apprend que le point I eſt le

centre, & que $IM = o$. Enfin ſi l'on change aam en mnn, parceque $n = a$; & pzz en $mnnzz$, ou en mnn, parceque $mnn = p$, $z = 1$: on verra que $aam = pzz$. Et comme l'angle CLN eſt droit, on conclurra que la ligne cherchée eſt un cercle.

EXEMPLE X. $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. COmme n. 1. Exemple 9. excepté que l'on demande $CB \times CF + \overline{\frac{AE}{2n}}^2 = CD \times CH + \frac{AE \times AB}{2}$.

2. Comme n. 2. Ex. 9. & $AE = AS = \sqrt{2} = 2m$.

3. Comme n. 3. Ex. 9. excepté que $CB \times CF + \overline{\frac{AE}{2n}}^2 = CD \times CH + \frac{AE \times AB}{2}$ s'exprime ainſi $xy + \frac{2mm}{n} = \frac{2my + 3nxy - yy - 2mnx - 2nnxx}{n} + mx$; qui ſe reduit à $yy - 2my - 2nxy = -2mm - mnx - 2nnxx$. Dont les racines ſont en faiſant $mn = \omega$, $nn = \frac{p}{m}$; $p - mnn$, $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Equation au cercle ou à l'ellipſe.

4. Pour la conſtruction, elle ſera la même que Exemple 9. n. 4. pour $m + \frac{n}{z}x$; & l'on trouvera comme là IL, $\frac{n}{z}x$, ou $\frac{a}{z}x$. Le parametre Regle 6. eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, où il eſt évident qu'il faut ſelon la Regle 12. que $\omega\omega$ ſoit plus grand que $4mp$, afin que le Problème ſoit poſſible ; mais étant $\omega = mn$, & $p = mnn$; $\omega\omega$ eſt $mmnn$, $4mp$ eſt $4mmnn$: ainſi $\omega\omega$ étant plus petit que $4mp$, le parametre eſt une racine imaginaire, & le Problême impoſſible.

5. Mais ſi l'on demandoit $CB \times CF + \overline{\frac{AE}{2n}}^2 = CD \times CH + \frac{3}{2}AE \times AB$; l'équation de n. 3. ſera $xy + \frac{2mm}{n} = \frac{2my + 3nxy - yy - 2mnx - 2nnxx}{n} + 3mx$; qui ſe reduira à $yy - 2my - 2nxy + mm + 2mnx + nnxx = -mm + 3mnx - nnxx$; dont les racines ſont, après avoir poſé $3mn = \omega$, $y = m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$ au cercle, ou à l'ellipſe, Fig. 93.

FIG. 93. 6. Pour le commencement de la conſtruction, l'on fera comme n. 4. Le parametre $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ eſt une grandeur réelle, puiſque $aa\omega = mmnn$ eſt plus grand que $4mp = 4mmnn$. Le centre ſe trouve ſur IL, en prenant $IM = \frac{aam}{2pz}$, Regle 1. Le point M ſe prend ſur IL en allant de I vers L, parcequ'il y a $+\omega x$, Regle 3. Faiſons $pzz : aam :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre, Regle 10. Ce diametre eſt dans IL, & LC eſt ſon appliquée Regle 9. NM eſt la moitié du diametre, c'eſt-à-dire, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}}$, & le ſommet N ſe prend en

en allant de *M* vers *L*, Regle 11. Parceque la quantité aam eſt égale à pzz; de plus l'angle *CLN* des coordonnées eſt droit; ainſi la ligne cherchée eſt un cercle, qui ſe décrira du centre *M*, & du rayon *MN*. C'eſt le lieu cherché. Fig. 93.

Dém. Le rectangle $NL \times nL$ ſous les ſegmens du diametre eſt $-\frac{aam^1}{pzz} + \frac{aaomx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Or comme aam eſt à pzz; ainſi le rectangle $NL \times Ln$, $-\frac{aam^1}{pzz} + \frac{aaomx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$ eſt au quarré de l'appliquée *CL*, $-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$; & $CL = \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Maintenant au point *C* on a la racine vraye & l'équation de n. 5. Au point *c* on a la racine fauſſe & l'équation de n. 5. parce qu'on y a des triangles ſemblables à ceux qui ſe font par les lignes tirées du point *C*. Ainſi le cercle *CNc* eſt le lieu cherché.

7. Remarquez que ſi le calcul avoit été fait au point *V* & que *L* eût été en *u*, le ſommet *N* auroit dû ſe prendre du côté où *L* n'étoit pas.

8. L'on fera évanoüir les ſeconds termes, en faiſant $y = v + m + nx$, & la ſubſtitution donnera $vv = -mm + 3mnx - nnxx$; $xx - \frac{omx}{p} = -\frac{m^1}{p} - \frac{m}{p}vv$.

Pour faire évanoüir le ſecond terme qui reſte, ſoit $f + \frac{om}{2p} = x$: la ſubſtitution donne $\frac{m}{p}vv = \frac{oommm}{4pp} - \frac{m^1}{p} - ff$.

Le terme $\frac{m}{p}vv$ fait connoître que $v = y - m - nx = CB - BK - KL = CL$ eſt l'appliquée, & que le diametre eſt dans *IL*. D'où Reg. 13. il ſuit que *AB*, *x*, ne peut pas faire partie de l'abſciſſe *NL*; mais que c'eſt *IL*, $\frac{a}{z}x$: c'eſt pourquoi au lieu de $x - \frac{om}{2p} = f$, il faut mettre $\frac{ax}{z} - \frac{aom}{2pz} = \frac{af}{z}$, afin que l'égalité demeure. Ainſi ff de la derniere équation ſe changera en $\frac{aaff}{zz}$, & pour conſerver l'égalité, l'on multipliera tous les autres termes par $\frac{aa}{zz}$, & l'on aura $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aaoommm}{4ppzz} - \frac{aam^1}{pzz} - \frac{aaff}{zz}$. Où l'on voit d'abord que le rapport du diametre au parametre eſt le même que de aam à pzz; que le diametre eſt $\sqrt{\frac{aaoommm}{ppzz} - \frac{4aam^1}{pzz}}$; & faiſant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{aaoommm}{ppzz} - \frac{4aam^1}{pzz}} : \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, que ce quatriéme terme eſt le parametre. Puiſque $aam = pzz$, & que l'angle *CLN* eſt droit, c'eſt un cercle. Enfin dans cette eſpece d'équation le ſecond membre eſt le rectangle ſous les ſegmens du diametre, $NL \times nL$, ou ſous $\sqrt{\frac{aaoommm}{4ppzz}} - \frac{aam^1}{pzz} + \frac{af}{z}$, & $\sqrt{\frac{aaoommm}{4ppzz}} - \frac{aam^1}{pzz} - \frac{af}{z}$, étant l'origine des $\frac{af}{z}$ au centre *M*. Mais $\frac{af}{z} = \frac{ax}{z} - \frac{aom}{2pz}$ ou $= \frac{aom}{2pz} - \frac{ax}{z}$ donc *IM* eſt $\frac{aom}{2pz}$ afin que *ML* ſoit, comme elle doit l'être, $\frac{af}{z} = IM - IL$, $\frac{aom}{2pz} - \frac{ax}{z}$. C'eſt *Mu*, qui eſt *Iu*, *IM*, $\frac{ax}{z} - \frac{aom}{2pz}$.

EXEMPLE XI. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 94. 1. FIg. 94. comme n. 1. Exemple 3. excepté que l'on demande que ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CF, ſoit égal au quarré de CD.

2. Comme n. 2. Ex. 3. excepté $AE = 2\omega = 1$.

3. Par la ſuppoſition $CB \times CF = \overline{CD}^2$, $yy - 2\omega y + xy = -xx$; dont les racines ſont $y = \omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega\omega - \omega x - \frac{1}{4}xx}$, ou $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$, en poſant $m = \omega$, $z = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{4}$.

4. Parcequ'il y a $+m$, ſur BC nous couperons $BK = m$. Par le point K nous mencrons l'infinie IK parallele & égale à AB. Enſuite nous ferons $KL = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}x = \frac{n}{z}x$; & nous ferons tomber le point L entre K & B, parcequ'il y a $-\frac{n}{z}x$. Dans le triangle IKL, IK eſt double de KL donc leurs ſinus ſont doubles l'un de l'autre; donc l'angle IKL étant de 60. degrez, l'angle ILK eſt droit donc $IL = x\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{z}x$ en faiſant $\frac{a}{z}\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Maintenant le centre M eſt ſur la ligne IL, & ſe trouve en prenant $IM = \frac{a}{z}\frac{n}{p}\frac{m}{z}$, Regle 1. parcequ'il y a $-\omega x$, le centre M ſe prend ſur la partie de la ligne IL ſur laquelle le point L n'eſt pas, Regle 4. le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$, REGL. 5. Le diametre eſt dans IL, & CL une de ſes appliquées, REGL. 9. faiſons $pzz : aam :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre, REG. 10. ſa moitié eſt MN, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$, le point N ſe prend ſur IL du même côté où eſt L, REGL. 11.

Parceque $aam = pzz = \frac{3}{4}$, & que l'angle CLN des coordonnées eſt droit, la ligne cherchée eſt un cercle.

Le rectangle $NL \times Ln$ des ſegmens du diametre ſera $\frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Or comme le diametre eſt au parametre, ce rectangle eſt au quarré de l'appliquée CL, & $CL = \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$, valeur de tous les cl.

Maintenant 1° au point C nous avons CB la racine vraye de n. 3. Et l'équation $2\omega y - xy - yy = xx$. 2° Au point c pris ſur l'arc NA, nous avons la racine fauſſe. 3° Au point c pris ſur l'arc Hn, la racine poſitive au point c pris ſur l'arc An, la racine negative, & ſur tous ces points l'équation de n. 3.

EXEMPLE XII. $y = -m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 95. 1. FIg. 95. Comme Exemple 8. n. 1. excepté qu'il faut trouver dans un des angles exterieurs BAD le point C.

2. Nommez AE, ω & chaque autre côté connu du triangle ; AB, $x = CD$; CB, y, $DF = \omega + y$; $CF = x + \omega + y$.

3. L'équation ſera $yy + 2\omega y + xy = -\omega\omega - 2\omega x - xx$, dont les racines ſont $y = -\omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\omega x - \frac{3}{4}xx}$, imaginaires & le Problême eſt impoſſible dans l'angle exterieur BAD. Mais il eſt poſſible aillleurs. Voyez Ex. 8.

4. Mais s'il falloit que $\overline{CB \times CD} - \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{AE}^2$, $yy + 2\omega y + xy = -2\omega x - \frac{3}{4}xx$; dont les racines ſont $y = -\omega - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\omega\omega - \omega x - \frac{3}{4}xx}$, ou $y = -m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$, en ſuppoſant $m = \omega = z = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{4}$. Equation au cercle, ou à l'ellipſe.

5. Parcequ'il y a $-m$ Art. 2. ajoûtez BK, m à CB, & par le point K menez l'infinie KI parallele & égale à AB, le point I tombe ſur le point E, coupez KL, $\frac{1}{2}x$, mettez le point K entre L & C, tirez l'infinie $IL = \frac{ax}{z}$.

Prenez $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & faites tomber le centre M ſur la partie de IL, ſur laquelle le point L n'eſt pas, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 4. le parametre eſt $\sqrt{\frac{a\omega xz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$, Regle 5.

Le diametre eſt dans IL, & CL ſon appliquée, Regle 9. faites $pzz : aam :: \sqrt{\frac{a\omega xz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^4}{pzz}}$, qui eſt le diametre, Regle 10. dont la moitié eſt NM, le ſommet N ſe prend du côté, où L ſe trouve, Regle 11. & parceque aam, $\frac{1}{4}$ n'eſt pas égal à pzz, $\frac{3}{4}$, la ligne eſt une ellipſe, le lieu cherché eſt dans l'arc NC.

Le rectangle $NL \times Ln$ ſous les ſegmens du diametre eſt $\frac{aam^4}{pzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$.

Or par la nature de l'ellipſe $aam : pzz :: NL \times Ln$, $\frac{aam^4}{pzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz} : \overline{CL}^2$, quarré de l'appliquée $mm - \omega x - \frac{p}{m}xx$; & $CL = \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Maintenant au point C vous avez la racine poſitive. De plus c'eſt au point C que le calcul de n. 4. a été fait.

Au point c vous avez la racine negative, & l'équation $yy + 2\omega y + 3xy = -\frac{3}{4}xx - 2\omega x$, differente de celle de n. 4. L'ellipſe eſt le lieu cherché dans les arcs, où l'on a enſemble $+x$, $+y$; ou $-x$, $-y$.

EXEMPLE XIII. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 69. Exemple de M. DESCARTES. Soient AB, AD, EF, GH, pluſieurs lignes données par poſition, & qu'il faille trouver un point comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme CB, CD, CF, & CH, en ſorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, ſoient donnez CBA de 120. degrez, CDA de 35°. 15'. 50''. CFE de 30. degrez, CHT de 48°. 35'. 27''. & que CB multipliée par CF produiſe une ſomme égale à CD multipliée par CH. FIG. 69. 38.

FIG. 69. 38. 2. Suppoſons la choſe faite, & examinons d'abord ce que la poſition des lignes nous fait connoître. 1° Les lignes EF, DA, GH coupent la ligne AB aux points E, A, G. Ainſi les ſegmens EA, AG ſont connus, je les meſure, & je trouve que la raiſon de EA à AG eſt celle de 3 à 5, je nomme $EA = 3$; & $AG = 5$; & l'unité, que je nomme z, eſt égale au tiers de EA, ou à la cinquiéme partie de AG. 2° Je meſure auſſi les angles que les lignes données font par leur interſection, & je trouve BAR de 60. degrez, AES de 30, AGT de 30.

Enſuite je nomme les inconnuës AB, x; CB, y; & je prolonge CB juſques à ce qu'elle coupe toutes les données. Voyez le calcul, qui eſt Liv. 1. Part. 3. Sect. 3. & à chaque endroit joignez ce que je dirai ici qui lui convient.

L'on a trouvé là que les trois angles du triangle ARB étoient égaux, c'eſt pourquoi quand on a dit, que $z : b :: AB, x : BR$, $\frac{bx}{z}$; b eſt auſſi égal à b, & $b = 1$, $\frac{bx}{z} = x$.

Là même dans le triangle CDR, $CR : CD :: z : c$. où comme le ſinus de l'angle CDA au ſinus de l'angle CRD. Et $57734 : 50002 : z = 1 : \frac{866 \cdot 2}{57734} = \frac{3}{2}$ environ $= c$. & $CD = \frac{czy + bcx}{zz} = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}CR$.

Là même, dans le triangle ESB, $BE : BS :: z : d$. ou comme le ſinus de BSE au ſinus de BES, c'eſt-à-dire, comme $1 = z$ à $\frac{1}{2} = d$. & $BS = \frac{dk + dx}{z} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}BE$.

Là même, dans le triangle FSC, $CS : CF :: z : e$. ou comme le ſinus de CFS au ſinus de CSF, donc $e = 2$, & $CF = \frac{ezy + dek + dex}{zz} = 2y + 3 + x = 2CS$.

Là même, dans le triangle GBT, $BG : BT :: z : f$. mais $BG = BT$, donc $f = z = 1$.

$a = \sqrt{\frac{3}{4}}$
$b = 1$
$c = \frac{3}{2} = \frac{2}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}CT$.
$d = \frac{1}{2}$
$e = 2$
$f = 1$
$g = \frac{2}{3}$
$k = 3$
$= AE$
$l = 5$
$= AG$
$m = 1$
$n = \frac{1}{2}$
$\omega = 4$
$p = \frac{3}{4}$
$z = 1$.

Là même, dans le triangle TCH, $CT : CH :: z : g$. ou comme le ſinus de CHT au ſinus de CTH. Ce qui fait $\frac{2}{3} = g$, & $CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$

3. Après cela voyez la ſuite de la reſolution de ce Problême L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. Il ſera aiſé d'appliquer ce que je vais dire ici à ce qui ſe lit en cet endroit.

$CB \times CF = CD \times CH$ donne cette équation

$$yy = \frac{-dekzzy \quad -dezzxy \quad +bcfglx \quad -cfgzxy \quad +cfglzy \quad +bcgzxy \quad -bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$$

Au lieu des quantitez $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz} = 2$, l'on écrit $2m$, au lieu des quantitez $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz} = 1$, l'on écrit $\frac{2n}{z}$, & l'équation precedente ſe change en $yy = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$.

On tire les racines $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$. Alors au lieu de $\frac{-2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz} = 4$, l'on a écrit ω, & au lieu de $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz} = \frac{-3}{4}$ l'on a écrit $-\frac{p}{m}$. Et l'on a fait $y = m - \frac{n}{z}x, \pm\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$; $y = 1 - \frac{1}{2}x \pm \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$.

4. L'on a déja conſtruit $m - \frac{n}{z}x$, Liv. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 2. où l'on a tiré les lignes IK parallele à AB, & IL, étant $BK = m$; $IK = AB$, x; $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$. Pourſuivons.

Dans le triangle IKL, il eſt aiſé de voir que $IL = x\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{ax}{z}$ auſſi bien que tous les Il.

Je prends $IM = \frac{a\omega m}{2pzz} = \sqrt{\frac{16}{3}}$, Regle 1. & je fais tomber le point M du côté où L ſe trouve, parcequ'il y a $+\omega x$, Regle 3. le parametre eſt $\sqrt{\frac{a\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$, Regle 5. le diametre eſt dans IL, & LC eſt une de ſes appliquées, Regle 9. $\sqrt{\frac{aaa\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ le diametre, Regle 10. dont la moitié $\sqrt{\frac{aaa\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}} = \sqrt{\frac{19}{3}}$ eſt NM, qui eſt plus grande que IM, & l'on mettra le ſommet N ſur la partie de IM, où L ſe trouve Regle 11. l'angle CNL des appliquées avec les abſciſſes eſt droit, & $aam = pzz = \frac{3}{4}$: ainſi la ligne eſt un cercle qu'il eſt aiſé de décrire du centre M & du rayon NM. Il ſatisfait à la queſtion.

Le rectangle ſous les ſegmens du diametre eſt $\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$. Et par la nature du cercle CL, ou $cl = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Maintenant 1° au point C on a la racine poſitive. Au point c pris au deſſus de A, la negative, & dans ces deux points la même équation, d'où l'on peut conclurre que le cercle CNc ſatisfait au Problême.

5. L'on fait évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy - 2my + \frac{2nxy}{z} = \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, en prenant $v + m - \frac{nx}{z} = y$; & ſi l'on écrit ω pour $\frac{-2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$, & $-\frac{p}{m}$ pour $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ l'équation deviendra $xx - \frac{\omega mx}{p} = \frac{m^3}{p} - \frac{mvv}{p}$.

Prenez encore $\int + \frac{\omega m}{2p} = x$, la reduite ſera $\frac{m}{p}vv = \frac{a\omega mm}{4pp} + \frac{m^3}{p} - \iint$.

Je commence la conſtruction ſur BC, en prenant $BK = m$; par le point K je mene la ligne indefinie IK parallele à AB, & je détermine $IK = AB$, x. je coupe $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$; & par les points I, L, je tire l'infinie IL. Je trouverai comme n. 4. que IL eſt $\frac{ax}{z}$. J'ai donc $CL = CB - BK + KL$, $y - m + \frac{n}{z}x = v$. Et parceque dans l'équation derniere le terme $\frac{m}{p}vv$ m'apprend Regle 13. que vv eſt le quarré de l'appliquée, CL ſera cette appliquée, qui eſt terminée à la ligne IL, laquelle par conſequent eſt le diametre de la courbe cherchée. Le terme $\iint$ me marque le quarré de l'abſciſſe, mais inutilement prendrai-je $Am = \frac{\omega m}{2p}$, pour avoir $mB = Am - AB$, $\frac{\omega m}{2p} - x = \int$. Puiſque l'abſciſſe ne doit pas être ſur AB, ſur la-

Fig. 96 quelle le diametre n'eſt pas. C'eſt pourquoi à la place de AB, x; je ſubſ-
96. a tituë IL, $\frac{ax}{z}$ qui eſt ſur le diametre IL, qui fait un angle avec CL, qui ſera partie de l'abſciſſe, & qui contient l'inconnuë x. Mais afin que l'égalité demeure dans $\frac{\omega m}{2p} - x = f$, je multiplie tous les termes par $\frac{a}{z}$, pour faire $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z} = \frac{af}{z}$. Enſuite dans l'équation $\frac{p}{m}vv = \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{m'}{p} - ff$, à la place de ff je ſubſtituë $\frac{aaff}{zz}$, & afin de conſerver encore l'égalité, je multiplie auſſi tous les termes par $\frac{aa}{zz}$, ce qui donne enfin $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam'}{pzz} - \frac{aaff}{zz}$.

Cette derniere reduite fait connoître dans le terme $\frac{aam}{pzz}vv$, que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de aam à pzz, car dans ces ſortes de reduction, ce qui multiplie le quarré de l'appliquée marque ce rapport.

Dans le terme $\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam'}{pzz}$, qui eſt toûjours le quarré du demi-diametre, je vois que le demi-diametre MN eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam'}{pzz}}$; & le diametre $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam'}{pzz}}$; & faiſant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam'}{pzz}} : \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre. Dans le terme $\frac{aaff}{zz}$ qui eſt toûjours dans ces ſortes de reduites le quarré de la ligne ML priſe entre l'appliquée CL & le centre M, je découvre que ML étant $\frac{af}{z} = \frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$, & IL étant $\frac{ax}{z}$, LM eſt $IM - IL$, $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$, & par conſequent IM doit être priſe égale à $\frac{a\omega m}{2pz}$. Et le point M pris du côté de L; & parceque il vient toûjours $\frac{a\omega m}{2pz} - \frac{ax}{z}$, lorſqu'il y a $+\omega x$ dans $\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, c'eſt pour cela que Mr DESCARTES a donné la Regle 3. Enfin étant $aam = pzz$, c'eſt un cercle.

Toutes ces choſes étant connuës, il n'eſt pas difficile de pourſuivre le reſte de la conſtruction comme n. 4.

* Tom. 3. Lett. 82. 6. M. DESCARTES aſſure dans une de ſes Lettres, * que dans la Figure 69. *On voit à l'œil, que puiſque* CB *multipliée par* CF *doit produire une ſomme égale à* CD *multipliée par* CH; *le point* C *ſe rencontre neceſſairement en quatre interſections des lignes données. A ſçavoir en l'interſection* A *parcequ'alors les lignes* BC, CD *ſont nulles, & par conſequent étant multipliées par les deux autres, elles compoſent deux riens, qui ſont égaux entr'eux. Tout de même en l'interſection* G *les lignes* CH *&* CB *ſont nulles. Et ainſi en l'une des deux autres, qui ne ſont pas marquées dans la Figure 69.* CD *&* CF, *& dans l'autre* CH *&* CF *ſont nulles.*

La Figure doit donc être telle qu'on la voit, Fig. 96. dans laquelle le cercle paſſe par les points d'interſection A, G, X, Y. Au point Y, CD, CF ſont nulles, au point, X, CH, CF le ſont.

Fig. 96. 96. a Au point A, Fig. 96. *a.* la ligne AD, à laquelle les CD ſe terminent, coupe la ligne AB, à laquelle les CB ſe terminent, & par conſequent les lignes CB, CD ſont nulles au point A. Pour prouver que le cercle paſſe par l'interſection A, Fig. 96. *a.* menez AI parallele à CB, AI ſera une

appliquée égale à BK, m. Au point A les x ſont nulles, c'eſt pourquoi effacez les termes où x, ſe trouve dans $\sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m} xx}$, valeur des appliquees; il reſtera $\sqrt{mm} = m = AI$. D'où il ſuit que AI eſt veritablement une appliquée, & que le cercle paſſe par l'interſection A. Fig 95. 96. a

Ce qui ſe peut encore prouver de cette ſorte. Suppoſons que le cercle paſſe par le point A; $AI = m$ ſera une appliquée. Le rectangle $IN \times In$ eſt $\frac{aamm}{pzz} = mm$ quarré de l'appliquée AI, qui ſera donc m. D'où il ſuit que le cercle paſſe par le point A.

Au point G la ligne AB, coupe la ligne GH, & par conſequent les lignes CB, CH ſont nulles au point G. Pour prouver que le cercle paſſe par le point G, menez l'appliquée Gl paralelle à AI, $AI, m = \frac{1}{2} Az$; donc $Az = 2m$, & $zG = 3$: donc Az, $2 : AI, m = 1 :: zG$, $3 : Gl$, $\frac{3}{2}$.

Suppoſons à preſent que le cercle paſſe au point G, AG eſt $x = 5$.

Subſtituons cette valeur de x dans la valeur de l'appliquée Gl; ce ſera $\frac{3}{2} = Gl$, comme on doit le trouver, ſi le cercle paſſe au point G: ainſi il eſt certain qu'il y paſſe.

Au point Y les lignes CD, CF ſont nulles. Pour prouver que le cercle paſſe au point Y, menez l'appliquée Ytv, qui ſera l'angle YvA de 60. degrez, donc $AY = Yu = AE = 3$, & $zv = 1$. Donc Az, $2 : AI$, $1 :: zv$, $1 : vt$. $\frac{1}{2}$; & l'appliquée $Yt = \frac{1}{2}$.

Suppoſons à preſent, que le cercle paſſe au point Y ſubſtituons 3 valeur de x, l'on ſera $\frac{1}{2} = Yt$, telle qu'on doit la trouver, le cercle paſſant au point Y.

Au point X les CF, CH ſont nulles. Pour prouver que le cercle paſſe au point X, 1° menez l'appliquée Xrp; & $Xp = pG$. 2° Abbaiſſez la perpendiculaire XB; $EB = BG = 4$. 3° Dans le triangle XBG, le côté XG eſt double du côté XB. Nommons XG, f; XB eſt $\frac{1}{2} f$ & $f = \sqrt{\frac{64}{3}}$. 4° Diviſez XG en deux parties égales au point S, & joignez pS: les angles en S ſont droits. 5° Dans le triangle pXS le côté pX eſt double du côté pS. Nommons pX, u; pS ſera $\frac{1}{2} v$; $SX = \frac{1}{2} f = \sqrt{\frac{16}{3}}$; $u = \frac{8}{3} = Xp = pG$. & $Ap = \frac{7}{3} = x$; & $zp = \frac{1}{3}$. 6° Dans les triangles équiangles AzI, rzp l'on ſera, Az, $2 : AI$, $1 :: zp$, $\frac{1}{3} : pr$, $\frac{1}{6}$. Et l'appliquée Xr eſt $= \frac{1}{2}$. 7° Subſtituons la valeur $\frac{7}{3}$ de x, nous aurons $\frac{1}{2}$ valeur de l'appliquée Xr. Ainſi le cercle paſſe au point X.

On demande que $CB \times CF$ ſoit égal à $CD \times CH$. Le cercle paſſe par les interſections, dans leſquelles ces deux rectangles deviennent $0 = 0$, c'eſt ce qui arrive au point A, au point G, au point X, au point Y; & l'équation $0 = 0$ eſt réelle. Mais aux deux autres interſections E, u, l'équation devient impoſſible, ainſi le cercle ne peut pas y paſſer. En effet au point E, ou CB, CF ſont zero; l'équation eſt $0 = CD \times CH$.

De même au point u, ou CD, CH ſont zero ; l'équation eſt $CB \times CF = o$. On peut dans les Exemples qui precedent, & dans ceux qui ſuivent, examiner de la même maniere, par quelles interſections les courbes paſſent.

EXEMPLE XIV. $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

FIG. 69. 1. FIg. 69. de M. DESCARTES. Si l'on avoit demandé que $\overline{CB \times CF} + zzz = \overline{CD \times CH} + \frac{1}{2}\overline{AB}^2$, & le reſte comme Ex. 13. n. 1.

2. Comme Ex. 13. n. 2.

3. Voyez Ex. 13. n. 2. l'équation ſera

$$yy = -zzz \;\underline{+ cfglzy}\; \underline{- dekzzy \;+ becfglx \;- dezzxy \;- cfgzxy \;+ becfgxx \;+ bcgzxy \;+ \tfrac{1}{2}xx}_{ez^3 - cgzz}$$

qui ſe reduit à $yy = 2my - \frac{2nxy}{z} - \frac{zzz + becfglx - becfgxx + \frac{1}{2}xx}{ez^3 - cgzz}$.

& à ces racines $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - zzz - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{becfglx - becfgxx + \frac{1}{2}xx}{ez^3 - cgzz}}$. Mettons $-\frac{2mn}{z} + \frac{becfgl}{ez^3 - cgzz} = \omega = 4$, $\frac{becfg}{ez^3 - cgzz} + \frac{1}{2} + \frac{nn}{zz} = -p = -\frac{1}{4}$. Et parceque $z = m = 1$, ce ſera enfin $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, au cercle ou à l'ellipſe, qui ſe conſtruira de cette façon.

4. Comme Ex. 13. n. 4. l'on conſtruira $m - \frac{n}{z}x$, & l'on trouvera $IL = \frac{n}{z}x$. Enſuite on prendra $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$ Regle 1. & le centre M ſera mis ſur la partie de IL, où le point L eſt, Reg. 3. le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ parcequ'il y a $-mm$, Regle 6. $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$ eſt le diametre, Regle 10. qui ſera ſur IL, & LC ſera une appliquée Regle 9. & NM la moitié du diametre ſe prendra ſur IL en allant de M vers L, Regle 11. la quantité $\omega\omega = 16$ eſt plus grande que $4mp = 1$. Ainſi le parametre eſt une grandeur réelle, & le Problême eſt poſſible, Reg. 12. parceque $aam = \frac{1}{4}$ n'eſt pas égal à $pzz = \frac{1}{4}$, la ligne eſt une ellipſe, Art. 4. Regle 2. qu'on décrira, puiſqu'on a ſon ſommet, ſon diametre, ſon parametre. C'eſt le lieu cherché. La Figure 96. peut ſervir à la démonſtration.

Le rectangle ſous les ſegmens eſt $-\frac{aam^3}{pzz} + \frac{aa\omega mx}{pzz} - \frac{aaxx}{zz}$, & le quarré de l'appliquée eſt $-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx$ donc $CL = \sqrt{-mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

Au point C on a la racine vraye, au point c la racine fauſſe, & dans tous les deux la même équation.

ARTICLE

ARTICLE VII.

Conſtruction particuliere à l'Hyperbole conſiderée par rapport à ſes diamétres.

LE Texte de M. DESCARTES rapporté au commencement de l'Article VI. contient pluſieurs choſes, qui regardent l'hyperbole : liſez-le. Voici ce qui ſuit.

M. DESCARTES.

Mais quand cette Section étant une hyperbole, on a $+ mm$; & quantité $\omega\omega$ eſt nulle, ou plus petite que $4mp$, on doit tirer Fig. 97. du centre M la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM; & faire MO égale à $\sqrt{mm - \frac{a\omega m}{4p}}$; ou bien la faire égale à m, ſi la quantité ωx eſt nulle. Puis conſiderer le point O comme le ſommet de cette Hyperbole, dont le diametre eſt OP, & CP la ligne, qui lui eſt appliquée par ordre, & ſon côté droit eſt $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^4}{p^3z^4}}$, & ſon côté traverſant eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$. Excepté quand ωx eſt nulle; car alors le côté droit eſt $\sqrt{\frac{2aamm}{pzz}}$, & le traverſant eſt $2m$. Et ainſi il eſt aiſé de la trouver par le ſecond Problême du premier Livre d'Apollonius.

Le Problême ſecond du Livre premier d'Apollonius eſt la Propoſition cinquante-troiſiéme du même Livre, où il enſeigne la maniere de décrire une hyperbole, étant donnez le diametre déterminé avec ſon ſommet, le parametre, & l'angle que les appliquées ſont avec les abſciſſes. L'on a donné, Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. la maniere de décrire une hyperbole, en cherchant pluſieurs de ſes points ſur un plan. D'où l'on peut conclurre que les Problêmes, qui ſe conſtruiſent avec une hyperbole ſont plans, parcequ'on ne ſe ſert dans cette deſcription que de la Regle & du Compas.

REGLE I.

LE centre M eſt ſur la ligne IL, il ſe trouve en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$. Cette Regle ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$ & ωx dans l'équation.

REGLE II.

SI la quantité ω eſt nulle, le point M eſt le même que le point I. Cela ſuppoſe m dans l'équation.

Fig.69.

REGLE III.

LOrſqu'il y a $-\omega x$, l'on prend le point M du même côté que le point L par rapport au point I, c'eſt-à-dire, que l'on prend IM ſur IL, en allant de I vers L. Ce qui ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE IV.

LOrſqu'il y a $+\omega x$, l'on prend le point M de l'autre côté que le point L, par rapport au point I, c'eſt-à-dire, que l'on prend IM ſur IL prolongée en allant de I vers le côté où le point L n'eſt pas. Cela ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE V.

LOrſqu'il y a $-mm$, le côté droit ou parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Cela ſuppoſe encore $\frac{n}{z}x$ & ωx dans l'équation.

REGLE VI.

LOrſqu'il y a $+mm$, & que la quantité $\omega\omega$ eſt plus grande que $4mp$, le côté droit ou parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Cela ſuppoſe auſſi $\frac{n}{z}x$, & ωx dans l'équation.

REGLE VII.

LOrſque la quantité mm eſt nulle, le parametre eſt $\frac{\omega z}{a}$. Cela ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ dans l'équation.

REGLE VIII.

LOrſque la quantité ωx eſt nulle, le parametre eſt $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Cette Regle ſuppoſe $\frac{n}{z}x$ & $-mm$ dans l'équation.

REGLE IX.

DAns tous ces cas le diametre eſt dans la ligne IM, & CL eſt une de ſes appliquées. Ce qui ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$.

REGLE X.

APrès que le côté droit ou parametre a été déterminé, pour avoir ſon côté traverſant ou diametre déterminé; l'on fait comme pzz à aam: ainſi le parametre a un quatriéme terme, qui eſt le diametre cherché, cette Analogie ſuppoſe que le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} \mp \frac{4mpzz}{aa}}$, ou $\frac{\omega z}{a}$, ou $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$.

FIG. 97.

REGLE XI.

LA ligne MN eſt toûjours égale à la moitié du diametre, & l'on prend le ſommet N ſur IM du même côté du point M, qu'eſt le point L, c'eſt-à-dire, que l'on prend MN en allant du point M vers le côté où le point L eſt déja. Tout cela ſuppoſe $\frac{n}{z}x$.

REGLE XII.

MAis Fig. 97. lorſqu'il y a $+mm$, & que la quantité $\omega\omega$ n'eſt pas plus grande, que $4mp$, ou qu'elle eſt nulle : l'on doit tirer du centre M la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM. Cette Regle ſuppoſe m & $\frac{n}{z}x$ dans l'équation.

Dans ce cas l'on ſuit les Regles 1. 2. 3. 4.

M. DESCARTES dit qu'il faut que la quantité $\omega\omega$ ne ſoit pas nulle ou plus petite que $4mp$; mais il me ſemble qu'il faut qu'elle ſoit plus grande, car ſi elle étoit égale, le parametre $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{nn} - \frac{4mpzz}{nn}}$ ſe reduiroit à zero.

REGLE XIII.

DAns ce même cas, lorſque la quantité ωx ſe trouve dans l'équation, l'on fait $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$, qui eſt le demi-diametre déterminé ; & le diametre eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, & le côté droit ou parametre, $\sqrt{\frac{4n^4m^4}{ppz^4} - \frac{n^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$. Cela ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE XIV.

DAns le même cas, lorſque la quantité ωx eſt nulle ; l'on fait le demi-diametre déterminé $MO = m$; & le diametre eſt $2m$, & le parametre $\frac{2nnmm}{pzz}$. Cette Regle ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$ dans l'équation.

REGLE XV.

DAns le même cas le diametre eſt ſur la ligne OP, dans le point O eſt le ſommet, & CP une de ſes ordonnées. Cela ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$.

REGLE XVI.

LA raiſon du parametre au diametre déterminé eſt dans ce cas comme nnm à pzz. Ce qui ſuppoſe m, $\frac{n}{z}x$.

M. Schooten, qui a fait des Commentaires ſur la Geometrie de M. DESCARTES, lui écrivit ſur le deſſein, qu'il avoit de changer la poſition des lignes de la Figure 69. lorſqu'elle eſt appliquée à l'hyperbole.

Mais M. DESCARTES, lui répondit * ainſi. *On ſçait bien que les lignes droites étant poſées, & la queſtion n'étant point changée, le lieu ne peut pas être tout enſemble au cercle & à l'hyperbole... Cela n'empêche pas, que voulant uſer de brieveté, & rapporter tous les cas à un ſeul exemple, comme j'ai fait en la Fig. 38. je n'aye eû raiſon, après avoir donné le vrai lieu de cet Exemple, qui eſt un cercle, d'y appliquer auſſi l'hyperbole, afin que toutes les Lettres* I, K, L, B, C, D, *&c. s'y trouvant au même lieu qu'auparavant, on pût entendre le peu, que j'en voulois dire, plus facilement qu'on n'eût fait, ſi la figure eût été changée. Il me ſemble donc que vous ne devez point y mettre d'autre figure, car il faudroit auſſi changer le diſcours, & la ſolution en ſeroit plus embroüillée... C'eſt auſſi pour uſer de brieveté qu'on ne parle point ici des hyperboles oppoſées, mais il faut remarquer, que les choſes aiſées ont été negligées dans cette Geometrie : mais qu'on n'a rien omis de ce qu'il y avoit de plus difficile dans les matieres, que l'on y a traitées.*

* *Tom. 3. Lett. 82.*

L'on a choiſi la poſition des lignes à laquelle le cercle convient, plûtôt que celle à laquelle l'ellipſe ou l'hyperbole conviendroit, parcequ'il y a une difficulté particuliere à trouver le cercle.

Je ne vois point de difficulté particuliere pour le cercle, ſi ce n'eſt qu'il faut que aam ſoit égal à pzz & que l'angle des coordonnées ſoit droit.

La difficulté pour l'hyperbole, qui eſt contenuë, Regle 12. 13. & ſuivantes, me paroît bien plus conſiderable.

Sans changer la poſition tant des lignes données, que des cherchées, l'on peut avoir un lieu à la parabole, Voyez Exemple 8. 9. à l'ellipſe, Voyez Ex. 14. à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, ainſi que M. DESCARTES le remarque dans la même Lettre, Voyez Ex. 9. 13. 16. à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, Voyez Ex. 5.

L'on cherchera la ſolution du même Problême ſur les hyperboles oppoſées. Voyez Ex. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 14. 15.

M. DESCARTES aſſure dans une autre Lettre, * que les deux conſtructions qu'il a données de l'hyperbole, ſe pourroient expliquer par une ſeule.

** *Tom. 3. Lett. 71.*

La ſeconde conſtruction commence Regle 12. Voici comment elle auroit pû ſe reduire à la premiere. Après la Regle 6. l'on pourroit ajoûter ces mots, Mais lorſqu'il y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega$ n'eſt pas plus grande que $4mp$, l'hyperbole, qui reſout le Problême eſt ſur le diametre conjugué de celui dont on ſe ſerviroit, ſi $\omega\omega$ étoit plus grande que $4mp$, par exemple ſur le diametre conjugué de celui, qui eſt ſur IL ; & ce diametre conjugué eſt à ſon parametre, comme pzz eſt à aam. En effet de ce peu de mots l'on conclud, tout ce qu'on lit depuis la Regle 12. Car le diametre conjugué eſt, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques, moyen proportionel entre le premier diametre, dont il eſt conjugué, & le parametre de ce premier diametre. Ainſi Regle 6. Lorſqu'il y a $+ mm$

& que la quantité $\omega\omega$ eſt plus grande que $4mp$; le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa}} - \frac{4mpzz}{aa}$, & Regle 10. le diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz}} - \frac{4aam^3}{pzz}$, que je nomme premier diametre : multipliez ce diametre premier par ſon parametre, le produit $\sqrt{\frac{\omega^4mm}{pp}} - \frac{8\omega\omega m^3}{p} + 16m^4$ eſt le quarré de la moyenne proportionelle, dont la racine $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$ eſt la moyenne proportionelle, qui ſera le diametre conjugué cherché ; & ſa moitié $\sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$ ſera le demi-diametre MO. Maintenant ſi vous faites $pzz : aam :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre du diametre conjugué. Et voilà ce qu'apprend la Regle 13. qui ſuppoſe ωx dans l'équation. Le produit $\sqrt{\frac{\omega^4mm}{pp}} - \frac{8\omega\omega m^3}{p} + 16m^4$ a deux racines $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, & $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm}$, je n'ai pas pris la ſeconde, parcequ'elle eſt imaginaire dans le cas, que l'on examine à preſent, & qui ſuppoſe que la quantité $\omega\omega$ n'eſt pas plus grande que $4mp$.

Pour avoir ce qui eſt contenu dans la Regle 14. qui ſuppoſe que la quantité ωx eſt nulle. Je prends Regle 8. le parametre $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, qui convient au premier diametre ; & Regle 10. je fais $pzz : aam :: \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$, ce quatriéme terme eſt le premier diametre. Je multiplie ce diametre par ſon parametre, le produit $\sqrt{16m^4}$ eſt le quarré de la moyenne proportionelle ; dont la racine $\sqrt{4mm} = 2m$ eſt la moyenne proportionelle, ou le diametre conjugué cherché ; & ſa moitié m eſt le demi-diametre MO. Maintenant ſi je fais $pzz : aam :: 2m : \frac{2aamm}{pzz}$; c'eſt le parametre du diametre conjugué.

La Regle 16. eſt évidente par la maniere dont les parametres viennent d'être trouvez.

Les Traitez des Sections coniques apprennent, que le diametre conjugué MOP eſt tiré par le centre M du premier diametre, qu'il eſt parallele aux appliquées CL de ce premier diametre, qui devoit être ſur IL ; & que mutuellement les appliquées CP au diametre conjugué MOP ſont paralleles au premier diametre IL. Ce qui explique clairement les Regles 12. 15.

La ligne MO étant le demi-diametre cherché, & M ſon centre ; le point O ſera ſon ſommet, Regle 15.

De ſorte que l'on a reduit la ſeconde conſtruction que M. DESCARTES donne, à la premiere, avec le peu, que j'avois dit, que l'on pouvoit ajoûter à la Regle 6.

REGLE XVII.

J'Ajoûte comme une regle, 1° Fig. 99. ſoit $Nn = 2a$ le diametre, A le centre, $AN = An = a$ le demi-diametre, $CB = y$ une appliquée, $NB = x$ une abſciſſe, nB ligne compoſée du diametre nN & de l'abſciſſe Fig. 99.

Fig. 99. $NB = 2a + x$. Tous les lieux à l'hyperbole ſont fondez ſur cette proprieté ; comme le diametre eſt au parametre, ce qui s'exprime ainſi, comme d eſt à p : de même le rectangle $nB \times BN = 2ax + xx$ ſous la coupée & ſous la compoſée du diametre & de la coupée, eſt à yy quarré de l'appliquée correſpondante CB. D'où l'on forme l'équation $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$. Que ſi l'on avoit pris le centre A pour l'origine des x, & que AB fût x ; nB ſeroit $BA + An$, $x + a$; NB ſeroit $AB - AN$, $x - a$; le rectangle $nB \times BN$ ſeroit $xx - aa$, & l'équation auroit été $\frac{d}{p}yy = xx - aa$.

2° Dans ces deux équations, & dans celles qui ſont reduites à ces formules ; yy, ou vv quarré de l'inconnuë, en laquelle y a été changée, eſt toûjours le quarré de l'appliquée au diametre dont il faut ſe ſervir. Les connuës quelconques $\frac{d}{p}$ qui multiplient yy ou vv expriment toûjours le rapport du diametre au parametre. L'inconnuë x ſe prend ſur le diametre : dans l'équation $\frac{d}{p}yy = 2ax + xx$, l'inconnuë x commence au ſommet N, & la connuë $2a$ eſt la valeur du diametre : dans l'équation $\frac{d}{p}yy = xx - aa$, l'inconnuë x commence au centre A, & la connuë aa eſt le quarré exprimé negativement du demi-diametre $AN = a$.

3° De ſorte que, comme le diametre, dont il faut ſe ſervir pour conſtruire une équation, doit toûjours être la ligne droite, à laquelle ſe terminent ou y, ou v inconnuë en laquelle y a été changée : il ſuit, que ſi l'autre inconnuë quelconque x n'étoit pas ſur ce diametre, il faudroit lui ſubſtituer une ligne, pour le diametre, & faire enſuite les changemens dont il eſt parlé, Regle 10. Sect. 4. Liv. 1. & tels qu'on les verra, Exemp. 5. 6. 15.

4° Lorſque l'équation ſe reduit à $\frac{d}{p}yy = xx + aa$, où le quarré du demi-diametre eſt exprimé affirmativement ; le diametre $Nn = 2a$, que j'appelle premier, ne ſert plus, mais c'eſt ſon diametre conjugué, & l'on ſe ſert de la Regle 12. & des ſuivantes, qui ſont fondées ſur ces proprietez des hyperboles. 1. Le diametre conjugué paſſe par le centre du premier diametre, & il eſt parallele aux appliquées du premier diametre ; & mutuellement les appliquées du diametre conjugué ſont paralleles au premier diametre. 2. Le diametre premier, le diametre conjugué, le parametre du premier diametre ſont en proportion continuë ; comme auſſi le diametre conjugué, le diametre premier, le parametre du diametre conjugué. Enfin, s'il eſt beſoin, l'on ſubſtituera auſſi une ligne à la place de x, & l'on fera dans l'équation les changemens, que l'on verra, Ex. 7. 10. 11. 13.

On n'a pas cité ici à la fin de chaque Regle les Exemples, où elle eſt employée, ni les exceptions qu'elle y ſouffre ; une ſimple lecture fait aſſez appercevoir l'un & l'autre.

Digitized by Google

Fig. 98.

EXEMPLE I. $y = +\sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

1. Fig. 98. Soient données de poſition les trois lignes AB, AD, EF, dont AB, EF ſont paralleles, & AD les coupe à angles droits : & qu'il faille trouver pluſieurs points, tels que C, duquel ayant tiré les droites CB, CD, CF perpendiculaires ſur les données ; ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CF, moins le quarré de EA, ſoit égal au quarré de CD, plus ce qui eſt produit par la multiplication de EA & CB.

2. Nommons la donnée $EA, m = BF$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y ; $CF = y + m$.

3. L'équation ſera $yy = mm + xx$; dont les racines ſont $y = \pm\sqrt{mm + xx}$, ou en faiſant $p = m$, $y = \pm\sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

4. La conſtruction ſe fera ainſi. Parceque la quantité ω eſt nulle, le centre eſt au point A, Regle 2. le parametre eſt $\frac{2mm}{p}$, & faiſant Regle 16. $m : p :: \frac{2mm}{p} : 2m$, ce dernier terme eſt le diametre, dont la moitié $m = AO = AE$, donne les deux ſommets O, E du diametre determiné EO, qui eſt ſur la ligne OD, & CD, eſt une de ſes ordonnées, auſſi-bien que cd parallele à CD, Regle 15. L'angle droit CDO eſt celui que les coupées & les ordonnées doivent faire. Ainſi l'on peut décrire les hyperboles oppoſées COc, CEc ; & trouver tous leurs points C, c, en ne faiſant qu'extraire la racine quarrée de $mm + \frac{p}{m}xx$, aprés avoir determiné la valeur de x. Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

L'on a $AD = CB, y$; $Ad = cB, -y$. L'hyperbole COc ſatisfait au Problême.

Le rectangle $ED \times DO$ eſt $yy - mm$. Or $p : m :: yy - mm : xx$. Regle 16. $myy - m^3 = pxx$; $y = \pm\sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$, racine que l'on trouve ſur les deux hyperboles oppoſées. Mais l'équation $yy - mm = xx$ ne ſe trouve que ſur l'hyperbole ZOz ; car ſur l'hyperbole YEy on a $yy + 2my = mm + xx$.

La racine qui eſt poſitive ſur ZOz eſt negative ſur YEy.

5. Il faut remarquer que le centre A n'eſt pas ſur IL, mais ſur AB, Regle 1. le point M ou centre eſt en A, Regle 2. le parametre eſt $\frac{2mm}{p}$, le diametre $2m$, la raiſon de l'un à l'autre comme m à p, Regle 14. 16. le diametre eſt ſur OD menée par le centre A, & parallele à CB ; AO & AE ſont demi-diametres, & les points O, E les ſommets ; CD parallele à AB eſt une ordonnée, Regle 12. 15. parceque $p = m$, l'hyperbole eſt équilatere, Art. 4. Regle 2.

EXEMPLE II. $y = \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 99. 1. Fig. 99. comme n. 1. Exemp. 1. excepté $\overline{CB \times CF} + \overline{EA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{EA \times CB}$.

2. Comme n. 2. Ex. 1.

3. Léquation eſt $yy + my + mm = xx + my$; $yy = -mm + xx$; dont les racines ſont $y = \pm\sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$, en mettant $p = m$. Equation à l'hyperbole rapportée à ſes diametres.

4. La conſtruction ſera telle. Le centre eſt en A, parceque la quantité ω eſt nulle, Regle 2. le parametre eſt $\sqrt{4mp}$, Regle 8. le diametre eſt dans AB, & CB une appliquée, Reg. 9. faiſons $p : m :: 4mp : \sqrt{\frac{4m^2}{p}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre déterminé, Regle 10. dont la moitié $AN = An$ eſt $\sqrt{\frac{m^2}{p}}$ demi-diametre; N, n les ſommets des hyperboles oppoſées; le ſommet N ſe prend en allant du centre A vers B, Regle 11. l'angle des coordonnées eſt CBA, ainſi l'on peut décrire les deux hyperboles oppoſées, comme on a dit Ex. 1. les deux hyperboles ſatisfont au Problême ſur les arcs NX, nx.

Dém. Les rectangles $Nb \times nb$, $nB \times NB$ ſont $xx - \frac{m^2}{p}$, d'où l'on forme l'équation $myy = pxx - m^2$, $y = \pm\sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Maintenant aux points C, c pris ſur les arcs infinis NX, nx on a l'équation de n. 3. ſur les arcs finis NZ, nz l'équation $yy = mm - xx$ au cercle. Sur les arcs ZY, zy l'équation $y + m = x$ à la ligne droite. Donc, &c.

5. Il faut remarquer que le centre A n'eſt pas ſur IL, mais ſur AB, Regle 1. 2. le parametre eſt $\sqrt{4mp}$, parceque la quantité ωx eſt nulle, Regle 8. le diametre eſt ſur la ligne AB, & CB eſt une de ſes appliquées, Regle 9. faiſons $p : m : \sqrt{4mp} : \sqrt{\frac{4m^2}{p}}$, ce quatriéme terme eſt le diametre déterminé, Regle 10. dont les moitiez AN, An donnent les ſommets N, n des deux hyperboles oppoſées; le point N ſe prend du côté, où le point B ſe trouve : mais on auroit pû auſſi le mettre de l'autre côté, puiſque les deux hyperboles ſatisfont également, Regle 11. l'hyperbole eſt équilatere, parceque $p = m$.

6. L'équation $yy = xx - mm$ eſt un lieu à l'hyperbole équilatere, qui peut ſe conſtruire, comme dans les lieux Geometriques, en prenant $AN = An = m$; & par la nature de cette hyperbole, l'on a $nB \times BN = \overline{CB}^2$, $xx - mm = yy$.

EXEMPLE III. $y = -m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 100. 1. Comme n. 1. Exemple 1. excepté que l'on demande, que ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CF, ſoit égal au quarré de CD, Figure 100.

2. Comme

2. Comme n. 2. Ex. 2. excepté $AE = 2m$; & $CF = y + 2m$.

3. L'équation eſt $yy + 2my = xx$; dont les deux racines ſont $y = -m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$, en poſant $p = m$. Equation à l'hyperbole.

4. Parcequ'il y a $-m$, au deſſus de AB, coupez $BK = m$; par le point K menez l'infinie IK parallele à AB ; IA eſt m. Parceque la quantité ω eſt nulle, le centre eſt en I, Reg. 2. parcequ'il y a $+mm$ & que la quantité ωx eſt nulle, le parametre eſt $\frac{2mm}{p}$; & faiſant $m : p :: \frac{2mm}{p} : 2m$, qui eſt le diametre determiné EA, que l'on mene par le centre I parallele à CB ; & CD parallele à AB eſt une appliquée ; $IA = IE = m$, donnent les ſommets A, E, Regle 12. 14. 15. l'angle CDI eſt celui que les coordonnées doivent faire, ainſi l'on peut décrire les deux hyperboles oppoſées CAc, cEc, comme Ex. 1. Elles ſont le lieu cherché. L'on a $AD = BC$, y ; $Ad = cB$, $-y$.

Dém. Les rectangles $ED \times DA$, $Ed \times Ad$ ſont $yy + 2my$; d'où l'on forme l'équation $yy + 2my = \frac{p}{m}xx$, dont les racines ſont $y = -m \pm \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$. Cette équation ſe trouve ſur les deux hyperboles oppoſées. La racine vraye ſe prend ſur l'hyperbole CAc. & la fauſſe ſur l'hyperbole cEc.

5. L'on fera évanoüir le ſecond terme de l'équation $yy + 2my = xx$, en prenant $y + m = v$, $y = v - m$; & la ſubſtitution donne $vv - mm = xx$, $vv = xx + mm$, à l'hyperbole équilatere. Les Traitez de lieux Geometriques apprennent que lorſque mm a $+$, étant joint au quarré de x, qui devroit être l'abſciſſe, alors x eſt l'appliquée, & v l'abſciſſe ; ainſi le diametre doit être parallele à CB, y, qui fait partie de v ; de plus ce diametre doit être conjugué de celui qui auroit ſervi, ſi l'on avoit trouvé $xx - mm$. Mais comme l'hyperbole eſt équilatere, le diametre conjugué eſt le même, que le premier diametre, $2m$. Il faut conſtruire l'équation $xx = vv - mm$, en regardant x comme l'ordonnée, v comme l'abſciſſe qui part du centre.

EXEMPLE IV. $y = \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 101. Comme n. 1. Ex. 1. excepté que l'on demande $\overline{CD \times CF} - \overline{CD \times CB} = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2$. FIG. 101.

2. Comme n. 2. Ex. 1. excepté $AE = \omega$; $CF = y + \omega$.

3. L'équation ſera $xy + \omega x - xy = yy - xx$; $yy = \omega x + xx$; dont les racines ſont $y = \pm \sqrt{\omega x + xx}$, ou $y = \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$, en faiſant $p = m$. L'équation eſt à l'hyperbole équilatere, qui ſe conſtruira de cette ſorte.

4. Le centre M eſt dans la ligne AB, & ſe trouve en prenant $AM = \frac{\omega m}{2p}$; Regle 1. parcequ'il y a $+\omega x$, le point M ſe prend du côté où B n'eſt

pas, Regle 4. parceque la quantité mm eſt nulle, le parametre eſt ω; le diametre eſt dans AM, Regle 9. ſi l'on fait $p : m :: \omega : \frac{\omega m}{p}$, ce quatriéme terme eſt le diametre nA Regle 10. dont la moitié $MA = Mn$, $\frac{\omega m}{2p}$ eſt égale à AM, ainſi les ſommets ſont A, n; Regle 11. L'angle CBA des ordonnées avec les coupées eſt droit: l'on peut donc décrire les deux hyperboles oppoſées.

Dém. Les rectangles $nB \times AB$, $Ab \times bn$ ſont $xx + \frac{\omega m x}{p}$ d'où l'on forme l'équation $yy = \omega x + \frac{p}{m} xx$ dont les racines ſont $y = \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$.

Maintenant 1° ſur les arcs infinis AZ de l'hyperbole CAc, yx de l'hyperbole cNc on a l'équation de n. 3. $yy = \omega x + xx$. 2° Sur les arcs infinis zX de l'hyperbole CAc, nY de l'hyperbole cNc on a l'équation $yy = -\omega x + xx$. 3° Sur l'arc fini Az on a l'équation $yy - 2xy = \omega x + xx$. 4° Sur l'arc fini ny on a l'équation $yy + 2xy = -\omega x + xx$.

EXEMPLE V. $y = \frac{n}{z} x \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$.

Fig. 102. 1. FIg. 102. comme n. 1. Ex. 1. excepté que l'on demande, que CD multipliée par CF, ſoit égal au quarré de CB.

2. Comme n. 2. Ex. 1. excepté $AE = \omega$; $CF = y + \omega$.

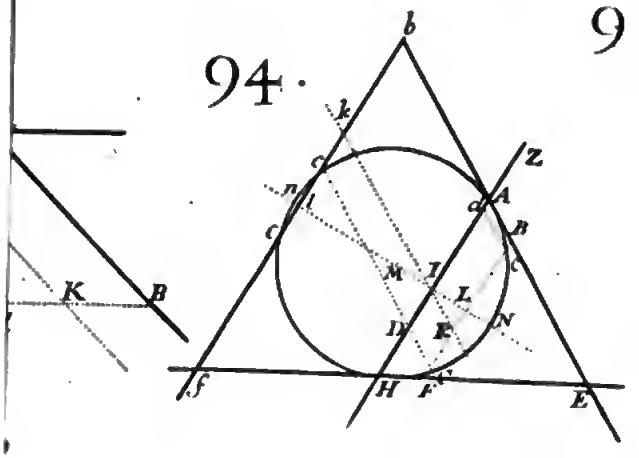
3. $CD \times CF = \overline{CB}^2$ s'exprime ainſi $xy + \omega x = yy$; dont les racines ſont $y = \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\omega x + \frac{1}{4} xx}$; ou $y = \frac{n}{z} x \pm \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$, en faiſant $z = 1 = \omega$; $n \frac{1}{2}$; $p = 1$; $m = 4$. équation à l'hyperbole, & par rapport à ſes diametres, & par rapport à ſes aſymptotes. On la conſtruira par rapport à ſes aſymptotes. Art. 8. Exemp. 3. Ici on va la conſtruire par rapport à ſes diametres.

4. Pour la conſtruction, parcequ'il y a $+\frac{n}{z} x = \frac{1}{2} x$, je coupe $BL = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} x$; & je mets le point L entre B & C; par les points L, A je tire l'infinie AL. Dans le triangle ABL rectangle en B, $AL = x\sqrt{\frac{1}{4}}$, ou $\frac{ax}{z}$, en nommant a, $\sqrt{\frac{1}{4}}$. Enſuite ſur AL je prends $AM = \frac{a \omega m}{2pz}$, & le point M eſt le centre des hyperboles, Regle 1. parcequ'il y a $+\omega x$, le point M tombe du côté où L n'eſt pas, Regle 4. parceque mm eſt nul, le parametre eſt $\frac{az}{a}$, Regle 7. le diametre eſt ſur AM, & CL une de ſes appliquées, Regle 9. je fais $pzz : aam :: \frac{az}{a} : \frac{amx}{pz}$, qui eſt le diametre nA double de AM, Reg. 10. ſa moitié donc $AM = Mn$ eſt le demi-diametre, les ſommets ſont A, n; le ſommet A ſe prend du côté, où eſt L, par rapport au centre M, Reg. 11. l'angle CLA eſt celui des coordonnées. L'on peut donc décrire les deux hyperboles CAc, cnc. Elles ſatisfont au Problême.

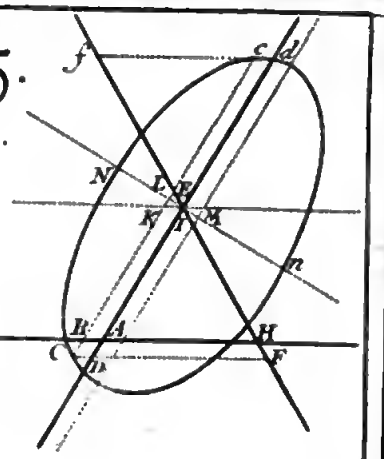
5. Dém. Le rectangle $nL \times AL$, eſt $\frac{aam}{pz} \frac{\omega x}{z} + \frac{aaxx}{zz}$ d'où par la nature de l'hyperbole on aura $CL = \sqrt{\omega x + \frac{p}{m} xx}$.

La racine negative ſe trouve ſur les arcs ny, Az; la racine poſitive ſur les arcs AC, nY & ſur tous la même équation $xy + \omega x = yy$.

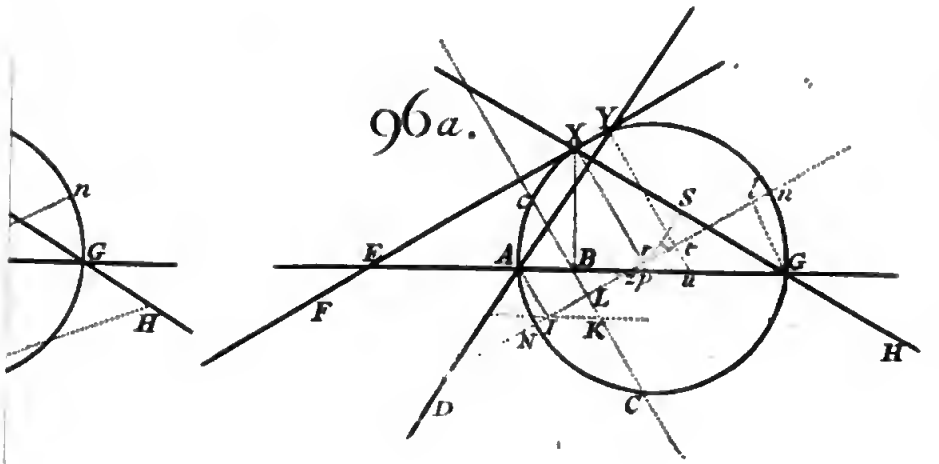
94.



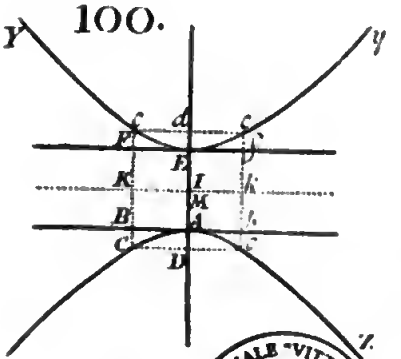
95.



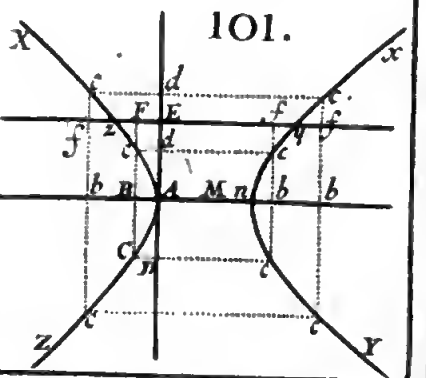
96a.



100.



101.



Daudet

REALE BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Le centre M eſt ſur la ligne FE, car dans les triangles équiangles MEA, ABL, $AB, x :: BL, \frac{1}{2}x :: ME : EA$, $\omega = 1$. Donc $ME = 2$, & $AM = \sqrt{5} = \frac{a\omega m}{2pz}$.

Parceque $aam = 5$ eſt plus grand que pzz, les hyperboles ne ſont pas équilateres.

6. Je fais évanoüir les ſeconds termes, en prenant, $y = v + \frac{1}{2}x$, & par la ſubſtitution l'on trouve $vv - \frac{1}{4}xx = \omega x$, $xx + \frac{\omega m x}{p} = \frac{m}{p}vv$; & prenant encore $x + \frac{\omega m}{2p} = f$, $x = f - \frac{\omega m}{2p}$, la ſubſtitution fournira encore $ff - \frac{a\omega mm}{4pp} = \frac{m}{p}vv$. A preſent je conſidere que Reg. 17. dans cette ſorte de reduites vv eſt le quarré de l'appliquée, & que $CL = CB - BL$, $y - \frac{1}{2}x = v$ eſt cette appliquée, d'où il ſuit que AL, avec qui CL fait un angle, eſt le diametre. Enſuite je coupe $AM = \frac{\omega m}{2p} = 2$, & j'ai $MB = MA + AB$, $\frac{\omega m}{2p} + x = f$; mais dans cette ſorte de reduite ff eſt le quarré de l'abſciſſe, & l'abſciſſe doit être ſur le diametre, & le diametre ne peut pas être ſur AB, puiſqu'il eſt ſur AL. C'eſt pourquoi pour AB, x je mets AL, $\frac{ax}{z}$. Et je change $x + \frac{\omega m}{2p} = f$, en $\frac{ax}{z} + \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{af}{z}$, ce qui ſe fait en multipliant tous les termes par $\frac{a}{z}$, afin de conſerver l'égalité. Après cela dans la reduite $\frac{m}{p}vv = ff - \frac{a\omega mm}{4pp}$, pour ff je mets $\frac{aaff}{zz}$, & je multiplie tous les autres par $\frac{aa}{zz}$ pour que l'égalité ſubſiſte, & la derniere reduite eſt $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aaff}{zz} - \frac{aa\omega mm}{4ppzz}$, qui me fait connoître 1° dans le terme $\frac{aam}{pzz}$, que le rapport du diametre au parametre eſt celui de aam à pzz, car la quantité connuë qui multiplie vv exprime cette raiſon. 2° Dans le terme $\frac{aa\omega mm}{4ppzz}$, qui eſt le quarré du demi-diametre, que ce demi-diametre eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$; le diametre $\frac{a\omega m}{pz}$, en faiſant $aam : pzz :: \frac{a\omega m}{pz} : \frac{\omega z}{a}$, que ce quatriéme terme eſt le parametre. 3° Le ſecond membre $\frac{aaff}{zz} - \frac{aa\omega mm}{4ppzz}$ eſt le rectangle ſous $\frac{af}{z} + \frac{a\omega m}{2pz}$ & $\frac{af}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$, étant le centre M l'origine des $\frac{af}{z}$, qui ſeront par conſequent les ML. Mais $\frac{af}{z} = \frac{ax}{z} + \frac{a\omega m}{2pz}$: donc étant $AL = \frac{ax}{z}$, AM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$, & le point M doit ſe prendre du côté où L n'eſt pas.

EXEMPLE VI. $y = -\frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

1. SOient Fig. 85. AB, AD, EF, GH, quatre lignes droites données de poſition, & qui font autour du point A huit angles de 45. degrez chacun. Il faut trouver un point c dans l'angle BAF, duquel ayant tiré d'autres lignes cB, cd, cF, cH, en ſorte que les angles cBA, cdA ſoient droits; les angles cFA, cHA de 45. degrez; & que ce qui eſt produit de la multiplication de cB par cd ſoit égal à ce qui eſt produit de la multiplication de cF par cH, moins le quarré d'une ligne donnée $z = 1 = m$. FIG. 85.

2. Nommez AB, $x = cd$; cB, y; $HB = BF = AB$, x; $cF = x - y$; $cH = y + x$.

FIG. 85. 3. L'équation ſera $yy + xy = -mm + xx$, dont les racines ſont $y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-mm + \frac{1}{4}xx}$, ou $y - \frac{n}{2}x \pm \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$; en faiſant $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$, à l'hyperbole.

4. Je coupe $BL = \frac{n}{2}x = \frac{1}{2}x$, je fais tomber le point B entre L & c: par les points L, A je tire l'infinie $AL = x\sqrt{\frac{1}{4}}$ ou $\frac{a}{2}x$. Après cela parcequ'il y a $-mm$, & que la quantité ωx eſt nulle, le parametre eſt $\sqrt{\frac{+mpzz}{aa}}$, Regle 8. & faiſant $pzz :: aam :: \sqrt{\frac{+pmzz}{aa}} : \sqrt{\frac{+aam^2}{pzz}}$, l'on a le diametre Nn, Regle 10. dont les moitiez MN, Mn donnent les ſommets N, n, le point N étant pris du côté de L, Regle 11. car le diametre eſt ſur AL, & cL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. & le centre eſt le point A, parceque la quantité ω eſt nulle, Regle 2. l'angle cLA eſt celui que les ordonnées doivent faire avec les appliquées.

5. Dém. Dans les deux hyperboles oppoſées, les rectangles $nL \times NL$, $NL \times ln$ ſont $\frac{aaxx}{zz} - \frac{aam^2}{pzz}$ d'où par la nature de l'hyperbole on tire la valeur des appliquées cL, $cl = \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

Au point c dans l'angle BAF on a la racine vraye, & l'équation de n. 3. dans l'angle HAP on a la racine fauſſe & l'équation $yy + xy = mm + xx$ differente de n. 3. dans l'angle fAb on a la racine fauſſe, mais l'équation de n. 3. dans l'angle DAh on a la racine vraye, mais l'équation $yy + xy = mm + xx$. Donc, &c. Parceque $pzz = aam$, l'hyperbole eſt équilatere.

6. L'on fait évanoüir les ſeconds termes de l'équation $yy + xy = xx - mm$.

Si l'on fait $v - \frac{1}{2}x = y$, la ſubſtitution donnera $vv = \frac{1}{4}xx - mm$, ou $vv = \frac{p}{m}xx - mm$. Je commence à conſtruire cette premiere reduite, en prenant $BL = \frac{1}{2}x$; & j'ai $cL = cB + BL$, $y + \frac{1}{2}x = v$; qui doit être Reg. 17. l'appliquée de l'équation, & qui eſt terminée à la ligne LA que je tire par les points L, A, d'où je conclus, que AB, x ne pouvant pas être l'abſciſſe, il faut prendre à ſa place, AL, $\frac{ax}{z}$ & la mettre dans l'équation $vv = \frac{p}{m}xx - mm$, c'eſt-à-dire, le quarré $\frac{aaxx}{zz}$ pour xx, & afin que l'égalité ſubſiſte, multiplier tous les autres termes de la même équation par $\frac{aa}{zz}$, ce qui produit $\frac{aa}{zz}vv = \frac{aapxx}{mzz} - \frac{aamm}{zz}$, en multipliant par m & diviſant par p, $\frac{aam}{pzz}vv = -\frac{aam^2}{pzz} + \frac{aaxx}{zz}$.

Par cette équation je connois 1° que la raiſon du diametre au parametre eſt celle de aam à pzz. 2° Que le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aam^2}{pzz}}$; parceque le terme $\frac{aam^2}{pzz}$ eſt ici le quarré de ce demi-diametre; ainſi le diametre eſt $\sqrt{\frac{4aam^2}{pzz}}$; & faiſant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aam^2}{pzz}} : \sqrt{\frac{+mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre. 3° Le ſecond membre $\frac{aaxx}{zz} - \frac{aam^2}{pzz}$ eſt le rectangle ſous $\frac{ax}{z} + \sqrt{\frac{aam^2}{pzz}}$, & $\frac{ax}{z} - \sqrt{\frac{aam^2}{pzz}}$, les $AL = \frac{ax}{z}$ ayant leur commencement au centre: donc le point A eſt ce centre. Et faiſant AN

$= An = \sqrt{\frac{a a m^4}{p z z}}$, vous avez les ſommets N, n. Ce qui montre, comment Mr DESCARTES a trouvé les Regles, qu'il nous a données.

EXEMPLE VII. $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x - \frac{p}{m} xx}$.

1. SOient Fig. 103. données de poſition les quatre lignes AB, AD, EF, GH, qui ſont un parallelogramme. Il faut trouver au dedans de ce parallelogramme une infinité de points C, deſquels ayant tiré d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH, ſur les données; & dont CD, CH, ſoient paralleles à AB, EF; & CB, CF à AD, GH; ce qui eſt produit par la multiplication de CB, CF, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD, CH. FIG. 103.

2. Nommez les connuës $AG = ER = DH = dh = m = \omega = 1$; $AR = GE = BF = bf$, $2m$; les inconnuës $AB = CD$, x; CB, y; $CF = 2m - y$; $CH = \omega - x$.

3. L'equation ſera $yy - 2my = -\omega x + xx$, dont les racines ſont $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + xx}$, ou $y = m \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m} xx}$, en faiſant $p = m$. Equation à l'hyperbole.

4. Entre B & C coupez $BK = m$; prenez IK parallele à AB. Faites $IM = \frac{\omega m}{2p}$ pour avoir le centre M Regle 1. qui ſe prend de I vers K à cauſe de $-\omega x$, Regle 3. I eſt le milieu de AR; M eſt le milieu de Ii. Enſuite parcequ'il y a $+mm$, & que la quantité $\omega\omega = 1$ n'eſt pas plus grande que $4mp = 4$; l'on doit Regle 12. tirer par le centre M la ligne MOP parallele à CK, & CP parallele à KM; parceque ωx ſe trouve dans l'équation; vous faites $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$ qui eſt le demi-diametre déterminé Mn; & le diametre déterminé. nO eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$; & le parametre ſera $\sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^4}{p^3}}$, Regle 13. la raiſon du diametre au parametre eſt celle de p à m; car ces quatre termes ſont proportionels, $p : m :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^4}{p^3}}$, Regle 16. le diametre déterminé eſt ſur OP, les points O, n les ſommets, CP une ordonnée, Regle 15. l'angle CPO eſt l'angle des coordonnées; ainſi l'on peut décrire les deux hyperboles, comme il a été dit, Ex. 1. n. 4. qui ſeront le lieu cherché.

5. Dém. 1° Pour l'hyperbole EOR, $\overline{CP}^2$ eſt $\frac{\omega\omega}{4p}\frac{mm}{p} - \frac{\omega mx}{p} + xx$; le rectangle $nP \times PO$, $yy - 2my + \frac{\omega\omega m}{4p}$, d'où par la nature de l'hyperbole on tire l'équation $yy - 2my + mm = mm - \omega x + \frac{p}{m} xx$; $y = m + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m} xx} = CB$.

On peut encore trouver la valeur de y par cette Analogie $m : p :: \overline{CP}^2 : nP \times OP$. De plus 6. 2. Eucl. $nP \times OP + \overline{OM}^2 = \overline{MP}^2$; ce qui donne $\overline{MP}^2 = -\omega x + \frac{p}{m} xx + mm$, & $y = m + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m} xx}$. Ces

FIG. 103. deux manieres de trouver la racine positive de y peuvent s'appliquer à tous les points de l'hyperbole EOR.

2° Pour l'hyperbole opposée AnG, la valeur de $\overline{cp}^2$ est la même que dans l'hyperbole EOR. D'un autre côté vous trouverez, soit que cb, y ait une valeur positive, soit qu'elle en ait une negative, Mp, $m - y$; $np = Mp - Mn$, $m - y - \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$; $Op = Mp + MO$; $m - y + \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$; & le rectangle $np \times pO$, $yy - 2my + \frac{\omega\omega m}{4p}$, comme dans l'hyperbole EOR. Tout le reste est entierement le même, excepté $y = m - \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$. Il est aisé de se convaincre soi-même que sur tous les arcs des deux hyperboles opposées on a l'équation $yy - 2my = xx - \omega x$ de n. 3. toutes les lignes necessaires pour cela sont tracées sur la Fig. 103.

6. Vous ferez évanoüir les seconds termes de l'équation $yy - 2my = xx - \omega x$, si vous prenez $y = v + m$; la substitution donnera $vv - mm$; $\frac{m}{p}vv - \frac{m^3}{p} = xx - \frac{\omega mx}{p}$. Faites encore, $x = f + \frac{\omega m}{2p}$; la substitution donnera $\frac{m}{p}vv = ff + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = ff + \frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$. Si la quantité $\omega\omega$ étoit plus grande que $4mp$, le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ seroit negatif, & alors l'équation $\frac{m}{p}vv = ff + \frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ se construiroit, comme $\frac{d}{p}yy = xx - aa$ formule ordinaire à l'hyperbole par ses diametres; c'est-à-dire, que le diametre se prendroit sur IK à laquelle se terminent les ck ordonnées $= v = cb - bk$, $y - m$. Mais ici $\omega\omega$, 1 n'est pas plus grande que $4mp$, 4; ainsi le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ est positif, & égal à $\frac{3}{4}$. Il faut donc REGLE 17. construire les hyperboles conjuguées à celles, dont on se seroit servi.

Car puisque $\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$ est positif dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ff + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, je la change en celle-ci $\frac{p}{m}ff = vv - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$, en multipliant tout par p & en divisant tout par m: & cette équation contient le terme connu $-mm + \frac{\omega\omega m}{4p} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ negatif, & elle peut se construire sous cette forme. De plus $\frac{p}{m}$, qui marque le rapport du diametre à son parametre, apprend que l'équation doit se construire dans les hyperboles conjuguées, parceque $\frac{p}{m}$ exprime le rapport du diametre conjugué à son parametre. Ce qui se démontre ainsi.

Les Traitez des Sections coniques apprennent, que le diametre conjugué est moyen proportionel entre le premier diametre & le parametre de ce premier diametre: donc aussi le moyen proportionel entre les termes, qui expriment la raison du diametre à son parametre, exprimera la raison de ce moyen proportionel avec les extrêmes. Comme le diametre étant 4, son parametre 16; le moyen proportionel 8 est le diametre conjugué. De même la raison du diametre au parametre étant de 1 à 4, le moyen propor-

tionel 2 exprimera la raiſon du diametre conjugué : car 4 : 8 : : 8 : 16. & 1 : 2 : 2 : 4. FIG. 103.

Cela étant ſuppoſé, dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ff + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, la raiſon du diametre premier à ſon parametre eſt comme m à p ; & ſuppoſant que la raiſon du diametre conjugué s'exprime par q ; on aura $m : q : : q : p = \frac{qq}{m}$. Mais auſſi le diametre conjugué eſt au premier diametre : comme le premier diametre eſt au parametre ſecond ; & leur raiſon s'exprimera par $q : m : : m : \frac{mm}{q}$ le parametre. Enfin le diametre conjugué q eſt à ſon parametre $\frac{mm}{q}$: comme $p = \frac{qq}{m}$ eſt à m. Donc le diametre conjugué eſt à ſon parametre comme p à m, ce qui eſt exprimé par $\frac{p}{m}$ dans la ſeconde équation $\frac{p}{m}ff = vv - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$.

Dès que vous avez apperçu, que l'équation doit ſe conſtruire avec les hyperboles conjuguées, vous commencez la conſtruction, qu'il vous faudra abandonner enſuite, parcequ'elle doit vous faire connoître le premier diametre, ſes appliquées & le centre. Ainſi ſur CB vous coupez d'abord $BK = m$, & par le point K vous menez l'infinie IK paralelle à AB, & vous avez $CK = CB - BK$, $= y - m = v$; & parceque $CK = v$ eſt l'appliquée de la reduite, vous connoiſſez que le premier diametre eſt ſur IK, à laquelle les ck, v ſont terminées. Enſuite vous prenez $IM = \frac{\omega m}{2p}$, afin d'avoir $MK = IM - IK$, $\frac{\omega m}{2p} - x$, ou $Mk = Ik - IM$, $x - \frac{\omega m}{2p} = f$, qui eſt la coupée de la reduite, & comme cette coupée a ſon origine au centre du diametre, vous concluez, que le centre eſt en M.

Maintenant on ſçait, que ce centre eſt commun aux hyperboles conjuguées, l'on ſçait, que le diametre conjugué doit paſſer par ce centre & être parallele aux ordonnées CK des premieres hyperboles ; ainſi vous menerez l'infinie MOP parallele à CK, & le diametre conjugué ſera ſur MOP ; l'on ſçait que les ordonnées à ce diametre conjugué doivent être paralleles au premier diametre IM, & qu'elles doivent partir des points C, c ; ainſi vous tirerez l'appliquée CP parallele à IM.

Après cela pour avoir les ſommets O, n des hyperboles conjuguées il reſte à connoître les demi-diametres MO, Mn. Ce que vous ferez ainſi, en ſuppoſant ce que nous avons déja dit, que le diametre conjugué eſt moyen proportionel entre le diametre premier & ſon parametre.

Dans l'équation $\frac{m}{p}vv = ff + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, la quantité $\frac{m}{p}$ montre que la raiſon du diametre au parametre eſt comme m à p ; la quantité $\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$ eſt le quarré du demi-diametre, lequel eſt par conſequent $\sqrt{\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}}$, & le diametre $2\sqrt{\frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}} = \sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}}$.

Faites $m : p : : \sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}} : \sqrt{4mp - \omega\omega}$, qui eſt ſon parametre.

Multipliez le diametre $\sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}}$ par ſon parametre $\sqrt{4mp - \omega\omega}$,

le produit eſt $\sqrt{16m^4 - \frac{4\omega\omega m^3}{p} + \frac{\omega^4 mm}{pp}}$ dont les racines $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm}$, $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, ſont moyennes proportionelles entre le premier diametre & ſon parametre ; mais étant $\omega\omega$ moindre que $4mp$ la racine $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm}$ ou $\sqrt{\frac{\omega\omega m - 4mmp}{p}}$ eſt imaginaire ; ainſi vous prendrez $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$ ou $\sqrt{\frac{4mmp - \omega\omega m}{p}}$ pour le diametre conjugué cherché, tel que le donne la Regle 13. De plus, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques, le parametre du diametre conjugué eſt auſſi troiſiéme proportionel de ce diametre & du premier diametre : ainſi quarrez le ſecond terme de la proportion qui eſt le premier diametre $\sqrt{\frac{4m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{pp}}$, vous ferez $\sqrt{\frac{16m^6}{pp} - \frac{8\omega\omega m^5}{p^3} + \frac{\omega^4 m^4}{p^4}}$; diviſez ce quarré par le premier terme qui eſt le diametre conjugué $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, le quotient $\sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^3}{p^3}}$ ſera le parametre cherché du diametre conjugué ; ce parametre eſt le même que celui, que vous avez pris n. 4. en ſuivant la Regle 13. & la raiſon du diametre conjugué à ſon parametre eſt comme p à m, car ces quatre termes ſont proportionels $p : m :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4m^4}{pp} - \frac{\omega\omega m^3}{p^3}}$. Après que vous aurez connu toutes ces choſes, vous décrirez les hyperboles oppoſées conjuguées EOR, AnG, & la démonſtration ſera celle de n. 4. Dans tout le n. 6. vous voyez comment M. DESCARTES a trouvé les Regles qu'il a données.

7. Vous pouvez connoître, que les deux hyperboles oppoſées EOR, AGn paſſent par les quatre points d'interſection A, R, E, G ; par la methode donnée, Art. 6. Ex. 13.

On demande ici $CB \times CF = CD \times CH$. Au point A, vous avez $cB = o$, $cd = o$; au point R, $CD = o$, $CF = o$; au point E, $cf = o$, $ch = o$; au point G, $cb = o$, $ch = o$: de ſorte qu'à ces quatre points $CB \times CF = CD \times CH$ ſe reduit a $o = o$.

EXEMPLE VIII. $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 104. Comme Ex. 1. n. 1. excepté $CB \times CD = \overline{CF}^2$.

FIG. 104.

2. Comme Ex. 1. n. 2.

3. L'équation ſera $xy = yy + 2my + mm$ dont les racines ſont $y = -m + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-mx + \frac{1}{4}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-\omega x + \frac{p}{m}xx}$. $z = m = \omega = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$.

4. Sur CB nous coupons $BK = m$, au deſſus de AB, & le point K tombera ſur la ligne EF, parceque $BK = AE$, m. Donc la ligne EF tiendra la place de la ligne IK, qu'il faudroit tirer par le point K parallele à AB.

Enſuite nous prenons $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}IK$; & nous mettons le point L entre K & C, $IL = x\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}x$. Main-

Maintenant nous faiſons $IM = \frac{a a m}{2 p z}$, Regle 1. & nous faiſons tomber le point M en allant de I vers L, parcequ'il y a $-\omega x$, Reg. 3. d'un autre côté, la quantité mm étant nulle, le parametre eſt $\frac{n z}{n}$, Regle 7. le diametre eſt dans IM, & CL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. Après cela faiſons $pzz : aam :: \frac{nz}{n} : \frac{a a m}{p z}$: ce quatriéme terme eſt IN le diametre, Regl. 10. & parceque ſa moitié $\frac{a a m}{2 p z}$ eſt égal à IM, il ſuit que le point I eſt le ſommet d'une des hyperboles ; nous prendrons MN égale auſſi $\frac{a a m}{2 p z}$ de l'autre côté de M, c'eſt-à-dire, en allant vers L, pour avoir N ſommet de l'hyperbole cherchée, Reg. 11. Enfin nous connoiſſons l'angle CLN que les coupées & les ordonnées doivent faire : ainſi nous décrirons les deux hyperboles, qui ſont le lieu demandé.

Dém. Les rectangles $IL \times LN$, $Nl \times Il$ ſont $\frac{a a x x}{z z} - \frac{a a \omega m x}{p z z}$ d'où par la proprieté de l'hyperbole on trouve $CL = \sqrt{-\omega x + \frac{p}{m} x x}$.

On voit à l'œil que la racine vraye ſe trouve ſur les arcs NC, EZ, & la fauſſe ſur les arcs Nc, Ez, & que ſur tous ces arcs on a l'équation de n. 3.

EXEMPLE IX. $y = \frac{bx + xx}{2c - b - 3x}$ ou $x = -m - \frac{n}{z} y + \sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m} yy}$.

1. FIg. 105. qui eſt celle de M. DESCARTES. Soient données de poſition les quatre lignes droites AB, AD, EF, GH, qui ſe coupent, comme on voit dans la Figure. Il faut trouver le point C, duquel on puiſſe tirer d'autres lignes droites CB, CD, CF, CH ſur les données, de ſorte l'angle CBA ſoit de 120. degrez, l'angle CDA, de 60. l'angle CFE de 90. l'angle CHG de 30. ou, ce qui eſt le même, que ces quatre lignes ſoient ſur une ſeule CB prolongée. FIG. 105.

Il faut encore que ce qui eſt produit par la multiplication de CB & CH, ſoit égal à ce qui eſt produit par la multiplication de CD, CF.

2. Soit EA, $b = 3$; AG, $c = 5$; CB, y ; AB, x ; CD, $y + x$; $BF = \frac{b + x}{2}$ à cauſe du ſinus de 90. degrez double du ſinus de 30. $CF = \frac{2y + b + x}{2}$, $CB + BH = CB + BG = y + c - x$.

3. L'équation ſera $y = \frac{bx + xx}{2c - b - 3x}$ à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, & par rapport à ſes aſymptotes, Art. 4. Reg. 2.

On conſtruira cette équation par rapport à ſes aſymptotes, Art. 8. Ex. 5.

A preſent on va la conſtruire par rapport à ſes diametres, en ſuivant les Regles de M. DESCARTES, & operant à l'égard de x, comme il ordonne d'operer à l'égard de y. Car ici l'on détermine y & l'on cherche x.

Les termes ſe rangeront ainſi $xx + bx + 3yx = 2cy - by$ dont la racine eſt $x = -m - \frac{n}{z} y + \sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m} yy}$ en faiſant $z = 1$; $n = \frac{5}{2}$; $m = \frac{3}{2}$, $\omega = \frac{3}{2} b + 2c = \frac{9}{2} + 10 = \frac{29}{2}$, $p = \frac{75}{8}$.

FIG. 105. 4. Parcequ'il y a $-m$, ſur BA, l'on ajoûte $AI = m$ au deſſus de A; par le point I l'on mene KI parallele & égale à CB, y; par les points C, K l'on mene encore l'infinie CK parallele à AB; ſur CK l'on prend $KL = \frac{n}{z}y = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}CB$, & l'on fait que le point K ſoit entre L & C, parcequ'il y a $-\frac{n}{z}y$, Art. 2. par les points L, I, l'on tire l'infinie IL. Pour connoître IL, abbaiſſez IV perpendiculaire ſur LK, $VK = \frac{1}{2}IK$ à cauſe de l'angle en I de 30. degrez; donc $\overline{IV}^2 = \frac{1}{4}yy$. $LV = 2y$; donc $IL = y\sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{a}{z}y$ en faiſant $\sqrt{\frac{19}{4}} = a$.

A preſent l'on prend $IM = \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{20}{19}\sqrt{19}$. pour avoir le centre M, Regle 1. le point M tombe ſur la partie de la ligne IL, où le point L n'eſt pas, à cauſe qu'il y a $+\omega x$, Reg. 4. & parceque $\omega\omega = \frac{841}{4}$ eſt plus grande que $4mp = \frac{225}{4}$, y ayant $+mm$; le parametre eſt $\sqrt{\frac{a\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, Reg. 6. le diametre eſt dans la ligne IM, & CL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. la raiſon du parametre au diametre eſt celle de pzz, à aam, Regle 10. ainſi ce diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz}} - \frac{4aam^3}{pzz}$; dont la moitié $MN = \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}} - \frac{aam^3}{pzz}$ étant pris du côté où eſt L, donnera le ſommet N d'une hyperbole; & $Mn = MN$ donnera tout le diametre Nn, Reg. 11. L'on pourra donc décrire l'hyperbole CN, qui reſout le Problême.

Dém. Le rectangle $nL \times LN$ eſt $\frac{aa\omega my}{pzz} + \frac{aayy}{zz} + \frac{aam^2}{pzz}$, d'où par la proprieté de l'hyperbole on tire la valeur de l'appliquée CL, qui ſera $\sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m}yy}$.

Maintenant menez AZ parallele à CB, vous aurez $CZ = AB$, x, $KZ = AI$, m, & CZ, $x = \sqrt{mm + \omega y + \frac{p}{m}yy} - \frac{n}{z}y - m$, racine de n. 3. Au point C, où le calcul a été fait. Ainſi l'hyperbole NC eſt le lieu cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Il faut remarquer, que quoique M. DESCARTES n'ait pas parlé du cas, où y n'a point de ſigne radical dans ſa valeur, & quoique les Regles ſemblent n'être que pour la conſtruction de y; cependant elles ont ſervi ici à conſtruire x avec la même facilité & la même juſteſſe; car on a conſtruit $-m - \frac{n}{z}y$ de la même maniere ſur AB, ou ſa parallele CK, qu'on auroit fait ſur CB, Art. 2. L'on a trouvé le centre M ſur IL en coupant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. Le point M a été mis du côté où L n'eſt pas, à cauſe qu'il y a $+\omega x$, Regle 4. Le parametre a été $\sqrt{\frac{a\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, parcequ'il y a $+mm$ & que la quantité $\omega\omega$ eſt plus grande que $4mp$, Regle 6. le diametre s'eſt trouvé dans IL & CL a été une de ſes appliquées, Regle 9. La raiſon du parametre au diametre a été priſe comme pzz à aam, Reg. 10. La moitié MN a été priſe du côté, où eſt L & a donné N le ſommet, Regle 11. Enfin parceque $aam = \frac{17}{8}$ n'eſt pas égal à $pzz = \frac{75}{16}$. L'hyperbole n'eſt pas équilatere.

6. On peut auſſi réuſſir par l'évanoüiſſement des ſeconds termes. Repre-

nons l'équation n. 3. $xx + bx + syx = 2cy - by$, ou $xx + 2mx + \frac{2ny}{z}x = 2cy - by$.

Soit 1° $x = s - m - \frac{ny}{z}$; la ſubſtitution donne $ss - mm - \frac{2mny}{z} - \frac{nnyy}{zz} = 2cy - by$, $ss - mm = \frac{nnyy}{zz} + \frac{2mny}{z} + 2cy - by$; & faiſant $\frac{nn}{zz} = \frac{p}{m}$, $\frac{2mn}{z} + 2c - b = \omega$, $ss - mm = \frac{p}{m}yy + \omega y$, $yy + \frac{\omega my}{p} = \frac{mss}{p} - \frac{mm}{p}$.

Soit 2° $y + \frac{\omega m}{2p} = v$, $y = v - \frac{\omega m}{2p}$; par la ſubſtitution vous trouverez $vv - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{mss}{p} - \frac{mm}{p}$, $\frac{m}{p}ss = vv - \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{mm}{p}$. Et parceque 3° $- \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{mm}{p}$ eſt Regle 17. le quarré du demi-diametre déterminé, mis negativement, il ſuit que ce demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{mm}{p}}$ quantité réelle, étant $\omega\omega > 4mp$. 4° Je commence la conſtruction, & je trouve $CL = CZ + ZK + KL = x + m + \frac{ny}{z} = s$ ordonnée de l'équation; d'où je conclus que le diametre eſt ſur IL & non pas ſur AZ, avec qui les CZ, x font un angle. Je tranſporte AZ, y, ou IK ſur IL, comme n.4. & je trouve $IL = \frac{ay}{z}$. Ainſi l'équation de n. 2° $y = v - \frac{\omega m}{2p}$ ſe change en $\frac{ay}{z} = \frac{av}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$, & ſubſtituant $\frac{av}{z}$ à la place de v dans $\frac{m}{p}ss = vv - \frac{\omega\omega mm}{4pp} + \frac{mm}{p}$, & multipliant tout par $\frac{aa}{zz}$ pour conſerver l'égalité; cette équation devient $\frac{aam}{pzz}ss = \frac{aavv}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aamm}{pzz}$. Pour la conſtruire, je remarque que le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aamm}{pzz}}$, le diametre $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aamm}{pzz}}$; & parceque $\frac{aam}{pzz}$ donne la proportion du diametre au parametre, ce parametre ſera $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. 5° Le ſecond membre de l'équation, $\frac{aavv}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aamm}{pzz}$ eſt le rectangle de $\frac{av}{z} + \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aamm}{pzz}} \times \frac{av}{z} - \sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aamm}{pzz}}$, & $\frac{av}{z} =$ n. 4. $\frac{ay}{z} + \frac{a\omega m}{2pz}$ eſt la ligne priſe depuis L juſqu'au centre M de l'hyperbole : ainſi $IL = \frac{ay}{z}$, il ſuit que IM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$; & il faut prendre IM du côté, où L n'eſt pas, afin que ML, $\frac{av}{z}$ ſoit $IM + IL$, $\frac{a\omega m}{2pz} + \frac{ay}{z}$. 6° Le centre étant trouvé, vous prenez MN, $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aamm}{pzz}} = Mn$, pour avoir les ſommets N, n.

EXEMPLE X. $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. Fig. 106. Soient données de poſition les lignes AB, EF, GH paralleles entr'elles, & AD qui les coupe en faiſant des angles de 30. degrez. Il faut trouver le point C, duquel on mene ſur les données les lignes CB, CD, CF, CH, de ſorte que les angles CBT, CFS, CHG ſoient de 60. degrez chacun, ou que les trois lignes CB, CF, CH n'en compoſent qu'une; & que l'angle CDA ſoit de 30. degrez, ou que CD ſoit parallele à AB. De plus il faut que le produit de CB par CH ſoit au produit de CD par CF; comme 1 à 4. Fig. 106.

2. Soient BF, 3; BH, 5; AB, x; CB, y; CF; $y + 3$; CH, $y +$

FIG. 106. 5. BR eſt $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}AB$, & $RC = \frac{1}{2}CD = 2y + x$.

3. L'équation ſera $yy + 7y - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x$ à l'hyperbole par rapport à ſes diametres & à ſes aſymptotes ; dont les racines ſont $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4}x \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, ſi l'on poſe $\frac{7}{2} = m$, $z = 1$, $\frac{1}{4} = n = \omega$, $p = \frac{7}{32}$. L'équation à l'hyperbole par rapport à ſes diametres ſe conſtruira ainſi.

4. Parcequ'il y a $-m$, il faut prendre $BK = m$ au deſſus de CB ; & par le point K mener KI parallele & égale à AB, x ; enſuite couper $KL = \frac{n}{z}x = \frac{1}{4}x$; & faire tomber le point L entre K & C, parcequ'il y a $+\frac{n}{z}x$, Art. 2. * Pour déterminer la valeur de IL, il faut obſerver que le côté KI eſt quadruple de LK, $\frac{1}{4}x$, & que par conſequent par le Theorême de Trigonometrie, il faut que le ſinus de l'angle oppoſé à IK ſoit quadruple du ſinus de l'angle oppoſé à KL. Or étant l'angle IKL égal à ABC de 120. degrez à cauſe des paralleles AB, IK ; les deux angles KLI, KIL ſont 60. degrez entr'eux. C'eſt pourquoi l'angle KLI eſt de $49^\circ\ 5'$, dont le ſinus eſt 75585, & l'angle KIL de 10. degrez 54, dont le ſinus eſt 18909 ; ce qui manque, afin que le premier ſinus ſoit quadruple du ſecond, pouvant ſe negliger. Le Theoreme de Trigonometrie me fournit donc cette Analogie. Comme 75585 ſinus de l'angle KLI eſt à 86602 ſinus de l'angle IKL de 120. degrez ou de IKH de 60. degrez complement de IKL à deux droits : de même IK, x eſt à IL $\frac{86602}{75585}x = \frac{a}{z}$, en faiſant $\frac{86602}{75585} = a$, étant $z = 1$.

* La Trigonometrie donne la methode de trouver aiſement le côté IK, connus les côtés IK, KL & l'angle compris IKL.

Maintenant il faut prendre $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & faire tomber le point M du côté où eſt L, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 3. mais parcequ'il y a $+mm$ & ωx, & que la quantité $\omega\omega = \frac{1}{16}$ eſt moindre que $4mp = \frac{49}{16}$, par le centre M il faut tirer MOP parallele à LC, & CP parallele à LM, Regle 12, prendre $MO = \sqrt{mm - \frac{a\omega m}{4p}} = Mn$; le parametre égal à $\sqrt{\frac{4^4m^4}{pp4^4} - \frac{a^4\omega\omega m^4}{p^4z^4}}$, Regle 13. le diametre eſt dans la ligne OP, les ſommets O, n, Reg. 15. On peut décrire l'hyperbole COc, elle eſt le lieu cherché.

Dém. $\overline{CP}^2 = \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$; $MP = y + m - \frac{n}{z}x$; le rectangle $nP \times OP$, $yy + 2my - \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} - mm + \frac{a\omega m}{4p}$. $pzz : aam :: nP \times OP : \overline{CP}^2$; donc $nP \times PO = \frac{pzz}{aam} \times \overline{CP}^2$; donc $yy + 2my - \frac{2nxy}{z} + mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = mm - \omega x + \frac{p}{m}xx$, dont la racine eſt $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$. Dans tous les autres points de l'hyperbole OC on aura une des valeurs de y & l'équation de n. 3.

6. Reprenez l'équation $yy + 7y - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x$, de n. 3. Faites $y + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x = v$, $v - \frac{7}{2} + \frac{1}{4}x = y$, ſubſtituez pour y & yy leur valeur, la premiere reduite ſera $vv - \frac{49}{4} + \frac{7}{4}x - \frac{1}{16}xx = \frac{1}{2}x$; $\frac{1}{16}xx - \frac{1}{4}x =$

$vv - \frac{qq}{4}$, ou $\frac{p}{m}xx - \omega x = vv - mm$, en faiſant $\frac{1}{4} = \omega$, $\frac{7}{12} = m$, $\frac{7}{12} = p$. Maintenant multipliez par m, diviſez par p, l'équation deviendra $xx - \frac{\omega mx}{p} = \frac{m}{p}vv - \frac{m^3}{p}$. Il faut encore prendre $x - \frac{\omega m}{2p} = ſ$, $ſ + \frac{\omega m}{2p} = x$; & la ſubſtitution donnera $ſſ - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{m}{p}vv - \frac{m^3}{p}$; $\frac{m}{p}vv = ſſ + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = ſſ + \frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$. Si la quantité $\omega\omega$ étoit plus grande que $4mp$, le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ ſeroit negatif, parceque dans ce terme, $\frac{mm}{4pp}$ multiplie $\omega\omega$ & $4mp$; & l'équation ſe conſtruiroit comme à l'ordinaire; c'eſt-à-dire, que le diametre ſeroit ſur IK, à laquelle ſe terminent les appliquées CL, $v = y + \frac{7}{12} - \frac{1}{4}x = CB + BK - KL$. Vous voyez la raiſon de la Regle 6. Mais ici $\omega\omega = \frac{1}{16}$ n'eſt pas plus grand que $4mp = \frac{49}{144}$, ainſi le terme $\frac{4m^3p - \omega\omega mm}{4pp}$ eſt poſitif, & il faut Regle 17. conſtruire les hyperboles conjuguées à celles, dont on ſe ſeroit ſervi, ſi $\omega\omega$ avoit été plus grand que $4mp$. Fig. 106.

Avant que de changer l'équation $\frac{m}{p}vv = ſſ + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, on s'en ſert pour découvrir le centre & le premier diametre. L'on coupe donc $BK = \frac{7}{12} = m$, l'on mene $IK = x$ parallele à AB, l'on prend $KL = \frac{1}{4}x$; l'on tire IL.

L'on a donc $CL = CB + BK - KL$, $y + \frac{7}{12} - \frac{1}{4}x = v$, la ligne CL, qui ſeroit l'appliquée; ſi l'on conſtruiſoit $\frac{m}{p}vv = ſſ + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, découvre que le diametre premier ſeroit ſur IL à laquelle cette appliquée ſe termine. Enſuite coupez $Im = \frac{\omega m}{2p}$, par le point m menez l'infinie mM parallele à CL, la ligne MK eſt $IK - Im$, $x - \frac{\omega m}{2p} = ſ$ qui eſt la ligne laquelle doit ſe prendre ſur le diametre depuis le centre juſqu'à l'appliquée: mais le diametre n'eſt pas ſur IK, puiſqu'il eſt ſur IL; le centre M ſe trouvera donc en faiſant IK, $x : IL$, $\frac{ax}{z} :: Im$, $\frac{\omega m}{2p} : IM$, $\frac{a\omega m}{2pz}$.

Après avoir trouvé le centre M, l'on remarquera que le diametre conjugué dont on a beſoin eſt ſur MO, qui paſſe par le centre, & eſt parallele à CL appliquée au premier diametre IL; & une de ſes appliquées ſera CP tirée parallele à ce premier diametre IL.

D'ailleurs, ſi l'on ſe ſervoit de l'équation $\frac{m}{p}vv = ſſ + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$, parceque ſon diametre ſeroit ſur IL, il faudroit ſubſtituer ML à la place de mK, c'eſt-à-dire, $IL - IM$, $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz}$ à la place de $IK - Im$, $x - \frac{\omega m}{2p}$; & pour $ſ$, qui eſt $x - \frac{\omega m}{2p}$, mettre $\frac{aſ}{z}$, & enfin pour $ſſ$, écrire $\frac{aaſſ}{zz}$. Mais l'égalité ne ſubſiſtera pas, à moins que l'on ne multiplie tous les termes par $\frac{aa}{zz}$: ainſi $\frac{m}{p}vv = ſſ + \frac{m^3}{p} - \frac{\omega\omega mm}{4pp}$ ſe reduit à $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aaſſ}{zz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$. Et la raiſon du premier diametre à ſon parametre eſt celle de aam à pzz.

Après cela l'on apprend dans les Traitez des Sections coniques, que le diametre conjugué eſt moyen proportionel entre le premier diametre & le parametre de ce premier diametre. Le premier diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} -$

$\frac{4aam^4}{pzz}$, ſon parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, multipliez-les l'un par l'autre, le produit eſt $\sqrt{\frac{\omega^4 mm}{pp} - \frac{8\omega\omega m^4}{p} + 16m^4}$ qui eſt égal au quarré de la moyenne proportionelle, ainſi ſa racine $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$ ſera cette moyenne; & le diametre conjugué qu'on cherche. Il ne faut pas prendre l'autre racine $\sqrt{\frac{\omega\omega m}{p} - 4mm} = \sqrt{\frac{\omega\omega m - 4mmp}{p}}$, parcequ'elle eſt imaginaire, étant $\omega\omega$ moindre que $4mp$. De plus, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques, le parametre de ce diametre conjugué eſt troiſiéme proportionel au diametre conjugué $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, & au premier diametre $\sqrt{\frac{4aa\omega\omega mm}{ppzz} - \frac{4aam^4}{pzz}}$: il faut donc quarrer ce premier diametre pour avoir $\sqrt{\frac{a^4\omega^4 m^4}{p^4 z^4} - \frac{8a^4\omega\omega m^4}{p^3 z^4} + \frac{16a^4 m^6}{ppz^4}}$; diviſer ce quarré par le diametre conjugué $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, ou $\sqrt{-\frac{\omega\omega m}{p} + 4mm}$, le quotient $\sqrt{\frac{4a^4 m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^4}{p^3 z^4}}$ eſt le parametre du diametre conjugué. Et la raiſon du diametre conjugué à ſon parametre eſt celle de pzz à aam, car ces quatre termes ſont proportionels $pzz : aam :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4a^4 m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^4}{p^3 z^4}}$. Après cela ſi le diametre conjugué eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$, ſa moitié MO doit être $\frac{1}{2}\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}}$.

Vous connoîtrez ces mêmes choſes en changeant l'équation $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aaff}{zz} + \frac{aam^4}{pzz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz}$, en celle-ci $\frac{pzz}{aam}ff = vv - mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$; & ce changement doit ſe faire, puiſque f devient l'ordonnée CP.

Or dans cette nouvelle équation $\frac{pzz}{aam}$ marque la raiſon du diametre au parametre; $-mm + \frac{\omega\omega m}{4p}$ eſt le quarré du demi-diametre mis negativement; ce demi-diametre eſt donc $\sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}} = MO$; & le diametre eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$. Et ſi vous faites $pzz : aam :: \sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}} : \sqrt{\frac{4a^4 m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^4}{p^3 z^4}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre du diametre nO. Vous voyez comment M. DESCARTES a trouvé les Regles 12. 13. 15. 16.

EXEMPLE XI. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Fig. 107. 1. FIg. 107. comme Ex. 10. n. 1. excepté $CB \times CH = \frac{CD \times CF}{4} + \frac{1}{8}AB$.

2. Comme Ex. 10. n. 2.

3. En ſuivant Exemple 10. n. 3. la premiere équation eſt $yy + 5y = \frac{2}{3}yy + \frac{1}{4}xy + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x$, & la derniere $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{16}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$; étant $z = 1$, $m = \frac{7}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{7}{32}$.

4. Comme Ex. 10. n. 4. vous conſtruirez $-m + \frac{n}{z}x$, & vous trouverez $IL = \frac{nx}{z}$.

A preſent parceque la quantité ω eſt nulle, le centre M eſt en I, Reg. 2. parcequ'il y a $+ mm$, & que la quantité $\omega\omega$ eſt nulle; par le centre M menez MO parallele à CL, & CP parallele à LM, Regle 12. le demi-diametre MO eſt $m = Mn$; le diametre On eſt $2m$, le parametre $\frac{2aamm}{pzz}$, Regle 14. le diametre eſt ſur OP, & CP une de ſes appliquées Regle 15. la raiſon du diametre au parametre eſt celle de pzz à aam, Regle 16. L'on peut décrire l'hyperbole OC, qui eſt le lieu cherché. Fig. 107.

Dém. $\overline{CP}^2 = \frac{aaxx}{zz}$; $nP \times PO = yy + 2my - \frac{2nxy}{z} - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz}$. Or $pzz : aam :: nP \times OP : \overline{CP}^2$. $nP \times PO = \frac{pzz}{aam} \times \overline{CP}^2$. $yy + 2my - 2nxy - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} = \frac{p}{m}xx$; dont la racine, après avoir mis mm de chaque côté, ſera $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

5. L'équation de n. 3. étant reduite à $yy + 7y - \frac{1}{2}xy = \frac{7}{4}x$. Faites $v = y + \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x$, la ſubſtitution donne $vv = \frac{49}{4} + \frac{1}{16}xx$; $vv = mm + \frac{p}{m}xx$; $\frac{m}{p}vv = \frac{m^3}{p} + xx$. $v = CL$ eſt l'ordonnée, qui étant terminée à IL, fait voir Reg. 17. que IL eſt le diametre, & que pour IK, x, il faut mettre $IL\ \frac{ax}{z}$, & $\frac{aaxx}{zz}$ pour xx, & afin que l'égalité demeure, multiplier tout par $\frac{aa}{zz}$; ce qui donne $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aam^3}{pzz} + \frac{aaxx}{zz}$.

Mais parceque $\frac{aam^3}{pzz}$ eſt poſitif, la conſtruction doit ſe faire avec les hyperboles conjuguées. Le centre commun des hyperboles eſt I à cauſe que $\frac{aaxx}{zz}$ eſt le quarré de $\frac{ax}{z} = IL$. Ainſi le diametre conjugué ſera ſur IO parallele à l'appliquée CL; & CP parallele à IL ſera une appliquée au diametre IO. Puiſque le diametre conjugué eſt moyen proportionel entre le premier diametre & le parametre de ce premier diametre; & que $\frac{aam^3}{pzz}$ étant le quarré de la moitié du premier diametre, cette moitié ſera $\sqrt{\frac{aam^3}{pzz}}$, & le diametre $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$, dont la raiſon à ſon parametre eſt celle de aam à pzz. C'eſt pourquoi ſi l'on fait $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ce quatriéme terme eſt le parametre du premier diametre. Maintenant que l'on multiplie $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$ par $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, le produit $\sqrt{16m^4}$ eſt le quarré du diametre conjugué, qui ſera $\sqrt{4mm} = 2m$. De plus le parametre du diametre conjugué eſt troiſiéme proportionel du diametre conjugué & du premier diametre: multipliez donc le premier diametre $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$ par lui-même, ſon quarré eſt $\frac{4aam^3}{pzz}$, diviſez-le par le diametre conjugué $2m$, le quotient $\frac{2aamm}{pzz}$ eſt le parametre du diametre conjugué. Or la raiſon de $2m$ à $\frac{2aamm}{pzz}$ eſt comme pzz à aam. Ces choſes expliquent les Regles 12. 14. 15. 16. Après cela l'on conſtruira & l'on démontrera comme n. 4.

EXEMPLE XII. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{-ff - \omega x + \frac{p}{f}xx}$.

1. FIg. 108. comme Ex. 10. n. 1. excepté que l'on demande que $CB \times CH = \frac{CD \times CF}{4} - 7$. Fig. 108.

2. Comme Exemple 10. n. 2.

3. Comme Ex. 10. n. 3. excepté que la premiere équation eſt $yy + 5y = \frac{1}{2}yy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x - 7$, la derniere $yy + 7y - \frac{1}{2}xy + \frac{49}{4} - \frac{7}{4}x + \frac{1}{16}xx = \frac{49}{4} - \frac{7}{4}x + \frac{1}{16}xx + \frac{1}{2}x - 14 = -\frac{7}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xx$, dont la racine eſt $y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{4}x + \sqrt{-\frac{7}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{-\iint - \omega x + \frac{p}{f}xx}$, en faiſant $\frac{7}{2} = m$, $\frac{1}{4} = n = \omega$, $1 = z$, $\sqrt{\frac{7}{4}} = f$, $\sqrt{\frac{7}{1024}} = p$.

4. L'on conſtruira $-m + \frac{n}{z}x$, & l'on trouvera $IL = \frac{\omega x}{z}$ comme Ex. 10. n. 4. L'on prend $IM = \frac{\omega\omega f}{2pzz}$, Reg. 1. & l'on met le centre M ſur IL, en allant de I vers le côté où L eſt, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 3. parcequ'il y a $-\iint$, le parametre eſt $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4fpzz}{aa}}$, Regle 5. le diametre eſt ſur IL, & CL une de ſes appliquées, Regle 9. l'on fait $pzz : aaf :: \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4fpzz}{aa}} : \sqrt{\frac{aa\omega\omega\iint}{ppzz} + \frac{4aaf^3}{pzz}}$, & ce quatriéme terme eſt le diametre, Regle 10. dont la moitié $\sqrt{\frac{aa\omega\omega\iint}{4ppzz} + \frac{aaf^3}{pzz}} = MN = Mn$, & l'on fait tomber le ſommet N du côté, où eſt L, Regle 11. l'angle des coupées avec les ordonnées eſt CLN. Toutes ces choſes étant connuës, on peut décrire l'hyperbole NC, qui ſatisfait au Problème.

Dém. Le rectangle $NL \times nL = \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega fx}{pzz} - \frac{aaf^3}{pz}$. Or $aaf : pzz :: NL \times nL : \overline{CL}^2$, d'où l'on forme $CL = \sqrt{-\iint - \omega x + \frac{p}{f}xx}$ & $CB, y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{-\iint - \omega x + \frac{p}{f}xx}$, Ce qu'il falloit démontrer.

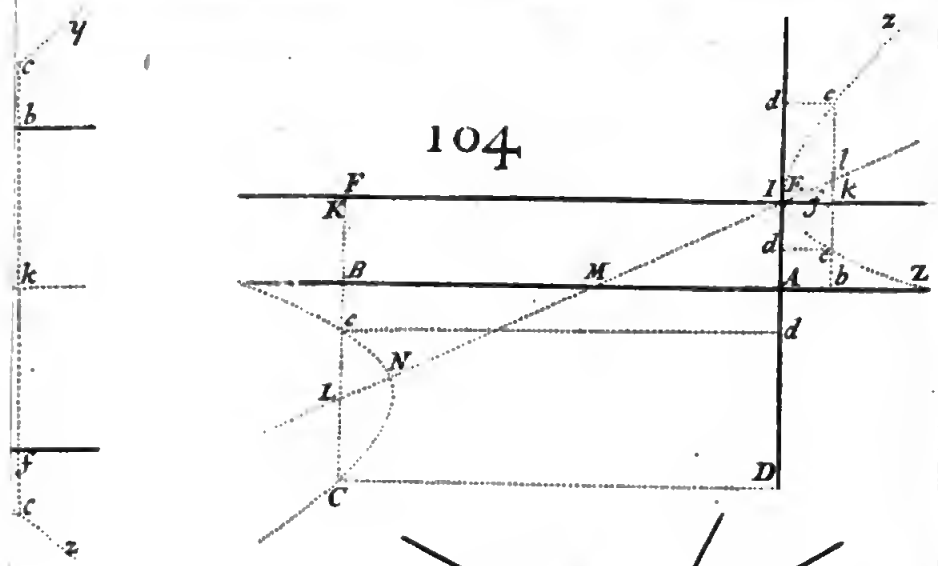
EXEMPLE XIII. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{\iint - \omega x + \frac{p}{f}xx}$.

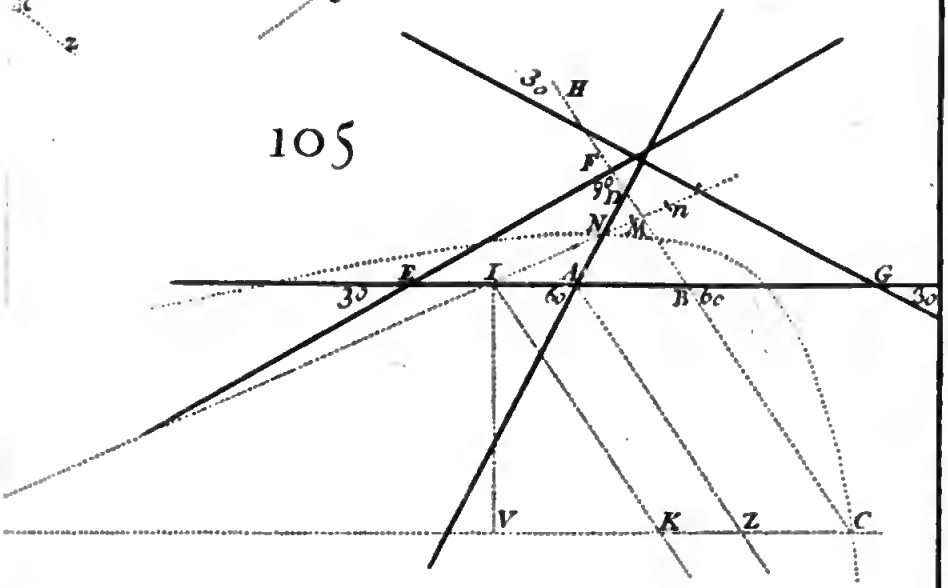
FIG. 109. 1. SOient Fig. 109. données de poſition les quatre lignes AB, AD, EF, GH, dont les trois AB, EF, GH ſont paralleles, & à diſtances égales entr'elles; & AD les coupe à angles droits. Il faut trouver un point C, d'où ayant tiré les lignes, CB, CD, CF, CH perpendiculaires ſur les données CB multipliée par CD faſſe un produit égal au produit de CF multipliée par CH.

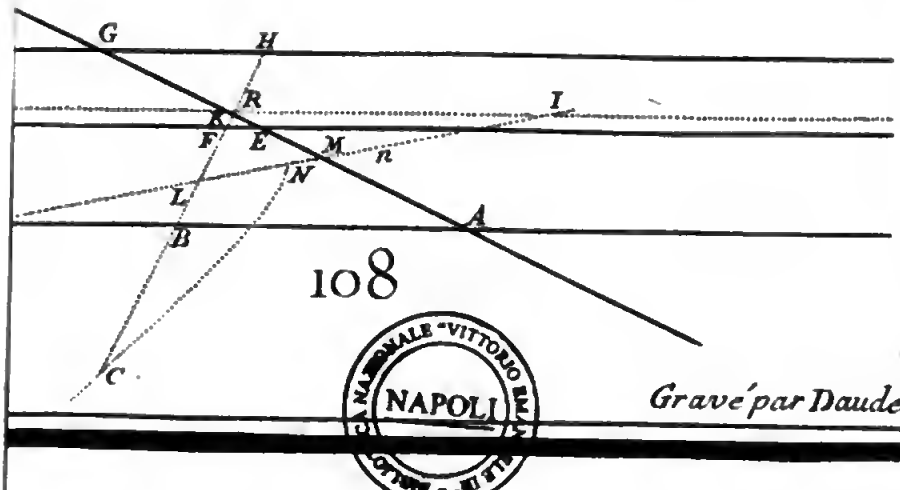
2. Soit $AE = 1$; $AG = 2$; $AB = CD$, x; CF, $y + 1$; CH, $y + 2$.

3. L'équation ſera $xy = yy + 3y + 2$, dont les racines ſont $y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{\iint - \omega x + \frac{p}{f}xx}$, en faiſant $\frac{1}{2} = m = \omega$; $z = 1$; $\frac{1}{2} = n = f$; $p = \frac{1}{8}$. à l'hyperbole par rapport aux diametres & aux aſymptotes.

4. Parcequ'il y a $-m$, ſur CB on prendra $BK = m$, par le point K l'on menera KI égale & parallele à AB, x; on coupera $KL = \frac{1}{2}IK = \frac{1}{2}x$, & par les points I, L on tirera l'infinie $IL = x\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\omega x}{z}$, en mettant $\omega = \sqrt{\frac{1}{4}}$. Mais les Il priſes de l'autre côté de I ſont $-\frac{\omega x}{z}$; ſur IL on prendra $IM = \frac{\omega\omega f}{2pz}$, Regle 1. & le centre M tombera du côté, où eſt L, parcequ'il







BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Gravé par Daudet.

qu'il y a $-\omega x$, Regle 3. parcequ'il y a $+ff$, & que $\omega\omega = \frac{9}{4}$ eſt plus grand que $4pf = \frac{1}{4}$, le parametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega zz}{aa} - \frac{4pfzz}{aa}}$, Regle 6. le diametre eſt dans IL, & CL eſt une de ſes appliquées, Regle 9. le parametre eſt au diametre, comme pzz à aaf, Regle 10. ſa moitié MN ſe prend du côté où eſt L, Regle 11. l'on prend $Mn = MN$ $\sqrt{\frac{aa\omega ff}{4pzz} - \frac{aaf^2}{pzz}}$ pour avoir le ſommet n de l'hyperbole oppoſée ; l'angle CLN eſt celui que les coordonnées doivent faire. Ainſi l'on peut décrire les deux hyperboles qui ſatisfont à la queſtion. fig. 109.

Dém. Le rectangle $NL \times nL$ eſt $= \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega fx}{pzz} + \frac{aaf^2}{pzz}$; ce qui ſe trouve ſur Il comme ſur IL. Or $aaf : pzz : NL \times nL : CL^2$ donc $CL = \sqrt{ff - \omega x + \frac{p}{f}xx}$.

Maintenant 1° au point C ſe trouve la racine vraye. 2° Au point c pris ſur l'arc Nc la racine fauſſe. 3° Au point c pris entre Ef & Ab, la racine vraye. 4° Au point c pris audeſſus de Gh la racine fauſſe & partout l'équation de n. 3. ce qui arrive dans tous les points des deux hyperboles qui donnent toûjours une des valeurs de y & $xy = yy + 3y + 2$.

Le centre M tombe ſur la ligne AB ; car $AI = BK = m = \frac{3}{2}$, & dans les triangles ſemblables MAI, IKL, LK, $\frac{1}{2}x : KI$, $x :: IA$, $\frac{3}{2} : MA$, 3. Et dans le triangle MAI rectangle en A, $IM = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{a\omega f}{2pz}$, & parceque IM, $\frac{3}{2}\sqrt{5} > Mn$, $\sqrt{10}$; le ſommet n doit tomber entre I & M.

5. L'équation eſt n. 3. $yy + 3y - xy = -2$; faites $y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = v$; vous aurez $vv - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}xx - \frac{3}{2}x$, $vv - ff = \frac{p}{f}xx - \omega x$, en ſuppoſant $p = \frac{1}{8}$, $f = \frac{1}{2}$, $\omega = \frac{3}{2}$ comme n. 3. $\frac{f}{p}vv - \frac{ff}{p} = xx - \frac{\omega fx}{p}$.

Faites encore $x - \frac{\omega f}{2p} = r$, & vous trouverez $\frac{f}{p}vv = rr + \frac{ff}{p} - \frac{\omega\omega ff}{4pp}$. Après avoir connu comme n. 4. que l'ordonnée $CL = v = y + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ ſe termine à IL & que le diametre eſt ſur IL, $\frac{ax}{z}$; vous conclurrez que l'équation $x = r + \frac{\omega f}{2p}$ doit ſe changer en $\frac{ax}{z} = \frac{ar}{z} + \frac{a\omega f}{2pz}$, & l'équation $\frac{f}{p}vv = rr + \frac{ff}{p} - \frac{\omega\omega ff}{4pp}$ en celle-ci $\frac{aaf}{pzz}vv = \frac{aarr}{zz} + \frac{aaff}{pzz} - \frac{aa\omega\omega ff}{4ppzz}$, laquelle doit être conſtruite, parceque $\omega\omega > 4mp$.

Dans cette équation, $\frac{aaf}{pzz}$ montre la raiſon du diametre au parametre, $\sqrt{\frac{aa\omega ff}{4pzz} - \frac{aaff}{pzz}}$ eſt le demi-diametre. $\sqrt{\frac{aa\omega ff}{ppzz} - \frac{4aaff}{pzz}}$ le diametre, $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4pfzz}{aa}}$ le parametre. étant $pzz = \frac{1}{8}$, $aaf = \frac{1}{8}$, l'hyperbole n'eſt pas équilatere. Dans cette ſorte d'équation à l'hyperbole, le terme $\frac{aarr}{zz}$ eſt le quarré de la ligne LM, $\frac{ar}{z}$, priſe depuis le point L juſqu'au centre M : mais IL, $\frac{ax}{z} = \frac{ar}{z} + \frac{a\omega f}{2pz}$: donc $IM = \frac{a\omega f}{2p}$, & le point M doit ſe prendre du côté où L eſt, parcequ'il y a $+\frac{a\omega f}{2p} + \frac{ar}{z} = IL$, $\frac{ax}{z}$. Et parcequ'il y a toûjours $+\frac{a\omega f}{2pz}$ ou $+\frac{a\omega m}{2pz}$, toutes les fois qu'il y a $-\omega x$ dans $\sqrt{ff - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, c'eſt pour cela que M. DESCARTES a donné la Regle 3.

La démonſtration peut ſe faire, comme n. 4.

EXEMPLE XIV. $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

FIG 109. 1. FIg. 109. Comme Ex. 13. n. 1. excepté que l'on demande $CB \times CD = CF \times CH + \frac{1}{2}\overline{AE}^2$.

2. Comme Ex. 13. n. 2.

3. L'équation ſera $yy + 3y - xy = -\frac{3}{2}$ dont les racines ſont $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{3}{4} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}xx}$, ou $y = -m + \frac{n}{z}x \pm \sqrt{-mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, en faiſant $\frac{1}{2} = m = \omega$, $1 = z$, $p = \frac{1}{4}$. Equation à l'hyperbole par rapport à ſes diametres, & à ſes aſymptotes.

4. Comme Ex. 13. car IM, $\frac{a\omega m}{2pz}$ eſt égal à $\frac{aas}{2pz}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, & le centre M tombe encore ſur AB. Excepté pourtant que le parametre eſt Regle 5. $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} = 3\sqrt{\frac{3}{5}}$, le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$. C'eſt pourquoi le ſommet n tombe au delà de I, étant $IM < Mn$. De plus $aam = \frac{1}{8}$, $pzz = \frac{1}{8}$.

5. L'on fera évanoüir le ſecond terme ſi l'on prend $v - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = y$, la ſubſtitution donnera $\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}x = vv + \frac{2}{4}$; $\frac{p}{m}xx - \omega x = vv + mm$, en ſuppoſant que ces lettres ont les mêmes valeurs que n. 3. Enſuite je multiplie tout par m, & je diviſe tout par p, pour faire $xx - \frac{\omega mx}{p} = \frac{m}{p}vv + \frac{m^3}{p}$. Je fais encore $\int + \frac{\omega m}{2p} = x$: la ſubſtitution donnera $\iint - \frac{\omega\omega mm}{4pp} = \frac{m}{p}vv + \frac{m^3}{p}$; $\frac{m}{p}vv = \iint - \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p}$.

Pour conſtruire cette équation, je prends $BK = m$; par le point K je mene IK égale & parallele à AB, x; je coupe KL égale à $\frac{n}{z}x = \frac{1}{2}x$, $IM = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; par les points I, L je tire l'infinie IL. Cela étant fait, je connois que CL eſt $CB + BK - KL$, $y + m - \frac{n}{z}x = y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = v$: Et comme v eſt l'appliquée, il ſuit que le diametre eſt ſur IL, REGLE 17.

Enſuite ſur IK je prends $IV = \frac{\omega m}{2p}$, de ſorte que $VK = IK - IV$, $x - \frac{\omega m}{2p}$ eſt $\int$: ainſi le point V où commencent les $\int$ ſeroit le centre des hyperboles, ſi le diametre étoit ſur IK: mais comme il eſt ſur IL, je change l'équation $x - \frac{\omega m}{2p} = \int$, en $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz} = \frac{a\int}{z}$.

Je mets donc dans l'équation $\frac{m}{p}vv = \iint - \frac{\omega\omega mm}{4pp} - \frac{m^3}{p}$, pour $\iint$ la quantité $\frac{aa\int\int}{zz}$, & afin que l'égalité ſubſiſte, je multiplie tous les termes par $\frac{aa}{zz}$, ce qui produit la derniere reduite $\frac{aam}{pzz}vv = \frac{aa\int\int}{zz} - \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}$.

Dans le terme $\frac{aam}{pzz}vv$ je connois, que le diametre eſt au parametre comme aam à pzz; dans le terme $\frac{aa\int\int}{zz}$ quarré de $\frac{a\int}{z} = ML$, je connois que M eſt le centre; dans le terme $\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aam^3}{pzz}$, qui eſt le quarré du demi-diametre exprimé negativement, je connois que ce demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$, & que le diametre eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; &

faiſant $aam : pzz :: \sqrt{\frac{4aa\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} : \sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. L'on peut aiſément achever la conſtruction & la démonſtration ; & reconnoître les Regles de Mr DESCARTES.

EXEMPLE XV. $y = m - \frac{n}{z}x \pm \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 97. qui eſt celle de M. DESCARTES. Comme Ex. 13. n. 1. excepté qu'il faut que $CB \times CH$ ſoit égal à $CD \times CF - \frac{7}{3}CB$. FIG. 97.

2. Comme Ex. 13. n. 2. où l'on a trouvé $CB = y$; $CD = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x$; $CF = 2y + 3 + x$; $CH = \frac{2}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x$.

3. $CB \times CH = CD \times CF - \frac{7}{3}CB$ s'exprime de cette façon, $\frac{2}{3}yy + \frac{10y}{3} - \frac{2}{3}xy = 3yy + \frac{9}{2}y + \frac{9}{2}xy + \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}xx - \frac{7}{3}y$; $\frac{7}{3}yy - \frac{7}{6}y + \frac{31}{6}xy = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}xx$. Multipliez par 3, diviſez par 7, & vous ferez $yy - \frac{1}{2}y + \frac{11}{14}xy = -\frac{27}{14}x - \frac{9}{14}xx$.

4. Coupez $BK = m$, par le point K menez IK égale & parallele à AB, x, prenez $KL = \frac{n}{z}x = \frac{11}{28}x$; par les points I, L tirez l'infinie IL. Dans le triangle IKL, vous connoiſſez les côtez IK, KL, & l'angle IKL, vous pourrez donc par la Trigonometrie connoître le côté IL, que vous nommerez $\frac{ax}{z}$.

Maintenant parcequ'il y a $+ mm$, & que $\omega\omega$ eſt moindre que $4mp$; après avoir trouvé le centre M ſur IL, en prenant $IM = \frac{a\omega m}{2pz}$, Regle 1. & mis le point M du côté où eſt L, parcequ'il y a $-\omega x$, Regle 3. vous tirerez Regle 12. par le centre M, la ligne MOP parallele à LC, & CP parallele à LM ; vous ferez $MO = \sqrt{mm - \frac{\omega\omega m}{4p}} = MN$, qui ſont les demi-diametres ; & le diametre NO eſt $\sqrt{4mm - \frac{\omega\omega m}{p}}$; le parametre $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4\omega\omega m^3}{p^3z^4}}$, les ſommets ſont O, N, CP une ordonnée ; & la raiſon du diametre au parametre eſt celle de pzz à aam, Regle 13. 15. 16. Après cela vous pouvez décrire l'hyperbole OC, qui eſt le lieu cherché.

Dém. $\overline{CP}^2 = \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aaxx}{zz}$. $NP \times OP = yy - 2my + \frac{2nxy}{z} - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{\omega\omega m}{4p}$. Or $pzz : aam :: NP \times PO : \overline{CP}^2$. Donc $NP \times PO = \frac{pzz}{aam} \times \overline{CP}^2$, d'où ôtant ce qui s'efface & ajoûtant mm de chaque côté, on forme une équation dont la racine eſt $y = +m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \omega x + \frac{p}{m}xx}$, &c.

Le Lecteur eſt averti que du nombre des Exemples le 13e eſt retranché, ce qui fait que le 15e eſt le même que le 16e dont il eſt parlé dans quelques endroits. Le 15e eſt devenu 14e, & celui-ci 13e.

ARTICLE VIII.

Conſtruction particuliere à l'Hyperbole conſiderée par rapport à ſes Aſymptotes.

IL ne s'agit ici, que de faire voir dans quelques Exemples, que le Problème de Pappus, lorſqu'il eſt propoſé en trois ou quatre lignes, peut quelquefois ſe conſtruire avec l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes.

FIG. 110. J'ajoûterai ceci comme une REGLE. 1° Fig. 110. ſoient les lignes droites Nu, Nn les aſymptotes des hyperboles CP, AY; N leur centre; l'abſciſſe $Nu = a$; l'appliquée $uC = b$, parallele à l'autre aſymptote Nn, l'abſciſſe NO priſe ſur une des aſymptotes Nu, l'appliquée OP parallele à l'autre aſymptote Nn; ou Nn abſciſſe priſe ſur une des aſymptotes Nn, $= x$; l'appliquée nC parallele à l'autre aſymptote Nu, $= y$; ou l'abſciſſe Nn priſe en allant de N vers Y, $= -x$, l'appliquée nY paralelle à l'aſymptote $Nu = -y$; parceque les x commencent en N, & que les $+y$ ſont au deſſous de Nn, les $-y$ au deſſus. Tous les lieux à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, ſont fondez ſur cette proprieté $xy = ab$, le rectangle ſous une coupée $Nu = a$ & ſous une appliquée correſpondante uC, b, eſt égal à un autre rectangle ſous une autre coupée Nn, x & ſous ſon appliquée correſpondante nc, y.

2° Les aſymptotes ſont toûjours les lignes droites, Nu, Nn ſur l'une deſquelles Nn, l'on prend les abſciſſes Nn, Nn; & de laquelle partent les appliquées nC, nc paralleles à l'autre aſymptote Nu. De ſorte que ſi l'appliquée nc, y, ou l'inconnuë v en laquelle y a été changée, ne ſe trouvoit pas parallele à Nu, il faudroit lui ſubſtituer une autre ligne, qui fût parallele à Nu, & faire enſuite dans l'équation les changemens que l'on verra, Ex. 3. 4. 5.

3° Il eſt libre ordinairement de prendre les abſciſſes Nn, Nn ſur l'aſymptote Nn; & alors les nC, nc ſont appliquées; ou bien de prendre les abſciſſes $Nx = nc$, $Nu = nC$ ſur l'aſymptote Nu; & alors les appliquées ſont $uC = Nn$, $xc = Nn$.

EXEMPLE I. $y = \frac{2mx}{2x - a}$.

FIG. 110. 1. FIg. 110. Comme Art. 5. Ex. 2. excepté que l'on demande ici, que ce qui eſt produit par $CB \times CH$ ſoit égal à ce qui eſt produit par $CD \times CF$.

2. Comme Art. 5. n. 2.

3. $CB \times CH = CD \times CF$ s'exprime ainſi en termes analytiques, $ay - xy = xy - 2mx$; $y = \frac{2mx}{2x - a}$.

Pour reduire $2xy - \omega y = 2mx$, diviſons par 2, le quotient eſt xy Fig. 110. $\frac{1}{2}\omega y = mx$; prenons $x = z + \frac{1}{2}\omega$; ſubſtituons la valeur de x à ſa place, nous aurons $zy - mz = \frac{1}{2}\omega m$; faiſons encore $y - m = v$, & la ſubſtitution donnera la reduite $vz = \frac{1}{2}\omega m$, équation à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes.

4. Pour la conſtruire, ſur AG coupons $AU = \frac{1}{2}\omega$, $= VG$: nous aurons $UB = AB - AU$, $x - \frac{1}{2}\omega = z = Cu$; les $Ub = cx$ auront la même valeur, le point b étant pris du côté de G ; les $Ub = Yx$, le point b étant pris du côté de Y, auront une autre valeur, car $Ub = UA + Ab$, $\frac{1}{2}\omega - x = -z$.

Par le point U menons UN parallele à AE ; ſur l'infinie UNu coupons $UN = \frac{1}{2}AE = m = Bn = NO$, parceque AE eſt $2m$; nous aurons $Cn = CB - Bn$, $y - m = v = Nu$; toutes les cn auront même valeur, les nY ſeront $nb - bY$, $m - y = -v$, car l'appliquée $Yb = y$. Et parceque $Cu = z$ ſe termine à UN, ſur laquelle on prend $Nu = v$; & que Cu eſt parallele à Nn ; les lignes Nn, Nu ſeront les aſymptotes, dont N eſt le ſommet. Enfin je décris l'hyperbole CP entre les aſymptotes Nn, Nu, & par le point P ; enſuite ſon oppoſée AY, ſuivant les Methodes que les Traitez des Sections coniques fourniſſent. Elles ſont le lieu de la queſtion.

Dém. Etant $NO = m$, $PO = UG = \frac{1}{2}\omega$. 1° Par la nature de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, nous aurons $Nu \times uC = NO \times OP$, $uz = \frac{1}{2}\omega m$; ſubſtituons pour v ſa valeur $y - m$, ce ſera $yz - mz = \frac{1}{2}\omega m$; ſubſtituons encore pour z ſa valeur $x - \frac{1}{2}\omega$, nous ferons $y = \frac{2mx}{2x - \omega}$ équation propoſée. De plus le calcul a été fait au point C. 2° Au point c pris ſur l'arc Pc, nous avons $NO \times OP = Nn \times nc$, $\frac{1}{2}\omega m = u\zeta$. De plus nous avons là cb, y ; $cf = fb - cb$, $2m - y$; $cd = Ab$, x ; $ch = cd - dh$, $x - \omega$; & $cb \times ch = cd \times cf$, $\omega y - xy = xy - 2mx$, equation de n. 3. 3° Au point Y ſur l'hyperbole oppoſée, nous avons par la nature de l'hyperbole $Nn \times nY = NO \times OP$, $vz = \frac{1}{2}\omega m$. Subſtituons pour $-v$ ſa valeur $m - y$; pour $-z$ ſa valeur $\frac{1}{2}\omega - x$, nous ferons $\frac{1}{2}\omega m - mx - \frac{1}{2}\omega y + xy = \frac{1}{2}\omega m$; $y = \frac{2mx}{2x - \omega}$. De plus nous avons là $Yb = y$; $Yf = bf - Yb$, $2m - y$; $Yd = Ab$, $-x$; $Yh = Yd + dh$, $-x + \omega$; & $Yb \times Yh = Yd \times Yf$, $-xy + \omega y = -2mx + xy$; $2xy - \omega y = 2mx$, équation de n. 3. L'on trouvera dans tous les points des deux hyperboles les mêmes choſes. Ainſi elles ſatisfont entierement au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

L'hyperbole oppoſée AY paſſe par le point A, car nous avons $NR = VA = \frac{1}{2}\omega$; $AR = VN = m$; & comme auparavant $Nn \times nY = NR \times AR$, $vz = \frac{1}{2}\omega m$.

EXEMPLE II. $y = \frac{bx}{2bx+1}$.

FIG. 111. 1. FIg. 111. Comme Art. 5. Exemp. 5. n. 1. excepté qu'il faut que $CB \times CD$ ſoit égal à $CF \times CH$.

2. Comme n. 2. du même Exemple, excepté qu'on trouvera, en faiſant les mêmes raiſonnemens, $CF = BF - CB$, $1 - y$; $BR = bx$; $CR = BR - CB$, $bx - y$; $CH = \frac{y+bx}{2}$; $CT = CB + BT$, $y + bx$; CD, $\frac{y+bx}{2}$.

3. $CB \times CD = CF \times CH$ fait $\frac{yy+bxy}{2} = \frac{bx-y-bxy+yy}{2}$ qui ſe reduit à $2bxy + y = bx$; $xy + \frac{y}{2b} = \frac{1}{2}x$. Prenez $x + \frac{1}{2b} = z$, $x = z - \frac{1}{2b}$, mettez z pour $x + \frac{1}{2b}$ dans le premier membre, $z - \frac{1}{2b}$ pour x dans le ſecond; l'équation ſera $yz = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4b}$, $\frac{1}{2}z - yz = \frac{1}{4b}$.

Prenez encore $\frac{1}{2} - y = v$, ſubſtituez, la reduite eſt $vz = \frac{1}{4b}$, équation à l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

4. En voici la conſtruction. Sur AB coupez $AU = \frac{1}{2b}$, & UB ſera $UA + AB$, $\frac{1}{2b} + x = z$. Par le point V mènez VN parallele à BC; prenez $VN = \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, que le point N eſt au milieu de VK, parceque $VK = BF = 1$. Par le point N tirez l'infinie NO parallele à AB, de ſorte que $Cu = Bu - CB$, $\frac{1}{2} - y = v$. Parceque $Cu = v$ ſe termine à la ligne NO, ſur laquelle on prend $Nu = VB = z$; & que Cu eſt parallele à VN; les deux lignes NV, NO ſont aſymptotes, & N leur ſommet. Il reſte à prendre $NO = \sqrt{\frac{1}{4b}}$, & tirer $OP = NO$ & parallele à NV, & décrire l'hyperbole CP par le point P, & entre les aſymptotes NO NV. C'eſt le lieu cherché.

Dém. Par la nature de l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, $Nu \times Cu = NO \times OP$, $vz = \frac{1}{4b}$; mettez pour v & z leur valeur, vous aurez $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4b} - xy - \frac{y}{2b} = \frac{1}{4b}$; $y = \frac{bx}{2bx+1}$. Ce qu'il falloit démontrer.

1° L'hyperbole PC paſſe au point A, parceque là $CB = o$, $CD = o$, $CH = o$; ce qui rend zero les produits $CB \times CD = CF \times CH$. 2° La ſeconde hyperbole paſſe au point E, parceque là $CD = o$, $CF = o$; ce qui produit le même effet. 3° Aucune ne paſſe au point G, parceque là $CF = o$, $CH = o$; ce qui rendroit $CB \times CD = o$, & qui eſt faux.

EXEMPLE III. $y = \frac{n}{x}x + \sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$.

1. FIg. 112. Comme Art. 7. Ex. 5. n. 1.

2. Comme n. 2. du même Exemple.

3. Comme n. 3. du même Exemple. Reprenons enſuite l'équation $xy + \omega x = yy$; ſoit $y + \omega = v$, $y = v - \omega$; la ſubſtitution fournira $vx = vv - 2\omega v + \omega\omega$; $vx - vv + 2\omega v = \omega\omega$. Soit encore $x - v +$

$2\omega = z$; la reduite ſera $vz = \omega\omega$, l'équation à l'hyperbole par rapport à ſes aſymptotes.

4. La conſtruction ſe fera ainſi. Etant $BF = AE$, ω, CF eſt $y + \omega = v$. Qu'on prenne $EN = 2AE$, 2ω; que par N on mene NR égale & parallele à CF, v; qu'on prolonge CD en R. Coupez $RS = NR$, & par les points N, S tirez l'infinie NS. Vous avez $RD = NE$, 2ω; donc $CS = CD + DR - RS$, $x + 2\omega - v = z$. Les droites NF, NS ſont aſymptotes, parceque $CS = z$, 1° eſt terminée à NS, ſur laquelle on prendra les abſciſſes, 2° elle eſt parallele à NF. Mais $CF = v$ n'eſt pas parallele à NS : il faut donc lui ſubſtituer CT terminée à NF, & parallele à NS : $CT = v\sqrt{2} = av$ en poſant $\sqrt{2} = a$. L'on mettra av pour v dans l'équation $vz = \omega\omega$, & afin que l'égalité ſubſiſte, l'on multipliera le ſecond membre par a; & l'équation ſera reduite à $avz = a\omega\omega$. C'eſt pourquoi ſi l'on coupe $NO = \omega$, & que l'on mene $OA = a\omega$ parallele à NS, & qu'on décrive l'hyperbole AC, par le point A & entre les aſymptotes NF, NS, elle ſatisfera au Problême.

Dém. OA eſt $= \omega\sqrt{2}$. Ainſi l'hyperbole cherchée paſſe par le point A. Or par la nature de l'hyperbole entre ſes aſymptotes $NS \times CS = NL \times LA$, ou $CT \times CS = AO \times AL$, $avz = a\omega\omega$, $vz = \omega\omega$. Subſtituez les valeurs de z & de v, vous aurez l'équation $xy + \omega x - yy = 0$ & la racine $y = \frac{n}{z}x + \sqrt{\omega x + \frac{p}{m}xx}$, &c.

EXEMPLE IV. $y = -m + \frac{n}{z}x + \sqrt{\text{☐☐} - \omega x + \frac{p}{s}xx}$.

1. FIg. 109. Comme Exemple 13. n. 1. Art. 7. FIG. 109

2. Comme Ex. 13. n. 2. Art. 7.

3. Comme n. 3. du même Exemple. Maintenant reprenons l'équation $-yy - 3y + xy = 2$. & faiſons $x - 3 - y = v$, afin que l'équation ſe change en $vy = 2$. Equation à l'hyperbole priſe entre ſes aſymptotes.

4. L'on a vû Ex. 13. n. 4. que CB eſt $y = MQ$, $CD = x$, AM eſt $3 = QD$, le point M eſt le centre. Soit $QS = MQ$, joignez MS : vous aurez $CS = CD - QD - QS$, $x - 3 - y = v$. Les lignes MS, MB ſont aſymptotes, parceque $CS = v$ ſe termine à MS, ſur laquelle on prendra les abſciſſes; 2° elle eſt parallele à MB. Mais $CB = y$ n'eſt pas parallele à l'aſymptote MS, je lui ſubſtituë donc CT parallele & égale à $MS = y\sqrt{2} = ay$. Je mets ay pour y dans l'équation $vy = 2$; & pour conſerver l'égalité, je multiplie auſſi le ſecond terme par a, & l'équation devient $avy = 2a$. Je coupe $MO = \sqrt{2}a$, je mene OP égale à MO & parallele à MS. On peut décrire l'hyperbole PC par le point P, entre les aſymptotes MB, MS, qui ſera le lieu cherché.

Dém. Par la nature de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, $MO \times OP = MS \times SC$, $2a = avy$; $vy = 2$. Pour v mettons ſa valeur, l'équation

ſe changera en $-yy-3y+xy=2$. Equation de n. 3. D'où l'on pourra former la racine $y=-m+\frac{n}{2}x+\sqrt{\text{∬}-\omega x+\frac{p}{4}xx}$, comme l'on a fait Art. 7. Ex. 13. n. 3. Ce qu'il falloit démontrer.

EXEMPLE V. $y=\frac{bx+xx}{2c-b-5x}$.

Fig. 113. 1. FIg. 113. Comme Ex. 9. n. 1. Art. 7.

2. Là même, n. 2. où l'on a poſé EA, $b=3$"; AG, $c=5$.

3. Là même, n. 3.] Enſuite l'équation $y=\frac{bx+xx}{2c-b-5x}$ ſe reduit à $2cy-by-5xy=bx+xx$, ou $7y-5xy=3x+xx$, $\frac{7}{5}y-xy=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}xx$. Soit $\frac{7}{5}-x=z$, $x=-z+\frac{7}{5}$: la ſubſtitution donnera $yz=\frac{1}{5}zz-\frac{29}{25}z+\frac{154}{125}$, $yz+\frac{29}{25}z-\frac{1}{5}zz=\frac{154}{125}$. Soit encore $y+\frac{29}{25}-\frac{1}{5}z=v$; en ſubſtituant on fera $vz=\frac{154}{125}$ à l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

4. La conſtruction ſe fera de cette maniere. Coupez $AN=\frac{7}{5}$ ſur AG, vous aurez $BN=AN-AB$, $\frac{7}{5}-x=z$. Par le point N tirez l'infinie IN parallele à CB; ſur CB prenez $BK=\frac{29}{25}$, menez IK égale & parallele à BN, z; prenez $KL=\frac{1}{5}KI=\frac{1}{5}z$, & par les points I, L tirez l'infinie IL: vous aurez $CL=CB+BK-KL=y+\frac{29}{25}-\frac{1}{5}z=v$.

Les droites IN, IL ſont les aſymptotes, parceque CL, v 1° eſt terminée à IL; 2° elle eſt parallele à IN. A preſent menez CS égale & parallele à BN, $z=KI$. A cauſe de vz, CS devroit être la coordonnée de CL, v: mais elle n'eſt pas parallele à l'aſymptote IL, il faut donc la tranſporter ſur CR, que vous tirerez parallele à IL. Pour cela vous obſerverez que les triangles IKL, CSR ſont entierement égaux; les angles en K & S de 60. degrez. Ainſi dans le triangle KIL, la ſomme des deux autres angles L, I eſt de 120. degrez. Mais la raiſon des ſinus de ces angles eſt ſuivant le Problême de Trigonometrie, comme leurs côtez oppoſez IK; z; KL, $\frac{1}{5}z$, ou comme 5. à 1. c'eſt ce qui convient au ſinus 9448 5 de l'angle ILK de 109. deg. 7^{1}, & au ſinus 18880 de l'angle LIK de 10. d. 53^{1}, les ſecondes étant negligées.

On connoîtra donc par le même Problême la valeur du côté IL, que je nomme az, & qui eſt égal à CS. Il faut encore changer l'équation $vz=\frac{154}{125}$ en $avz=\frac{154a}{125}$.

Enfin coupez $IO=\sqrt{\frac{154}{125}a}$, menez $OP=IO$ & parallele à IL. Décrivez une hyperbole entre les aſymptotes IO, IL, & qui paſſe par le point P, elle eſt le lieu cherché. Tirez PT parallele & égale à IO; & d'un point quelconque C, CK, CS paralleles chacune à une des aſymptotes.

Dém. Par la nature de l'hyperbole entre ſes aſymptotes, $IO\times OP$ ou $PO\times PT=IR\times CR$ ou $CL\times CR$, $auz=\frac{154}{125}a$, $uz=\frac{154}{125}$; & ſubſtituant la valeur de v; $yz+\frac{29}{25}z-\frac{1}{5}zz=\frac{154}{125}$; & ſubſtituant la valeur de z, $\frac{7}{5}y-xy=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}xx$, $7y-5xy=3x+xx$, équation de n. 3.

EXEMPLE

EXEMPLE VI. $2bxy - y + bx = 2$.

1. NOus avons trouvé Art. 5. Exemple 6. dans la démonſtration n. 2°, que le point c Figure 81. étant pris dans l'angle EAB, l'équation étoit $2bxy - y + bx = 2$, laquelle nous allons conſtruire Fig. 114. étant $b = \frac{43301}{25000}$ Art. 5. Ex. 5. n. 2. $BF = 1$. Fig. 81. 114.

2. Changeons l'équation en $xy + \frac{1}{2}x = \frac{yy}{2b} + \frac{1}{b}$; faiſons $y + \frac{1}{2} = v$, $y = v - \frac{1}{2}$; la ſubſtitution donne $vx = \frac{vv}{2b} - \frac{v}{2b} + \frac{1}{8b} + \frac{1}{b}$, $xv + \frac{v}{2b} - \frac{vv}{2b} = \frac{9}{8b}$. Faiſons encore $x + \frac{1}{2b} - \frac{v}{2b} = z$; l'équation eſt reduite à $vz = \frac{9}{8b}$.

3. Fig. 114. Prolongez BC, juſqu'à ce que BK ſoit $\frac{1}{2}$; comme CB eſt là $-y$, nous aurons $CK = BK - CB$, $\frac{1}{2} + y = v = IN$, étant CN & KI paralleles à AB. Maintenant coupez $AT = \frac{1}{2b}$, menez l'infinie IT parallele à CB. Coupez auſſi IV, VS parallele à AB ſuivant la raiſon de $2b$ à 1; & par les points S, I tirez l'infinie SIL: dans les triangles ſemblables ISV, INL, nous avons cette proportion $IV : VS :: 2b : 1 :: IN, v : NL, \frac{v}{2b}$; de plus $NM = AT$, $\frac{1}{2b}$, $CM = AB$, x: donc $CL = CM + MN - NL = x + \frac{1}{2b} - \frac{v}{2b} = z$.

IL, IK ſont les deux aſymptotes, parceque CL, z eſt terminée à IL, & elle eſt parallele à IK: mais CK, v n'eſt pas parallele à IL: il faut donc lui ſubſtituer CR que nous tirons parallele à IL, & qui ſera égale à $IL = \frac{v}{2b}\sqrt{5} = av$ en faiſant $\frac{1}{2b}\sqrt{5} = a$. Et enfin l'équation $vz = \frac{9}{8b}$ ſe changera en $avz = \frac{9a}{8b} = \frac{9}{16}bb\sqrt{5}$.

A préſent coupez $IO = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2b}}$, & menez OP égale à IO & parallele à IL.

Décrivez l'hyperbole CP entre les aſymptotes IL, IK, & qui paſſe par le point P. C'eſt le lieu cherché.

Dém. Par la nature de l'hyperbole entre ſes aſymptotes $IL \times LC = IO \times OP$, $azv = \frac{9a}{8b}$, $zv = \frac{9}{8b}$. De plus au point C vous trouverez l'équation propoſée, comme on l'a trouvé Art. 5. Ex. 6. dans la démonſtration n. 2°. Au point c pris dans l'angle BAH, ou $cb = +y$, vous aurez $ck = cb + bk$, $y + \frac{1}{2} = v$, & $cr = av$; $nl = \frac{v}{2b}$, $cl = cm + mn - nl$, $x + \frac{1}{2b} - \frac{v}{2b} = z$; & $cr \times cl = IO \times OP$, $auz = \frac{9a}{8b}$. Mais on y trouvera une équation differente, à ſavoir celle qui eſt Art. 5. Ex. 6. dans la même démonſtration.

ARTICLE IX.

Démonſtration que M. DESCARTES *donne du Probléme de Pappus appliqué au Cercle de Fig. 69.*

M. DESCARTES.

FIG. 69. *Demonſtration de tout ce qui vient d'être expliqué.*

ET les démonſtrations de tout ceci ſont évidentes. Car compoſant un eſpace des quantitez, que j'ai aſſignées pour le côté droit & le traverſant, & pour le ſegment du diametre NL ou OP, ſuivant la teneur de l'onziéme, du douziéme, du treiſiéme Theorême du premier Livre d'Apollonius; on trouvera tous les mêmes termes, dont eſt compoſé le quarré de la ligne CP ou CL, qui eſt appliquée par ordre à ce diametre. Comme en cet Exemple ôtant IM, qui eſt $\frac{amm}{2pz}$ de NM, qui eſt $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega+4mp}$, j'ai IN, à laquelle ajoûtant IL, qui eſt $\frac{ax}{z}$, j'ai NL, qui eſt $\frac{a}{z}x-\frac{amm}{2pz}+\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega+4mp}$; & ceci étant multiplié par $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega+4mp}$, qui eſt le côté droit de la figure, il vient $x\sqrt{\omega\omega+4mp}-\frac{mm}{2p}\sqrt{\omega\omega+4mp}+\frac{mm\omega}{2p}+2mm$ pour le rectangle, duquel il faut ôter un eſpace, qui ſoit au quarré de NL, comme le côté droit eſt au traverſant. Et ce quarré de NL eſt $\frac{aa}{zz}xx-\frac{aamm}{pzz}x+\frac{aam}{pzz}x\sqrt{\omega\omega+4mp}+\frac{aa\omega mm}{2ppzz}+\frac{aam^3}{pzz}-\frac{aamm}{2ppzz}\sqrt{\omega\omega+4mp}$, qu'il faut diviſer par aam, & multiplier par pzz; à cauſe que ces termes expliquent la proportion, qui eſt entre le côté traverſant & le droit, & il vient $\frac{p}{m}xx-\omega x+x\sqrt{\omega\omega+4mp}+\frac{\omega mm}{2p}-\frac{mm}{2p}\sqrt{\omega\omega+4mp}+mm$. Ce qu'il faut dire du rectangle precedent, & on trouve $mm+\omega x-\frac{p}{m}xx$ pour le quarré de CL, qui par conſequent eſt une ligne appliquée par ordre dans une ellipſe, ou dans un cercle, au ſegment du diametre NL.

Et ſi l'on veut expliquer toutes les quantitez données par nombres, un faiſant par exemple $EA=3$, $AG=5$, $AB=BR$, $BS=\frac{1}{2}BE$, $GB=BT$, $CD=\frac{1}{2}CR$, $CF=2CS$, $CH=\frac{1}{3}CT$, & que l'angle ABR ſoit de 60. degrez, & enfin que le rectangle des deux CB & CF, ſoit égal au rectangle des deux autres CD & CH; car il faut avoir toutes ces choſes, afin que la queſtion ſoit

entierement déterminée. Et avec cela ſuppoſant $AB = x$, & $CB = y$, on trouve par la façon ci-devant expliquée $yy = 2y - xy + 5x - xx$, & $y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{1}{4}xx}$. Si bien que BK doit être 1, & KL doit être la moitié de KI, & pource que l'angle IKL ou ABR eſt de 60. degrez, & KIL qui eſt la moitié de KIB ou IKL de 30. ILK eſt droit. Et pource que IK ou AB eſt nommée x, KL eſt $\frac{1}{2}x$, & IL eſt $x\sqrt{\frac{1}{4}}$; & la quantité qui étoit tantôt nommée z eſt 1, celle qui étoit a eſt $\sqrt{\frac{1}{4}}$, celle qui étoit m eſt 1, celle qui étoit ω eſt 4, & celle qui étoit p eſt $\frac{1}{4}$. De façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, & $\sqrt{\frac{12}{3}}$ pour NM. Et pource que aam qui eſt $\frac{1}{4}$ eſt ici égal à pzz, & que l'angle ILC eſt droit, on trouve que la ligne courbe NC eſt un cercle. Et on peut facilement examiner tous les autres cas en même ſorte.

1. Le Problême de Pappus, tel que M. DESCARTES l'a reſolû, a été propoſé en quatre lignes, Liv. 1. Part. 3. Sect. 1.

Le calcul a commencé, & la valeur des lignes cherchées CB, CD, CF, CH a été trouvée. Là même, Sect. 3.

La reſolution a été donnée, L. 2. Part. 2. Sect. 2. Art. 1. où l'on a trouvé $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$.

La conſtruction des quantitez $+ m - \frac{n}{z}x$ s'eſt faite, là même, Art. 2.

La conſtruction de $\sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}xx}$ ſe trouve. Là même, Art. 6. Exemple 13. On y voit auſſi la démonſtration. Il ne reſte plus qu'à expliquer la démonſtration que M. DESCARTES donne en cet endroit.

2. Le demi-diametre, qui juſqu'à preſent a été exprimé par $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4pzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$ s'exprime ici par $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$: & ces deux expreſſions ſont la même choſe, comme on l'apprend dans les principes de l'Algebre.

On dira le même du parametre ou côté droit $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, qui auparavant a été exprimé par $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$.

3. La démonſtration, que nous voulons ici expliquer, ſuppoſe deux proprietez de l'ellipſe & du cercle, qu'Apollonius démontre convenir à l'ellipſe dans le Theorême 13. du Liv. 1. Il faut maintenant les expliquer.

Soit Fig. 115. NCR une ellipſe, ou un cercle, dont $NR = d = 2a$ eſt un diametre; M le centre, $MN = MR = a$; $NP = p$ le parametre du diametre NR; $NL = x$ une abſciſſe de ce diametre; $CL = y$ une appliquée à ce même diametre. Joignez RP, prolongez LC juſqu'à ce qu'elle rencontre PG parallelle au diametre NL; menez encore FH parallele au même diametre. Vous aurez $HF = PG = NL$, x. FIG. 115.

Fig. 69 L'eſpace, ou rectangle $HFPG$ eſt au quarré de l'abſciſſe NL, comme le côté droit ou parametre NP eſt au côté traverſant ou diametre. C'eſt la premiere proprieté qu'il faut ici démontrer. $RN, 2a : NP, p :: HF, x : FP, \frac{px}{2a}$. De plus le rectangle $HFPG$ eſt $HF \times FP = \frac{pxx}{2a}$; & le quarré de NL eſt xx. Or $p : 2a :: \frac{pxx}{2a} : xx$: donc comme le parametre ou côté droit eſt au diametre ou côté traverſant : de même l'eſpace ou rectangle $HFPG$ eſt au quarré de l'abſciſſe NL.

La ſeconde proprieté eſt que le quarré de l'appliquée CL eſt égal au rectangle $LNPG$ ſous l'abſciſſe LN & le parametre NP, moins le rectangle $HFPG$ compris ſous $FH = LN$ & ſous HG que la ligne RP retranche de $LG = NP$ parametre : en un mot $\overline{CL}^2 = \overline{LN \times NP} - \overline{HF \times HG}$, ce qui ſe démontre ainſi. Etant $NL = x$, RL eſt $RN - NL$, $2a - x$; & le rectangle $NL \times LR$ eſt $2ax - xx$. Or par la nature de l'ellipſe & du cercle, comme le diametre $2a$ eſt au parametre p : de même $2ax - xx$ rectangle des ſegmens $NL \times LR$ du diametre eſt à yy quarré de l'appliquée CL : $2ayy = 2apx - pxx$, & $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$. D'ailleurs le rectangle $NL \times NP$ eſt px ; le rectangle $HF \times HG$ eſt $\frac{pxx}{2a}$, comme on l'a vû un peu auparavant. Donc $\overline{NL \times NP} - \overline{HF \times HG} = px - \frac{pxx}{2a} = \frac{2apx - pxx}{2a}$. Mais on vient de voir $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$: donc $\overline{CL}^2$ quarré de l'appliquée CL eſt égal au rectangle $LN \times NP$, moins le rectangle $HF \times HG$.

4. Suivons à preſent la démonſtration de M. DESCARTES. 1° IM eſt $\frac{a\omega m}{2pz}$, Reg 1. Art. 6. 2° Le parametre NP eſt Regle 5. $\sqrt{\frac{\omega\omega zz}{aa} + \frac{4mpz}{aa}}$, ou $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$; Regle 10. $pzz : aam :$: le parametre $\frac{z}{a}\sqrt{\omega\omega + 4mp} : \frac{am}{pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$, ou $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, qui eſt le diametre NR, dont la moitié MN eſt $\sqrt{\frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz}}$, ou $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. Ainſi $IN = NM - IM$ eſt $\frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{a\omega m}{2pz}$. 3° IL eſt $\frac{ax}{z}$, Art. 6. Ex. 13. n. 4. Donc $NL = IL + IN$ eſt $\frac{ax}{z} - \frac{a\omega m}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. 4° Il faut multiplier NL par le parametre NP, pour avoir le rectangle $LN \times NP = x\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{m\omega\omega}{2p} + 2mm$. 5° $\overline{NL}^2 \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{aa\omega\omega mm}{4ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mm}{2ppzz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. 6° Nous avons démontré, que comme le parametre NP eſt au diametre NR, ou Regle 10. comme pzz eſt à aam : de même le rectangle $HFGP$ eſt au quarré de NL. Donc *convertendo* comme le diametre NR eſt au parametre NP, ou comme aam à pzz : ainſi $\overline{NL}^2 = \frac{aaxx}{zz} - \frac{aa\omega mx}{pzz} + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{aa\omega\omega mm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aa\omega mm}{2ppzz}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$ eſt à l'eſpace ou rectangle $HFPG = \frac{p}{m}xx - \omega x + x\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{\omega m}{2p} + mm - \frac{\omega m}{2p}\sqrt{\omega\omega + 4mp}$. 7° Nous avons encore démontré que ſi on ôte ce rectangle $HF \times FP$ du rectangle

$LN \times NP$, qui eſt $x\sqrt{\omega\omega + 4mp} - \frac{\omega m}{\frac{1}{2}p}\sqrt{\omega\omega + 4mp} + \frac{mm}{\frac{1}{4}pp} + 2mm$; il reſtera le quarré de l'appliquée CL, $-\frac{p}{m}xx + \omega x + mm$: donc $CL = \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$. Ce qu'il falloit démontrer.

5. Ce que M. DESCARTES ajoûte touchant les valeurs de differentes quantitez ſe trouve Art. 6. Ex. 13.

ARTICLE X.

Des Lieux plans & ſolides, & de la maniere de les connoître.

M. DESCARTES.

Quels ſont les lieux plans & ſolides: & la façon de les trouver.

AU reſte à cauſe que les équations, qui ne montent que juſques au quarré, ſont toutes compriſes en ce que je viens d'expliquer; non ſeulement le Problême des Anciens en 3. & 4. lignes eſt ici entierement achevé; mais auſſi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommoient la compoſition des lieux ſolides; & par conſequent auſſi à celle des lieux plans, à cauſe qu'ils ſont compris dans les lieux ſolides. Car ces lieux ne ſont autre choſe, ſinon que lorſqu'il eſt queſtion de trouver quelque point, auquel il manque une condition pour être entierement determiné, ainſi qu'il arrive en cet Exemple, tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui eſt demandé. Et ſi cette ligne eſt droite ou circulaire on la nomme un lieu plan. Mais ſi c'eſt une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipſe, on la nomme un lieu ſolide. Et toutesfois & quantes que cela eſt, on peut venir à une équation qui contient deux quantitez inconnuës, & eſt pareille à quelqu'une de celles, que je viens de reſoudre. Que ſi la ligne qui determine ainſi le point cherché, eſt d'un degré plus compoſée que les Sections coniques, on la peut nommer en même façon un lieu ſurſolide, & ainſi des autres. Et s'il manque deux conditions à la determination de ce point, le lieu où il ſe trouve eſt une ſuperficie, laquelle peut être de même ou plate, ou ſpherique, ou plus compoſée.

Mais le plus haut but, qu'ayent eu les Anciens en cette matiere, a été de parvenir à la compoſition des lieux ſolides: & il ſemble que tout ce qu'Apollonius a écrit des Sections coniques n'a été qu'à deſſein de la chercher. De plus on voit ici que ce que j'ai pris pour

le premier genre des lignes courbes, n'en peut comprendre aucunes autres, que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'ellipſe. Qui eſt tout ce que j'avois entrepris de prouver.

1. Les lieux Geometriques ſe diviſent en lieux à la ligne, ou à la ſurface, ou au ſolide.

Les lieux à la ligne ſont ou plans, ou ſolides, ou ſurſolides.

Lorſque le lieu eſt une ligne droite, ou une ligne circulaire, il s'appelle plan. Lorſque le lieu eſt une ellipſe, ou une parabole, ou une hyperbole, il s'appelle ſolide. Lorſque le lieu eſt une ligne plus compoſée que les Sections coniques, il s'appelle ſurſolide.

L'on diviſe auſſi les lieux à la ligne courbe en differens genres, Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 1.

La conſtruction des lieux ſolides comprend celles des lieux plans. Car pour conſtruire un lieu au cercle, il ne faut pas tirer d'autres lignes que pour conſtruire un lieu à l'ellipſe : & pour conſtruire un lieu à la ligne droite, il ne faut tirer qu'une partie des lignes, qui ſervent à conſtruire un lieu ſolide, c'eſt-à-dire, dans l'Exemple de M. DESCARTES, il faut tirer les lignes qui conſtruiſent m, $\frac{n}{z}x$, car tous les lieux à la ligne droite ſe reduiſent à la formule $y = \pm m \pm \frac{n}{z}x$.

2. La difference qu'il y a entre les lieux à la ligne, à la ſurface, au ſolide, eſt telle.

Lorſqu'on cherche un point, qui ſatisfaſſe à la queſtion, & qu'aprés avoir trouvé la derniere équation il ne manque qu'une condition, afin que le point cherché ſoit entierement determiné : le lieu eſt à la ligne droite ou courbe, & tous les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui eſt demandé. Dans l'Exemple 13. Art. 6. Fig. 69. on cherche le point C ; pour déterminer ce point, il y a deux choſes à faire, deux conditions à remplir. La premiere c'eſt de fixer le point B, la longueur de la ligne AB, x, afin de voir en quel point la ligne CB doit couper la ligne AB. La ſeconde c'eſt de déterminer la longueur de la ligne BC. Car ces deux choſes étant connuës, comme d'ailleurs le point A, & l'angle ABC ſont donnez, le point C eſt évidemment trouvé.

Or quand on en eſt venu à cette derniere équation $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, qui nous marque un Problême indeterminé, il ne reſte plus qu'une des deux conditions à remplir, pour rendre le Problême déterminé ; il ne reſte plus qu'à prendre à volonté la longueur de la ligne AB, x. Car dès que je l'aurai determinée d'une telle longueur, elle me ſera connuë, & la valeur de CB, $y = m + \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + \omega x - \frac{p}{m}xx}$, ne contenant plus que des grandeurs connuës, elle me ſera auſſi connuë, & je déterminerai aiſément ſa longueur CB, & je ſaurai exactement, où eſt

le point *C*. On a vû dans tous les Exemples des Articles 3. 5. 6. 7. 8. où il ne manquoit que cette condition au point *C*, pour être entierement determiné ; que le lieu a été une ligne, & que tous les points de toute cette ligne, ou d'une de ſes parties ſatisfaiſoient à la queſtion, & pouvoient être pris pour celui, qui étoit demandé.

Lorſqu'on cherche un point, qui ſatisfaſſe à un Problême, & qu'aprés la derniere équation trouvée, il ne manque que deux conditions, afin que le point cherché ſoit entierement determiné : le lieu eſt à la ſurface plane ou courbe, & tous les points d'une ſurface finie ou infinie peuvent être pris pour celui qui eſt cherché, parceque tous donnent également la ſolution du Problême. C'eſt ce qui ſe verra dans les Problêmes 1. 2. 3. 4. 5. 6. qui ſuivent.

Mais lorſqu'on cherche un point, qui ſatisfaſſe à un Problême, & qu'après avoir trouvé la derniere équation, il manque trois conditions au point cherché, pour être entierement determiné : le lieu eſt au ſolide fini ou infini, & tous les points d'un ſolide peuvent être pris pour celui qui eſt cherché. Voyez les Problêmes 7. 8. de cet Article. M. DESCARTES * dit dans une de ſes Lettres, * que cet endroit de ſa Geometrie ſert pour les lieux *ad lineas tres & ad ſuperficiem.*

* Tom 3. Lett. 69.

Pour les lieux à la ſurface, cela eſt clair : mais pour les lieux au ſolide, ou à la quantité qui ſe meſure par trois lignes, & qui eſt de trois dimenſions, cet endroit de la Geometrie n'y peut ſervir, qu'en ce qu'il donne lieu de conclurre, que ſi les lieux à la ligne demandent, qu'il ne manque qu'une condition ; ſi les lieux à la ſurface demandent qu'il ne manque que deux conditions, afin que le point cherché ſoit entierement determiné ; les lieux au ſolide doivent ſuppoſer qu'il manque trois conditions pour cette entiere détermination.

3. M. DESCARTES conclud 1° qu'il a entierement achevé le Problême des Anciens propoſé par Pappus en trois ou quatre lignes, parcequ'il a donné la reſolution de tous les Problêmes, dont les équations contiennent le quarré des deux inconnuës, ou de l'une des deux. Il eſt certain, comme il le reconnoit lui-même, & comme on l'a remarqué, Art. 1. n. 5. qu'il faut encore la reſolution des Problêmes, dont l'équation contient le plan des inconnuës, ſans avoir aucun de leurs quarrez.

La reſolution de tous ces Problêmes étant donnée, il ſuit que le Problême de Pappus en trois ou quatre lignes eſt entierement achevé dans les cas, où la raiſon du rectangle ſous deux des lignes cherchées eſt au quarré de la troiſiéme, ou au rectangle ſous la troiſiéme & une donnée, ou au rectangle des deux autres, comme une grandeur connuë eſt à une grandeur connuë. Mais comme cette raiſon peut être differente, le Problême n'eſt pas, & ne peut pas entierement être reſolu, puiſque il peut s'étendre à toutes ſortes de dimenſions. Voyez Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 1. n. 2. 3.

M. DESCARTES conclud 2° qu'il a entierement achevé tout ce qui regarde la compoſition des lieux plans & ſolides. Ce qui ſuppoſe auſſi la compoſition des lieux ſolides, dont l'équation contient le rectangle des inconnuës, ſans avoir aucun de leurs quarrez; car alors il faut neceſſairement ſe ſervir de l'hyperbole priſe entre ſes aſymptotes.

M. DESCARTES conclud 3° que le premier genre de lignes courbes ne comprend que le cercle, l'ellipſe, la parabole, & l'hyperbole. Cela eſt vrai, & peut ſe connoître par ce raiſonnement. La valeur de y s'exprime ainſi $y = \pm_0 m \pm_0 \frac{n}{z} x \pm_0 \sqrt{\pm_0 mm \pm_0 \omega x \pm_0 \frac{\rho}{m} xx}$ ou pour renfermer l'hyperbole entre ſes aſymptotes $y = \pm_0 m \pm_0 \frac{n}{z} x \pm_0 \frac{nn}{x} \pm_0 \sqrt{\pm_0 mm \pm_0 \omega x \pm_0 \frac{\rho}{m} xx}$.

Je ſuppoſe 1° que tous les termes ſont nuls, excepté $\frac{nn}{x}$, & que l'équation eſt $y = \frac{nn}{x}$; le lieu eſt à l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, Article 8.

Je ſuppoſe 2° que le terme $\frac{nn}{x}$ eſt nul, ce qui renferme pluſieurs cas.

Si ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt nul, ou ſi l'on en peut extraire la racine quarrée; le lieu eſt à la ligne droite, Art. 3.

Si l'on ne peut pas extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical, & que la quantité $\frac{\rho}{m} xx$ ſoit nulle; le lieu eſt à la parabole Article 4. 5.

Si l'on ne peut pas extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical, & qu'il y ait $-\frac{\rho}{m} xx$; le lieu eſt au cercle ou à l'ellipſe. Art. 4. 6.

Si l'on ne peut pas extraire la racine quarrée de ce qui eſt ſous le ſigne radical, & qu'il y ait $+\frac{\rho}{m} xx$; le lieu eſt à l'hyperbole, Art. 4. 7. 8.

Je n'ai pas mis le cas où les deux termes $\frac{nn}{x} + \sqrt{mm + \omega x + \frac{\rho}{m} xx}$ ſe rencontrent, parceque $y = \frac{nn}{x} + \sqrt{mm + \omega x + \frac{\rho}{m} xx}$ eſt une équation du quatriéme degré, & du ſecond genre.

Voilà toutes les differentes valeurs poſſibles de y, c'eſt-à-dire, toutes les differentes reſolutions poſſibles des Problêmes, dont les équations ont des inconnuës, qui ne montent enſemble ou ſeparément qu'à deux dimenſions. Or ces équations ne conviennent pas à d'autres courbes, qu'au cercle, ou à l'ellipſe, ou à la parabole, ou à l'hyperbole: & les courbes à qui ces équations conviennent ſont du premier genre, Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 1. Donc le premier genre de lignes courbes ne comprend que le cercle, l'ellipſe, la parabole, & l'hyperbole.

4. Il reſte à apporter des Problêmes à la ſurface & au ſolide, & à montrer qu'il manque deux conditions dans les Problêmes à la ſurface, & trois dans les Problêmes au ſolide. Mais il faut remarquer que ces deux ſortes de

de Problêmes ne ſont pas proprement des Problêmes, mais des Theorêmes, ſuivant ce qui a été dit Liv. 1. Part. 1. Sect. 4. Regle 10. Ainſi le Problême VI. qui ſert à l'explication de cette Regle eſt un Problême à la ſurface. Venons à d'autres Exemples.

PROBLEME I.

1. ETant donné Fig. 17. le rectangle MR, trouver dans ce rectangle le point A, par lequel ayant tiré la ligne GAH parallele aux côtez MN, PR, & la ligne FAK parallele aux côtez MP, NR; il ſe faſſe quatre rectangles PA, AR, MA, AN, qui ſoient en proportion Geometrique. FIG. 17.

Nommons $MN, a = PR$; $MP, b = KF = NR$; $PF, x = MK$; $FA, y = PG = HR$; $FR = PR - PF$, $a - x = KN$; $GM = MP - PG$, $b - y = NH$.

L'on demande que $GP \times PF$ ſoit à $FR \times RH$: comme $GM \times MK$ eſt à $KN \times NH$, c'eſt-à-dire en termes analytiques $xy : ay - xy :: bx - xy : ab - bx - ay + xy$. $o = o$, parceque les termes ſont les mêmes dans les deux membres de l'équation, & toutes les conditions du Problême étant remplies, les deux inconnuës x, y ne ſont point determinées, & demeurent arbitraires. Mais pour reſoudre le Problême il y avoit deux choſes à faire : la premiere étoit de déterminer le point F, ou la grandeur de $PF = x$, afin qu'on ſçût, où l'on devoit élever la ligne FK; la ſeconde étoit de déterminer le point A, ou la grandeur de $FA = y$, afin qu'on connût par quel point il falloit mener la ligne GAH. Après la reſolution du Problême ces deux conditions manquent au point A, afin qu'il ſoit déterminé; puiſque je ne connois ni ſur quel point F de la ligne PR il faut élever FK, ni par quel point A de la ligne FK il faut tirer GH. Le lieu eſt donc à la ſurface, tous les points de la ſurface déterminée MR ſatisfont au Problême, & peuvent être pris pour le point cherché.

En effet il eſt évident, qu'en quelque endroit du rectangle MR, que l'on fixe le point A, l'on aura toûjours les mêmes quantitez, la même proportion & la même équation.

PROBLEME II.

UN triangle équilateral ABC Fig. 116. étant donné, trouver dans ce triangle un point E, duquel ayant tiré ſur chaque côté une perpendiculaire EF, EG, EH; ces trois lignes ſoient enſemble égales à la perpendiculaire BD, tirée du ſommet B ſur le côté oppoſé AC. FIG. 116.

Suppoſons la choſe faite & prolongeons EF juſqu'à ce qu'elle coupe le côté AB en I, & le côté CB prolongé en K. Nommons à preſent les données AB, $2a = AC = BC$; AD, $a = DC$; BD, b; les inconnuës AF, x; FE, y; $FC = AC - AF$, $2a - x$.

$AD, a : DB, b :: AF, x : FI, \frac{bx}{a}$; & $IE = IF - EF$, $\frac{bx}{a} - y$,

CD, $a : DB$, $b :: CF$, $2a - x : FK$, $2b - \frac{bx}{a}$; & $EK = FK - EF$, $2b - \frac{bx}{a} - y$. Après cela les triangles ADB, GEI ſont auſſi équiangles, donc AB, $2a : AD$, $a :: IE$, $\frac{bx}{a} - y : EG$, $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Enfin les triangles BDC, KEH ſont encore équiangles : donc BC, $2a : CD$, $a :: KE$, $2b - \frac{bx}{a} - y : EH$, $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Maintenant l'on demande $EF + EG + EH = BD$, $y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y + b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y = b$, $b = b$, $o = o$. Car tous les termes s'effacent.

La derniere équation laiſſe x & y indéterminées ; les deux choſes, qui peuvent fixer le point E, manquent donc : & le lieu eſt à la ſurface déterminée ABC, tous les points compris dans ce triangle ſatisfont à la queſtion.

PROBLEME III.

FIG. 117. ETant donné un cercle Fig. 117. & ſes deux diametres AB, DE, qui ſe coupent à angles droits ; trouver dans un des quarts de cercle, le point F, duquel ayant tiré ſur AB la perpendiculaire FH, ſur ED la perpendiculaire FG ; le rectangle $FG \times GE +$ le rectangle $FH \times HB$ ſoient égaux au rectangle $FG \times GD +$ le rectangle $FH \times HA$.

Nommez le rayon AC, $a = CB = CE = CD$; FG, $x = HC$; CG, $y = FH$; $AH = AC - CH$, $a - x$; $BH = BC + CH$, $a + x$; $EG = EC - CG$, $a - y$; $DG = CD + CG$, $a + y$.

L'équation ſe reduira à $o = o$; y & x ſont indéterminées, & le lieu eſt à la ſurface terminée courbe $EADB$.

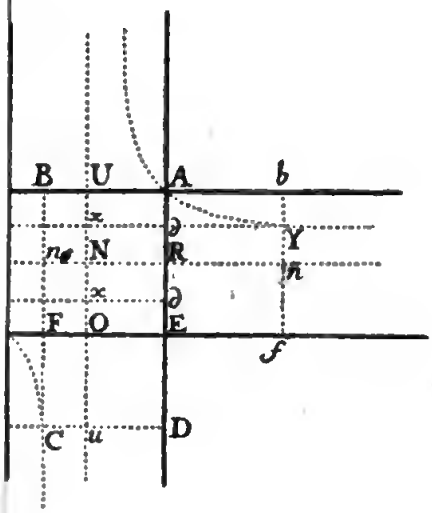
PROBLEME IV.

FIG. 118. ETant donné le parallelogramme $ABED$, trouver en dehors de ce parallelogramme un point H, duquel ayant tiré HCF par le point C milieu de la diagonale ; le parallelogramme ſe trouve partagé en deux parties égales.

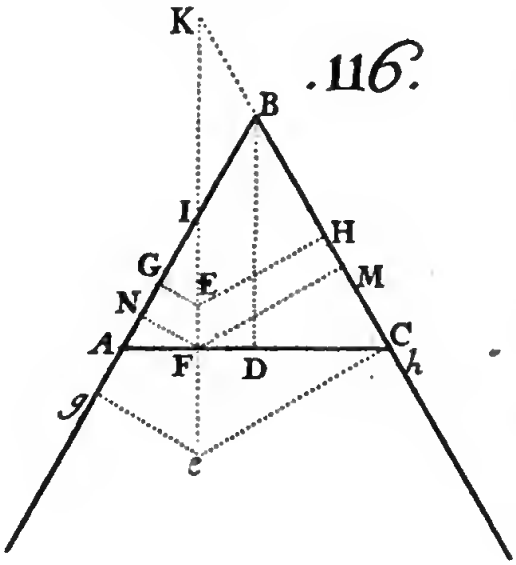
On prolongera AD en M, on menera HL parallele à AD, juſqu'à ce qu'elle coupe les lignes BA, ED prolongées, s'il eſt neceſſaire.

Nommons à preſent les connuës AB, $a = DE$; AD, $b = BE$; les inconnuës DK, $x = AL$; KH, y ; $HL = HK + KL$, $y + b$; DG, $z = FB$; $LF = LA + AB - FB$, $x + a - z$; $KG = DK + DG$, $x + z$; DM, v.

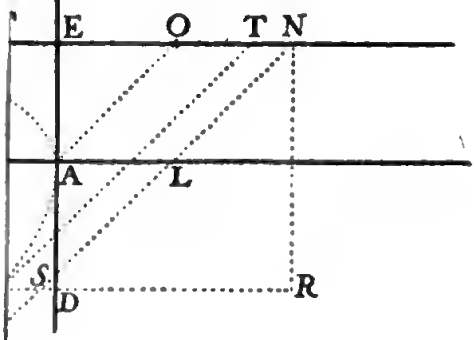
On a ces Analogies $KG : KH :: DG : DM$. $v = \frac{yz}{x+z}$. $DM : DG :: HL : LF$. $v = \frac{yz + bz}{x + a - z} = \frac{yz}{x+z}$, d'où l'on forme $z = \frac{ay - bx}{2y + b}$. De plus $KH : KG :: LH : LF$. $z = \frac{ay - bx}{2y + b} = \frac{ay - bx}{2y + b}$. Les deux quantitez x, y demeurent inconnuës ; le Problême eſt donc à la ſurface infinie ; la ſolution ſeroit la même ſi l'on avoit fait le calcul au point h.



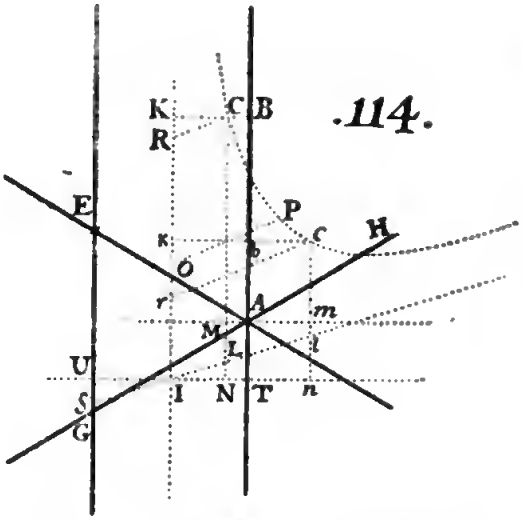
.116.



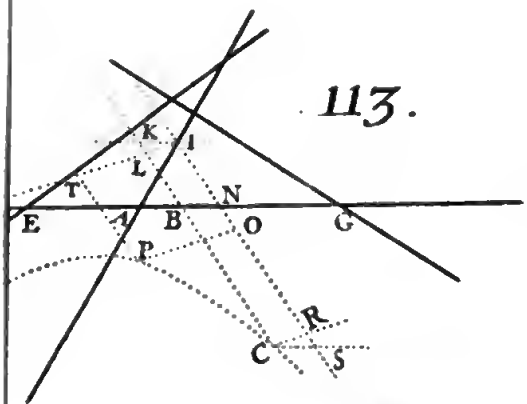
.112.

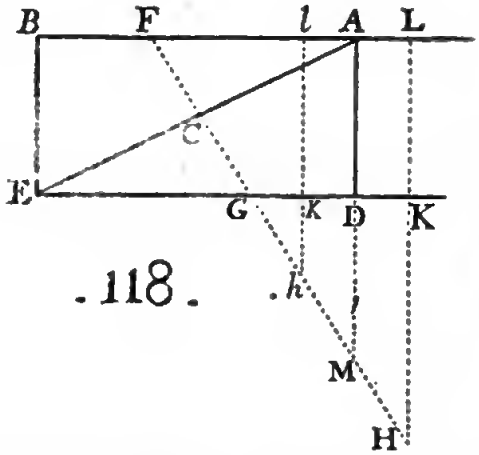


.114.



.113.





.118.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EM. NAPOLI

Foex. Fecit.

PROBLEME V.

TRouver ſur la ſurface convexe d'un cylindre droit *ABCD*, Fig. 119. un point *E*, par lequel faiſant paſſer un plan *ENH*, qui ne ſoit pas parallele à la baſe *CYD*; la ſection *ENHM* de ce plan avec le cylindre ſoit une ellipſe. Fig. 119.

1. Par le point *E* & par l'axe *XY* du cylindre faiſons paſſer le plan *ABCD*: ce plan eſt évidemment un parallelogramme par l'axe du cylindre.

2. Soit la ligne *EH* la commune Section du parallelogramme par l'axe & de la Section cherchée *ENHM*. Les lignes *EH*, *XY* ſont dans le plan du parallelogramme. Menez *EG*, *FH* paralleles aux diametres paralleles *AB*, *CD* des cercles, qui terminent le cylindre: les lignes *GE*, *FH* ſeront paralleles; & les lignes *EV*, *AX*; *ZH*, *YD* ſont égales. Ainſi les triangles *ELV*, *LZH*, qui ont les angles en *L* égaux, les angles *LEV*, *LHZ* égaux, les côtez *EV*, *ZH* égaux, ſeront égaux. Donc $EL = LH$, & *EH* eſt diviſée en deux parties égales au point *L*.

3. Suppoſons que le plan *ENHM* eſt droit au plan du parallelogramme *ABCD* par l'axe; c'eſt-à-dire que *pr* commune Section du plan prolongé *ENHM* avec *CD* baſe prolongée du parallelogramme *ABCD* par l'axe, faſſe les angles *Dpr*, *Hpr* droits.

4. Par le point *L* faiſons auſſi paſſer le plan *INKM* parallele à la baſe, cette Section eſt un cercle par la nature du cylindre, & *L* eſt ſon centre, & $IL = LK$. De plus *NM* commune Section de ce cercle, & de la Section cherchée *ENHM*, paſſe par le centre *L*, & eſt un diametre.

5. Les plans *INKM*, *CcD* ſont paralleles & coupez par le plan prolongé *ENHM*: donc 16. 11. Eucl. les Sections, *NL*, qui eſt dans le plan *INKM*, *pr*, qui eſt dans le plan *Ccd* prolongé ſont paralleles. Mais les angles *Hpr*, *Dpr* ſont droits: donc les angles *ELN*, *ILN* ſont auſſi droits, 29. 1. Eucl. & *NL* eſt une appliquée à l'axe *EH* de la Section cherchée, & au cercle *INK*.

6. Après avoir tiré *AR* parallele à *EH*, faiſons paſſer par le point *R* le plan *PTR* parallele à la baſe; ce ſera un cercle, dont la commune Section avec la Section *ENHM* ſoit *TSQ*. L'on démontrera, comme dans le cercle *INKM*, que les angles *TSE*, *TSP* ſont droits, & que *TS* eſt une appliquée & à *EH* axe de la Section cherchée, & à *PR* diametre du cercle.

7. Nous pouvons maintenant appeller les connuës *AB*, $2a = PR = IK$; *IL*, $a = LK$; les inconnuës *AE*, *x*; *EF*, *y*; *EH*, $2z$; *EL*, $z = LH$. Les triangles *APR*, *EFH* ſont équiangles, & ils ont les côtez $AR = EH$: donc $AP = EF, y$; & $EP = AP - AE, y - x$. Les triangles *EPS*, *EFH* ſont auſſi équiangles; donc $EF, y : EP, y - x ::$

$EH, 2z : ES, \frac{2zy-2xz}{y}$; & $SH = EH - ES, 2z - \frac{2yz+2xz}{y} = \frac{2xz}{y}$. Les triangles EPS, ELI ſont encore équiangles; donc $EL, z : LI, a :: ES, \frac{2yz-2xz}{y} : SP, \frac{2ay-2ax}{y}$; & $SR = PR - PS, 2a - \frac{2ay+2ax}{y} = \frac{2ax}{y}$.

8. A preſent par la nature de l'ellipſe $\overline{TS}^2 : \overline{NL}^2 :: ES \times SH : EL \times LH$, & par la nature du cercle $\overline{TS}^2 = PS \times SR, \overline{NL}^2 = IL \times LK$.

Il faut mettre dans la premiere Analogie $PS \times SR$ pour $\overline{TS}^2$, $IL \times LK$ pour $\overline{NL}^2$: l'on aura $PS \times SR, \frac{4aaxy-4aaxx}{yy} : IL \times LK, aa :: ES \times SH, \frac{4xyzz-4xxzz}{yy} : EL \times LH, zz$. Donc $\frac{4aaxyzz-4aaxxzz}{yy} = \frac{4aaxyzz-4axxzz}{yy}$. $o = o$. Le lieu eſt à la ſurface courbe infinie du cylindre, & tous les points de cette ſurface peuvent être pris pour celui qu'on cherche : pourveu que les points E, H, ſoient pris ſur les deux côtez oppoſez du parallelogramme par l'axe, l'un plus près que l'autre de la baſe; & que par ces points E, H, on faſſe paſſer un plan $ENHM$ perpendiculaire au parallelogramme. Il manque deux conditions pour déterminer le Problème : la premiere eſt le point E, ou la longueur AE, x; la ſeconde eſt le point H, ou la longueur de GH, ou de EF, y.

PROBLEME VI.

FIG. 116. ETant donné Fig. 116. le triangle équilateral ABC, trouver au dehors de ce triangle le point e, duquel ayant tiré ſur les côtez prolongez, où il le faut, les perpendiculaires eF, eg, eh; la difference de la perpendiculaire eF tirée ſur AC & de la ſomme des deux autres eg, eh ſoit égale à la perpendiculaire BD abbaiſſée du ſommet B ſur le même côté AC.

Après avoir donné les mêmes lettres aux lignes qui ſont ici les mêmes qu'au Problème II. l'on aura $FI = \frac{bx}{a}$; mais Ie ſera ici $\frac{bx}{a} + y$; on aura $FK = 2b - \frac{bx}{a}$; mais eK ſera ici $2b - \frac{bx}{a} + y$. Les triangles ſemblables BDA, Ieg donnent cette Analogie, $Ab, 2a : AD, a :: Ie, \frac{bx}{a} + y : eg, \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y$. Et les triangles équiangles BDC, heK celle-ci, $BC, 2a : DC, a :: Ke, 2b - \frac{bx}{a} + y : eh, b - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y$. Maintenant l'on demande $eh + eg - eF = BD$, c'eſt-à-dire en termes Algebriques $b - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y - y = b$; $b = b, o = o$. Et le Problème eſt à la ſurface plane infinie hors du triangle, & tous les points de cette ſurface peuvent être pris pour celui qu'on cherche. Deux conditions $AF = x$, $eF = y$ reſtent indéterminées.

PROBLEME VII.

FIG. 120. ETant donné Fig. 120. un parallelepipede droit $uyhk$, trouver dans ce ſolide un point a, par lequel faiſant paſſer trois plans $ftqr, ixCm, nAzp$ paralleles chacun à deux ſurfaces oppoſées du parallelepipede : il reſulte huit nouveaux parallelepipedes, qui faiſent quatre à quatre deux proportions, c'eſt-à-dire, que $aeft : aefl :: aegD : aegq$. & $adfb : adfr :: adgf : adgr$.

Suppoſons la choſe faite, & nommons les connuës Hl, $a = pn = kh = rq = de = ſt = uy = zA = BD$. lh, $b = im = Hk = qt = cb = rs = yD = xC = uB$. hD, $c = mC = kB = nA = fg = pz = ly = ix = Hu$. Et les inconnuës mh, $z = fn = il = bt = ae = cq = DC = gA = xy$. $mk = kh - mh$, $a - z = fp = iH = re = da = sb = BC = zg = xu$. th, $y = bm = sk = en = af = dp = ql = ci = rH$. $tD = Dh - th$, $c - y = Cb = Bs = Ae = ga = zd = yq = xe = ur$. hn, $x = fm = pk = te = ab = ds = DA = Cg = zB$. $ln = lh - nh$, $b - x = if = Hp = qe = ca = rd = yA = xg = uz$.

De ſorte que les parallelepipedes ſeront 1° $aeft = xzy$, 2° $aefl = bzy - xzy$, 3° $aegD = cxz - xyz$, 4° $aegq = bcz - bzy - czx + xyz$, 5° $adfb = axy - xzy$, 6° $adfr = aby - axy - bzy + xzy$, 7° $adgs = -axy + xyz + acx - cxz$, 8° $adgr = -aby + axy + bzy - xzy + abc - acx - bcz + cxz$.

Les deux proportions Geometriques donneront $o = o$. Le lieu eſt au ſolide fini $uyhk$, de ſorte que tous les points du parallelepipede propoſé peuvent être pris pour celui qui eſt demandé, & ſatisfont au Problème. Les trois conditions qui manquent pour déterminer le point a ſont celles-ci. 1. Il faut déterminer $hm = z$, & le point m, par lequel le plan $ixCm$ doit paſſer. 2. Il faut déterminer $ht = y$, & le point t, par lequel le plan $tqrs$ doit paſſer. 3. Il faut déterminer $hn = x$, & le point n, par lequel le plan $nAzp$ doit paſſer. Car ces trois plans n'ont que le point a de commun, & le déterminent par leurs interſections.

PROBLEME VIII.

ETant donnée la Sphere BGD Fig. 121. trouver un point C hors de cette Sphere, & un diametre EG dans la Sphere, tels, qu'ayant tiré la perpendiculaire CFD; on ait $CB \times CD = \overline{CF}^2 - \overline{FB}^2$. Fig. 121.

Je ſuppoſe la choſe faite, & parceque 2. 11. Eucl. les lignes BD, EG ſont dans un même plan, je fais paſſer un plan par ces lignes, qui ſera le cercle $BGDE$, car toute Section d'une Sphere eſt un cercle par la Propoſition 1. du Liv. 1. des Spheriques de Theodoſe, & le centre de ce cercle ſera A centre de la Sphere. Je tire les rayons AB, AD.

Je nomme les connuës $AB = AD$, a; les inconnuës AF, y; CB, x. BF eſt égal à FD. De plus $\overline{BF}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{AF}^2 = aa - yy$; & $BF = \sqrt{aa - yy} = FD$; $BD = 2\sqrt{aa - yy}$; $CF = CB + BF$, $x + \sqrt{aa - yy}$; $CD = CB + BD$. $x + 2\sqrt{aa - yy}$.

Par la ſuppoſition $CB \times CD = \overline{CF}^2 - \overline{FB}^2$. Ce qui s'exprime ainſi $xx + 2x\sqrt{aa - yy} = xx + 2x\sqrt{aa - yy} + aa - yy - aa + yy$; $o = o$. Le Problème eſt donc au ſolide infini, qui entoure la Sphere donnée BGD. Car le diametre GE, le point F de ce diametre, la longueur

de la perpendiculaire FC demeurent inconnuës ; trois choſes qu'il auroit fallu déterminer afin que le point C & le Problême euſſent été déterminez. Il eſt donc libre, de tirer le diametre GE tel qu'on voudra dans la Sphere, de choiſir le point F tel qu'on voudra ſur ce diametre, de faire la perpendiculaire FC de la longueur qu'on voudra : le point C ſatisfera toûjours à la queſtion. C'eſt la propoſition ſixiéme du Liv. II. des Elemens d'Euclide.

SECTION III.

Solution particuliere du Problême de Pappus, lorſqu'il eſt propoſé en cinq lignes.

M. DESCARTES.

Quelle eſt la premiere & la plus ſimple de toutes les lignes courbes, qui ſervent en la queſtion des Anciens, quand elle eſt propoſée en cinq lignes.

QUe ſi la queſtion des Anciens eſt propoſée en cinq lignes, qui ſoient toutes paralleles ; il eſt évident que le point cherché ſera toûjours en une ligne droite. Mais ſi elle eſt propoſée en cinq lignes, dont il y en ait quatre, qui ſoient paralleles, & que la cinquiéme les coupe à angles droits, & même que toutes les lignes tirées du point cherché les rencontrent auſſi à angles droits, & enfin que le parallelepipede compoſé de trois des lignes ainſi tirées ſur trois de celles qui ſont paralleles, ſoit égal au parallelepipede compoſé des deux lignes tirées, l'une ſur la quatriéme de celles qui ſont paralleles, & l'autre ſur celle qui les coupe à angles droits, & d'une troiſiéme ligne donnée. Ce qui eſt ce ſemble le plus ſimple cas qu'on puiſſe imaginer après le precedent ; le point cherché ſera en la ligne courbe, qui eſt décrite par le mouvement d'une parabole en la façon * ci-deſſus expliquée.

* *Part* 1. *Sect* 4. §. 2. *n.* 6.

Soient par exemple Fig. 122. les lignes cherchées AB, IH, ED, GF, & GA, & qu'on demande le point C, en ſorte que tirant CB, CF, CD, CH & CM à angles droits ſur les données, le parallelepipede des trois CF, CD, & CH ſoit égal à celui des deux autres CB & CM, & d'une troiſiéme qui ſoit AI. Je poſe $CB = y$; $CM = x$; AI ou AE, ou $GE = a$; de façon que le point C étant entre les lignes AB & DE, j'ai $CF = 2a - y$; $CD = a - y$, & $CH = y + a$; & multipliant ces trois l'une par l'autre,

FIG. 122.

j'ai $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ égal au produit des trois autres, qui eſt axy. Après cela je conſidere la ligne courbe CEG, que j'imagine être décrite par l'interſection de la parabole CKN, qu'on fait mouvoir en telle ſorte que ſon diametre KL eſt toûjours ſur la ligne droite AB, & de la Regle GL, qui tourne cependant autour du point G, en telle ſorte qu'elle paſſe toûjours dans le plan de cette parabole par le point L. Et je fais $KL = a$, & le côté droit principal, c'eſt-à-dire, celui qui ſe rapporte à l'aiſſieu de cette parabole auſſi égal à a, & $GA = 2a$; & CB ou $MA = y$, & CM ou $AB = x$. Puis à cauſe des triangles ſemblables GMC, & CBL; GM qui eſt $2a - y$ eſt à MC qui eſt x, comme CB qui eſt y eſt à BL qui par conſequent eſt $\frac{xy}{2a-y}$. Et pourceque LK eſt a, BK eſt $a \frac{-xy}{2a-y}$ ou bien $\frac{2aa-ay-xy}{2a-y}$.

Et enfin pourceque ce même BK étant un ſegment du diametre de la parabole eſt à BC qui lui eſt appliquée par ordre, comme celle-ci eſt au côté droit, qui eſt a, le calcul montre que $y^3 - 2ayy - ayy + 2a^3$ eſt égal à axy; & par conſequent que le point C eſt celui qui étoit demandé. Et il peut être pris en tel endroit de la ligne CEG qu'on veuille choiſir, ou auſſi en ſon adjointe $cEGc$, qui ſe décrit en même façon, excepté que le ſommet de la parabole eſt tourné vers l'autre côté, ou enfin en leurs contrepoſées NIo, nIO, qui ſont décrites par l'interſection que fait la ligne GL en l'autre côté de la parabole KN.

Or encore que les paralleles données AB, IH, ED, & GF ne fuſſent point également diſtantes, & que GA ne les coupât point à angles droits, ni auſſi les lignes tirées du point C vers elles; ce point C ne laiſſeroit pas de ſe trouver toûjours en une ligne courbe, qui ſeroit de cette même nature. Et il s'y peut auſſi trouver quelquefois, encore qu'aucune des lignes données ne ſoient paralleles. Mais lorſqu'il y en a quatre ainſi paralleles, & une cinquiéme qui les traverſe : & que le parallelepipede de trois des lignes tirées du point cherché, l'une ſur cette cinquiéme, & les deux autres ſur deux de celles qui ſont paralleles, ſoit égal à celui des deux tirées ſur les deux autres paralleles, & d'une autre ligne donnée : ce point

cherché eſt en une ligne courbe d'une autre nature, à ſavoir en une qui eſt telle, que toutes les lignes droites appliquées par ordre à ſon diametre étant égales à celles d'une Section conique, les ſegmens de ce diametre, qui ſont entre le ſommet & ces lignes, ont même proportion à une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux ſegmens du diametre de la Section conique, auſquels les pareilles lignes ſont appliquées par ordre. Et je ne ſaurois veritablement dire que cette ligne ſoit moins ſimple, que la precedente, laquelle j'ai crû toutesfois devoir prendre pour la premiere, à cauſe que la deſcription, & le calcul, en ſont en quelque façon plus faciles.

Les choſes dont nous parlerons ici ſont 1. la ſolution du Problême de Pappus, lorſque les cinq lignes données ſont toutes paralleles à une ſeule. 2. Lorſque il y a quatre lignes données paralleles, & une cinquiéme qui les coupe. 3. Quelle eſt la ligne la plus ſimple, qui ſatisfaſſe au Problême de Pappus, lorſqu'il eſt propoſé en cinq lignes. 4. Parceque M. DESCARTES, Liv. 1. Part. 3. Sect. 2. a dit, que le Problême de Pappus étant propoſé en cinq lignes, les points cherchez peuvent ſe trouver en une ligne droite, en un cercle, & en une des Sections coniques, nous en donnerons quelques Exemples. Bien plus trois ou quatre lignes étant données, nous montrerons que ces points peuvent être ſur une courbe d'un genre plus élevé. 5. Avant que de finir cette ſeconde Partie nous examinerons ſi la queſtion de Pappus peut être propoſée d'une maniere entierement impoſſible. 6. Nous ajoûterons ce que M. DESCARTES dit encore ici touchant les differentes eſpeces de courbes & leur deſcription.

ARTICLE I.

Les cinq lignes données ſont paralleles à une ſeule.

LOrſque les cinq lignes données ſont toutes paralleles à une ſeule, Mr DESCARTES dit dans cette Section, qu'il eſt évident que le point cherché eſt dans une ligne droite. C'eſt ce qui ſe conclurra de la conſtruction des Exemples qu'on apportera. Et il a dit Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. que ce point ne peut être trouvé avec la Regle & le Compas, à *cauſe que la quantité* x *ne ſe trouvant point en toute l'équation, il ne ſera plus permis de prendre une quantité connuë pour celle qui eſt nommée* y ; *mais ce ſera elle qu'il faudra chercher ; & pour ce qu'elle aura trois dimenſions, on ne la pourra trouver, qu'en tirant la racine d'une équation cubique ; ce qui ne ſe peut generalement faire, ſans qu'on y employe pour le moins une Section conique.* La racine cubique ſera extraite

extraite ſans le ſecours d'aucune Section conique, Ex. 1. 2. & par le moyen d'une telle Section, Exemple 3.

EXEMPLE I. $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = 64a^3$.

SOient données Fig. 124. les cinq lignes paralleles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff: il faut trouver un point C, duquel ayant tiré ſur les données les perpendiculaires CA, CB, CD, CE, CF; le parallelepipede ſous CB, CD, CE ſoit égal au parallelepipede ſous CA, CF, & la donnée $BD = a = 1$. Fig. 124.

La diſtance des paralleles eſt connuë : que DE ſoit $2a$; AB, $\sqrt{65aa} = BF$; CB, y; $CD = CB - BD$; $y - a$; $CE = CB - BE$, $y - 3a$; $CA = CB + BA$, $y + \sqrt{65aa}$; $CF = BF - CB$, $\sqrt{65aa} - y$.

Puiſque l'on demande $CB \times CD \times CE = CA \times CF \times a$; l'équation ſera $y^3 - 4ayy + 3aay = -ayy + 65a^3$; $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = 64a^3$, ou $y^3 - 3ayy + 3aay - 65a^3 = 0$. Extrayez la racine cubique de $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = 64a^3$ ſelon la methode ordinaire de l'Algebre, vous aurez $y - a = 4a$; $y = 5a$. Que ſi vous extrayez les racines de $y^3 - 3ayy + 3aay - 65a^3 = 0$. Selon la methode de Liv. 3. Part. 3. Sect. 2. en diviſant par $y - 5a = 0$; le quotient eſt $yy + 2ay + 13aa = 0$, dont les racines ſont $y = -a \pm \sqrt{-12aa}$: ainſi vous trouvez trois racines, la premiere $y - 5a = 0$, ou $y = 5a$; la ſeconde $y = -a + \sqrt{-12aa}$, la troiſiéme $y = -a - \sqrt{-12aa}$; les deux dernieres ſont imaginaires; la premiere, qui eſt la même, que la methode ordinaire avoit trouvée, ſe conſtruit ainſi.

Faites $BC = 5a$, par le point C menez la ligne Cc parallele à Bb, elle eſt le lieu cherché. Au point c tirez des lignes paralleles aux autres cb à CB, cd à CD, &c.

Dém. Vous avez $cb = CB$, y; $cd = CD$, $y - a$; $ce = CE$, $y - 3a$; $ca = CA$, $y + \sqrt{65aa}$; $cf = CF$, $\sqrt{65aa} - y$: & l'équation $y^3 - 4ayy + 3aay = -ayy + 65a^3$, comme auparavant au point C.

EXEMPLE II. $y^3 - 14ayy + 20aay + 224a^3 = 0$.

SOient données, Fig. 125. les cinq lignes paralleles entr'elles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff: il faut trouver un point C, duquel ayant tiré les lignes CA, CB, CD, CE, CF, faiſant avec les données un angle droit; le parallelepipede ſous CB, CE, CF ſoit égal au parallelepipede ſous CA, CD & une donnée $BF = 4a$. Fig. 125.

Parcequ'on connoît les diſtances des lignes données : que BA ſoit $8a$; BD, $7a$, DE, a; EF, $2a$; BF, $4a$; BE, $6a$; CB, y; donc CA, $y + 8a$, CD, $y - 7a$; CE, $y - 6a$, CF, $y - 4a$.

L'équation ſera $y^3 - 14ayy + 20aay + 224a^3 = 0$ dont les racines ſont $y = 8a$, $y = 3a \pm \sqrt{37aa}$.

La racine $y = 8a$ ſe conſtruit en prenant $BC = 8a$ & menant Ce parallele à Bb.

La racine $y = 3a + \sqrt{37aa}$ ſe conſtruit en prenant $BK = 3a + \sqrt{37aa}$, & la racine $y = 3a - \sqrt{37aa}$ en prenant $Bk = -3a + \sqrt{37aa}$: les lignes qui ſeront tirées par K, k paralleles à Bb ſatisferont au Problême.

1° Au point K, nous trouvons les mêmes valeurs, qu'au point C, donc l'équation ſera la même. 2° Au point k nous avons kB, $-y$; kA, $8a + y$; kF, $-y + 4a$; kE, $-y + 6a$; kD, $-y + 7a$, & la même équation qu'auparavant.

Dans ces deux Exemples l'on ne s'eſt pas ſervi d'aucune Section conique, mais la diviſion a ſuffit. La conſtruction de ces deux Exemples vous montre que les lieux cherchez peuvent être dans une ligne droite, lorſque les lignes données ſont toutes paralleles à une ſeule.

EXEMPLE III. $y^3 - 6ayy + 9aay + 2a^3 = 0$.

FIG. 126. SOient Fig. 126. données les cinq lignes toutes paralleles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff. Il faut trouver le point C d'où ayant tiré ſur les données les lignes CA, CB, CD, CE, CF, faiſant avec elles des angles de 60. degrez; le parallelepipede ſous CA, CD, CE ſoit égal au parallelepipede ſous CB, CF, & une ligne donnée égale à $4a$.

Suppoſez la choſe faite, & parcequ'on connoît les angles que les cherchées ſont avec les données, l'on connoît auſſi les lignes AB, BD, $DE = a$; $EF = \frac{1}{2}a$; CB, y; CA, $y + a$; CD, $y - a$, CE, $y - 2a$; CF, $y - \frac{3}{2}a$.

L'équation ſera $y^3 - 6ayy + 9aay + 2a^3 = 0$.

Si vous voulez la conſtruire, & pour cela connoître ſes racines; la Methode, dont je me ſuis ſervi aux deux Exemples precedens ne ſuffit pas; il faut par l'interſection d'un cercle & d'une parabole découvrir la ſeule racine CB de l'équation, comme on le fera Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. La ligne Ce parallele à Bb eſt le lieu cherché.

Dém. Comme aux Exemples 1. 2.

ARTICLE II.

Quatre lignes ſont paralleles, & une cinquiéme les coupe.

FIG. 122. 123. 57. LE cas le plus ſimple, après le precedent, dans lequel le Problême de Pappus a été propoſé en cinq lignes toutes paralleles à une ſeule; c'eſt ſelon M. DESCARTES, le cas dans lequel ce Problême eſt propoſé en cinq lignes, dont quatre ſont paralleles à une ſeule, & la cinquiéme les coupe; comme Fig. 122. 123. 57.

Les deux differentes combinaiſons, qu'on peut faire des lignes cherchées qui ſe multiplient avec une donnée, fourniſſent deux courbes de nature differente.

1. Si l'on demande que le parallelepipede compoſé par la multiplication de trois des lignes cherchées tirées ſur trois des données qui ſont paralleles, ſoit égal au parallelepipede compoſé 1° des deux autres lignes cherchées, tirées l'une ſur la quatriéme donnée parallele, l'autre ſur celle qui coupe les paralleles; 2° d'une troiſiéme ligne donnée : alors le point cherché eſt ſur la courbe décrite, Part. 1. Sect. 4. §. 2. n. 6. que nous appellons ici la premiere eſpece de courbes. Au reſte en gardant cette condition dans la multiplication des lignes, l'on fait quatre combinaiſons differentes que l'on conſtruira dans les quatre premiers Exemples. La premiere que M. DESCARTES a conſtruite, eſt, $CD \times CF \times CH = CB \times CM \times a$; la ſeconde $CB \times CF \times CH = CD \times CM \times a$; la troiſiéme $CB \times CD \times CF = CH \times CM \times a$; la quatriéme $CB \times CD \times CH = CF \times CM \times a$.

Toutes ces choſes étant ſuppoſées, il peut encore arriver, ou en premier lieu que les quatre paralleles ſoient également éloignées l'une de l'autre, que la cinquiéme les coupe à angles droits, que les lignes cherchées ſoient perpendiculaires ſur les données, comme Ex. 1. 2. 3. 4. Ou en ſecond lieu que, tout le reſte demeurant le même, la diſtance des paralleles ſoit differente, comme Exemple 5. ou en troiſiéme lieu, que la cinquiéme ligne ne coupe pas les quatre paralleles à angles droits, comme Exemple 6. ou en quatriéme lieu que les lignes cherchées ne ſoient pas perpendiculaires aux données, comme Exemple 6. Dans tous ces cas la courbe cherchée eſt de même nature. Il peut auſſi arriver en cinquiéme lieu qu'aucune des données ne ſoit parallele à une autre, & que les cherchées faſſent differens angles avec les données, & que la courbe ſoit encore de même nature, comme Exemple 7.

2. Lorſqu'il y a quatre lignes ainſi paralleles, & une cinquiéme qui les traverſe; & que le parallelepipede de trois des lignes tirées du point cherché, l'une ſur cette cinquiéme, & les deux autres ſur deux de celles qui ſont paralleles; ſoit égal à celui des deux tirées ſur les deux autres paralleles, & d'une autre ligne donnée : ce point cherché eſt ſur une ligne courbe d'une autre eſpece, que M. DESCARTES explique ainſi. *Toutes les lignes droites appliquées par ordre à ſon diametre étant égales à celles d'une Section conique, les ſegmens de ce diametre, qui ſont entre le ſommet & ces lignes, ont même proportion à une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux ſegmens du diametre de la Section conique, auſquels les pareilles lignes ſont appliquées par ordre.* M. DESCARTES n'oſe pas aſſurer que cette ligne courbe ſoit moins ſimple que la precedente. Au reſte en gardant la condition, dont on vient de parler, dans la multiplication des lignes, on peut faire ſix combinaiſons differentes, que l'on conſtruira dans les ſix derniers Exemples. La

premiere eſt $CM \times CB \times CD = CF \times CH \times a$; la ſeconde $CM \times CB \times CF = CD \times CH \times a$; la troiſiéme $CM \times CB \times CH = CD \times CF \times a$; la quatriéme $CM \times CD \times CF = CB \times CH \times a$; la cinquiéme $CM \times CD \times CH = CB \times CF \times a$; la ſixiéme $CM \times CF \times CH = CB \times CD \times a$. L'ordre n'eſt pas le même dans les Exemples.

3. La differente nature de ces deux eſpeces de courbes conſiſte en ce que dans l'équation de la premiere eſpece l'une des inconnuës y monte au troiſiéme degré y^3, & que les deux enſemble font un plan xy; mais dans l'équation de la ſeconde eſpece y ne monte ſéparément qu'au quarré yy, & que les deux enſemble font le ſolide xyy.

EXEMPLE I. $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

Fig. 122. 123. 57. C'Eſt l'Exemple de M. DESCARTES, Fig. 122. Tout ce que nous liſons dans ſa Géometrie touchant le calcul, la conſtruction, & la démonſtration faite au point C eſt fort clair. Ce qu'il omet à la fin du calcul, eſt aiſé : car ſi BK eſt $\frac{2aa - ay - xy}{2a - y}$, & que le parametre de la parabole ſoit a; on aura par la nature de la parabole $\frac{2a^3 - aay - axy}{2a - y} = yy$; $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$.

Le point C, ajoûte M. DESCARTES, peut être pris en tel endroit de la ligne CEG, qu'on veüille choiſir, ou auſſi en ſon adjointe cEe, ou enfin en leurs contrepoſées NIo, nIO. Ces quatre lignes ſe décrivent de cette maniere. La premiere CEG qui eſt renverſée Fig. 123. & ſa contrepoſée NIo ſe décrivent par le même mouvement de la Regle GL, qui coupe les deux côtez de la parabole renverſée CKN. L'une CEG eſt tracée par l'interſection de la Regle GL & de la portion KC infinie de la parabole; l'autre NIo eſt tracée par l'interſection de la Regle GL & de l'autre portion infinie KN de la même parabole. La courbe GCE Fig. 57. & ſa contrepoſée OIn ſont décrites par un même mouvement de la Regle GL, qui coupe les deux côtez de la parabole droite CKO. L'une GCE eſt tracée par l'interſection de la Regle GL & de la portion infinie KC de la ligne parabolique; l'autre OIn eſt tracée par l'interſection de la même Regle GL, & de l'autre portion infinie KO de la même ligne parabolique.

Pour connoître ſi le point C peut ſe prendre ſur ces quatre courbes, il faut examiner, ſi tous leurs points donnent la même équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$. Soit 1° par la valeur des lignes tirées du point C ſur les lignes données; ſoit 2° par la conſideration des triangles ſemblables formez dans la génération de la courbe.

1. Au point c de la courbe CEc renverſée Fig. 122. L'on a cB, y; cm, x; $cF = y - 2a = mG$; $cD = y - a$; $cH = y + a$. Et l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, même équation qu'au point C.

Mais pour examiner plus aiſément les triangles cmG, cbl paſſons à la

Figure 123. où ils ſont formez. On a cette Analogie Gm, $y - 2a : mc$, $x :: cb$, $y : bl$, $\frac{xy}{y-2a}$; donc $bk = a + \frac{xy}{y-2a} = \frac{ay-2aa+xy}{y-2a}$; & par la nature de la parabole, $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, même équation qu'au point C.

Au point c pris au deſſous de la ligne GA, Fig. 122. comme Fig. 123. on a cb, y; cm, $-x$. Les autres lignes qui ne ſont pas tirées ſont cf, $2a - y = Gm$; cd, $y - a$; ch, $y + a$, ce qui donne l'équation du point C. De plus dans les triangles Gmc, cbl; Gm, $2a - y : cm$, $-x :: cb$, $y : bl$, $\frac{-xy}{2a-y}$; & bk, $a \frac{-xy}{2a-y}$ d'où par la nature de la parabole on a l'équation du point C.

2. Au point N de la courbe NIo., contrepoſée de la courbe renverſée CEc, on a Nm, x qui n'eſt pas tirée, Nb, $-y$, Nf, $-y + 2a = Gm$, Nd, $y + a$; Nh, $-y - a$; d'où l'on a l'équation du point C. Dans les triangles GmN, NbL, Fig. 123. Gm, $-y + 2a : Nm$, $x :: Nb$, $-y : bL$, $\frac{-xy}{-y+2a}$; donc $bK = a \frac{-xy}{-y+2a}$ d'où par la nature de la parabole, on a encore l'équation comme auparavant.

Au point o de la même contrepoſée, entre les paralleles IH, AB, Fig. 122. on a om, $-x$; ob, $-y$; $of = Gm$, $-y + 2a$; od, $-y + a$; oh, $a + y$ & même équation qu'au point C. & Fig. 123. aux triangles Gmo, obl, $Gm : om :: ob : bl$. Deſlors bk eſt $a \frac{-xy}{-y+2a}$, qui donne encore l'équation du point C.

3. Au point c de la courbe droite cEc, pris entre les paralleles AB, ED; ſi les lignes étoient tirées on auroit cm, $-x$; cb, y; cf, $2a - y$, $= Gm$; cd, $a - y$; ch, $y + a$; & l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$ & Fig. 57. dans les triangles Gmc, cbl, Gm, $2a - y : mc$, $-x :: cb$, $y : bl$, $\frac{-xy}{2a-y}$ & bk, $a \frac{+xy}{2a-y}$ d'où par la nature de la parabole on a la même équation differente de celle qui s'eſt trouvée au point C de la courbe renverſée.

Au point c de la courbe cEc pris au deſſus de AG, on aura cm, x; cb, y; cf, $2a - y = GM$, cd, $y - a$; ch, $y + a$, & l'équation de n. 3. qu'on aura encore par la nature de la parabole, Fig. 57. dans les triangles GMC, CBL, où $GM : CM :: CB : BL$. & $BK = KL + LB = a \frac{+xy}{2a-y}$.

Au point c pris hors des paralleles on aura cm, $-x$; cb, y; cf, $y - 2a = Gm$; cd, $y - a$; ch, $y + a$, & l'équation de n. 3.

Enſuite ſi l'on ſuppoſe Fig. 57. la ligne Gl, & les autres qui conviennent, on fera les deux triangles équiangles Gmc, cbl, dans leſquels on trouvera cette proportion Gm, $y - 2a : cm$, $-x :: cb$, $y : bl$, $\frac{-xy}{y-2a}$. Donc $kb = kl + bl$, $a \frac{-xy}{y-2a}$; & par la nature de la parabole $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$, comme auparavant.

4. Au point O, Fig. 122. de la courbe OIn contrepoſée de la courbe cEc, on a Om, qui n'eſt pas tirée $= x$; Ob, $-y$; Of, $-y + 2a =$

$Gm : Od$, $-y+a$, Ob, $a+y$; ce qui donne l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$, qu'on trouvera encore Fig. 57. dans les triangles GmO, ObL; car $Gm : Om :: Ob : bL$. & $Kb = a \frac{+xy}{-y+2a} \times$ le parametre $a = yy$. Equation cherchée.

Au point n de la même courbe OIn, vous avez nm, $-x$, nb, $-y$; nf, $-y+2a = Gm$, nd, $-y+a$; nh, $-y-a$ & l'équation cherchée, & Fig. 57. aux triangles Gmn, nbl; $Gm : mn :: nb : bl$. & $bk = a \frac{+xy}{-y+2a}$ comme auparavant.

Si les appliquées des deux contreposées avoient été $+y$ l'équation de NIo auroit été $y^3 + 2ayy - aay - 2a^3 = axy$ & l'équation de OIn $y^3 + 2ayy - aay - 2a^3 = -axy$. Voyez Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 2. n. 6.

Mais on ne trouve pas sur ces deux courbes l'équation, qu'on a trouvée au point C, qui est $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$. M. DESCARTES suppose Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 3. que l'équation de la conchoïde droite cEc est $y^3 - 2ayy - ayy + 2a^3 = -axy$.

5. Cependant on peut faire en sorte que la même équation se trouve à tous les points de ces quatre courbes, qu'on peut appeller conchoïdes paraboliques, afin que le point C puisse être pris sur toutes ces courbes, ainsi que M. DESCARTES l'assure. Il faut 1° supposer, comme on l'a fait, que les appliquées à l'axe, qui se prennent de A vers G sont $+y$, celles qui se prennent de A vers I sont $-y$; & cela pour les quatre courbes. 2° Il faut, comme on l'a aussi fait, pour la conchoïde renversée CEc, & pour sa contreposée NIo, que les $+x$ se prennent de A vers L en montant, & les $-x$ de l'autre côté du point A en descendant. 3° Il faut pour la conchoïde droite cEc & pour sa contreposée OIn, qu'au contraire les $+x$ se prennent en allant de A vers n, & les $-x$ de A vers L.

FIG. 63. 6. Vous pourrez voir Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Fig. 63. la maniere de décrire la conchoïde renversée avec sa contreposée, en cherchant differens points de ces courbes. Par la même methode vous pourriez chercher les differens points de la conchoïde droite & de sa contreposée.

Selon la Regle 2. de cette Methode je change l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$ de la conchoïde renversée & de sa contreposée en celle-ci $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$, & l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = -axy$ de la conchoïde droite & de sa contreposée en celle-ci $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{-ay}$.

FIG. 122. Faisons selon la Regle 5. $y = o$, les équations precedentes sont $x = \frac{2a^3}{o}$, ce qui marque selon la Reg. 4. que l'axe AB Fig. 122. auquel les y se terminent, est asymptote des quatre courbes. Je fais ensuite $x = o$, les équations se reduisent à $y^3 - 2aay - aay + 2a^3 = o$. Dont les racines sont $y = a$, $y = 2a$ positives, $y = -a$ negatives, ce qui fait voir que les

courbes paſſent par le point G, étant $GA = 2a = y$; par le point E, étant $EA = a = y$; par le point I, étant $AI = a = -y$. Ainſi les courbes, CEc, cEc conchoïdes droite & renverſée ſe coupent aux points G, E; & leurs contrepoſées au point I. Tout cela eſt expliqué dans les endroits qu'on vient de citer.

EXEMPLE II. $y^3 - ayy - 2aay = axy - aax$.

1. APrès avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition des lignes tant données que cherchées, & la même valeur des cherchées que M. DESCARTES leur a determinée dans ſa Geometrie. On demande, que $CB \times CF \times CH$ ſoit égal à $CD \times CM \times a$: ce qui donne l'équation $y^3 - ayy - 2aay = axy - aax$. FIG. 122.

2. Pour conſtruire cette équation Fig. 127. je mets l'axe KL de la parabole kn, dont le parametre eſt a, ſur la ligne ED: étant $KL = a$, je fais paſſer la Regle IL par les points I, L; elle tourne autour du Pole I, paſſe toûjours par le point L, & fait mouvoir l'axe KL toûjours ſur ED. L'interſection de la Regle IL & de la ligne parabolique CKN décrira les deux courbes IAC, NGo, qui ſatisfont au Problême. FIG. 127.

Dém. 1° C'eſt au point C que l'on ſuppoſe que le calcul s'eſt fait. De plus les triangles IMC, CDL équiangles donnent cette Analogie $GM = CH, y + a : MC, x :: CD, a - y : DL, \frac{ax - xy}{y + a}$; qui étant ôtée de KL, donne $KD = a - \frac{ax + xy}{y + a}$. D'où par la proprieté de la parabole on forme encore l'équation à conſtruire.

2° Au point N on a Nm, x; Nb, y; $Nf = y - 2a$; $Nd = y - a$; $Nh = y + a = Im$. Les triangles équiangles ImN, NdL donnent, Im, $y + a : mN$, $x :: Nd$, $y - a : dL$, $\frac{xy - ax}{y + a}$, qui étant ajoûtée à KL, fait $Kd = a \pm \frac{xy - ax}{y + a} = \frac{ay + aa + xy - ax}{y + a}$. Or par la nature de la parabole, on aura l'équation cherchée, qui ſe forme auſſi par $Nb \times Nf \times Nh = Nd \times Nm \times a$. On trouvera auſſi de même maniere la même équation dans tous les autres points de la conchoïde renverſée IAC, & de ſa contrepoſée NGo, qui par conſequent ſatisfont au Problême. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Changez l'équation $y^3 - ayy - 2aay = axy - aax$ en celle-ci, $x = \frac{y^3 - ayy - 2aay}{ay - aa}$. Soit 1° $y = o$; l'équation devient $x = \frac{o}{-aa}$, ainſi comme c'eſt au point A que les x & les y commencent, & ſont nulles, la courbe paſſe par le point A; Reg. 4. §. 3. Art. 3. Sect. 4. Part. 1. Liv. 2. Soit 2° $x = o$; l'équation ſe change en $y^3 - ayy - 2aay = o$. Qui ſe diviſe juſte par $y = o$, & le quotient eſt $yy - ay - 2aa = o$, lequel ſe diviſe encore par $y - 2a = o$, & le nouveau quotient eſt $y + a = o$; de ſorte que les trois racines ſont $y = o, y = 2a, -y = a$, lorſque $x = o$. Et comme x eſt nul dans la ligne IG, il ſuit que la courbe ou les courbes cherchées

Regle 4. coupe IG en trois points ; au point A, ou $y = o$, ainſi qu'on l'a déja dit ; au point I, ou $-y = IA = a$; au point G, ou $y = AG = 2a$. Soit 3°, parmi pluſieurs valeurs qu'on peut donner à y, $y = a$; l'équation ſe change en $x = \frac{a^3 - 2a^2 - a^2}{aa - aa} = \frac{-2a^2}{o}$, ce qui fait voir Regle 4. 5. que la droite ED, ſur laquelle DB, y ſeroit a, eſt aſymptote des deux conchoïdes IAC, NGo.

La parabole KC eſt ici renverſée : vous pourriez la mettre droite, & vous décririez les deux autres conchoïdes de Fig. 122. Vous pourriez auſſi poſer la parabole droite dans tous les Exemples ſuivans.

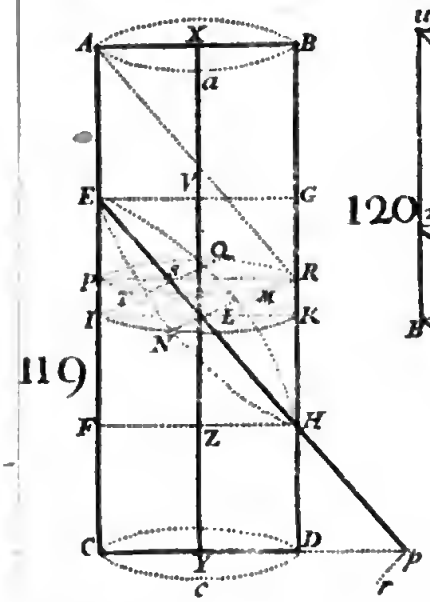
EXEMPLE III. $y^3 - aay = axy - 2aax$.

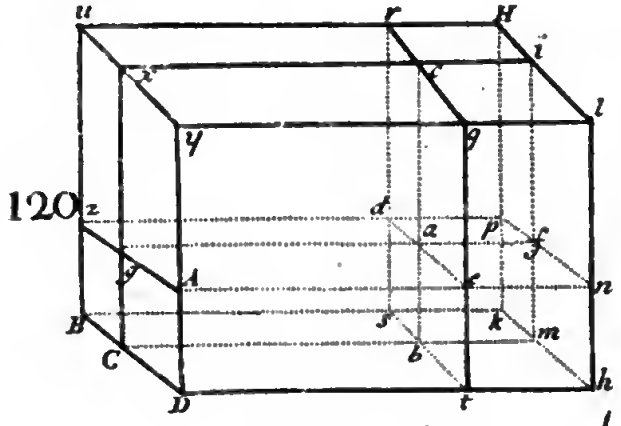
Fig. 121. 123. 1. APrès avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur a données dans ſa Geometrie : on demande $CB \times CD \times CH = CF \times CM \times a$, ce qui produit l'équation $y^3 - aay = axy - 2aax$.

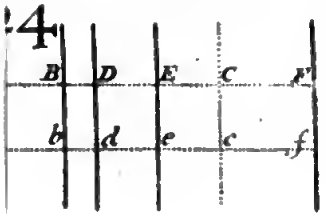
2. Pour conſtruire cette équation Fig. 128. la Regle GL tourne autour du Pole G, & paſſe toûjours par le point L de l'axe KL de la parabole KC, étant $KL = a$, & fait gliſſer cet axe ſur la Regle immobile AB. Une autre Régle AC tourne autour du Pole A. On conduit les Regles GL, AC avec un poinçon S ſur la Regle immobile ED, de ſorte qu'elles s'y coupent continuellement. L'interſection continuelle de la ſeconde Regle mobile AC avec la ligne parabolique KC décrit la courbe $NECAIT$, qui donne dans tous ſes points l'équation propoſée.

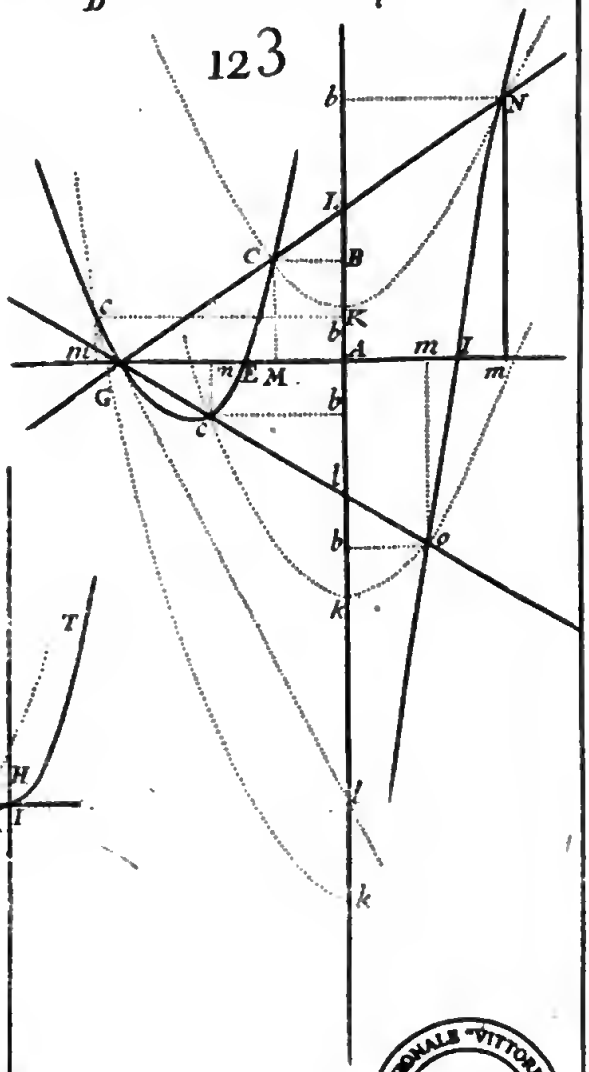
Dém. 1° Prolongez CM en R, où elle coupera la Regle GL, menez RP parallele à CB ; vous aurez $RP = CB = MA$; $RM = AP$. Et les triangles AES, GES égaux. 2° Les triangles AMC, GMR ſont équiangles, donc $AM = CB$, $y : MC$, $x :: GM = CF$, $2a - y : MR$, $\frac{2ax - xy}{y} = AP$. 3° Les triangles RLP, CAB ſont égaux, donc la ligne LB ſera égale à AP, $\frac{2ax - xy}{y}$. 4° Si de $KL = a$, l'on ôte LB, il reſte $KB = a - \frac{2ax + xy}{y} = \frac{ay - 2ax + xy}{y}$. 5° Par la nature de la parabole $y^3 - aay = axy - 2aax$, équation propoſée ; qui a auſſi été trouvée par la multiplication de $CB \times CD \times CH = CF \times CM \times a$, puiſque c'eſt au point C, que le calcul a été fait. On trouvera la même équation à tous les points de la courbe $NCEAIT$, on conclurra, qu'elle eſt le lieu cherché.

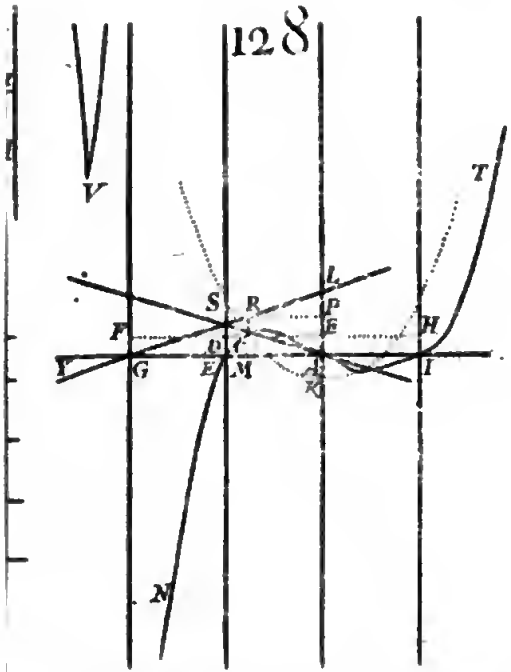
3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1° $y^3 - aay = axy - 2aax$, changée en $x = \frac{y^3 - aay}{ay - 2aa}$. Soit 2° $x = o$. L'équation ſe change en $y^3 - aay = o$. dont la premiere racine eſt $y = o$, & le quotient eſt $yy - aa$, dont les deux racines ſont $y - a = o$, $y + a = o$, où $y = a$, $-y = a$. De ſorte que x étant nul ſur GA, la courbe coupe GA en trois points differens, la premiere en A où $y = o$; le ſecond en E, où AE, $y = a$; le troiſiéme en I, où AI, $-y = a$. Soit 3° $y = o$, l'équation











BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EM..." NAPOLI

l'équation devient $x = \frac{0}{2aa}$, ce qui ne découvre rien de nouveau. Soit 4° $y = \frac{1}{2}a$, l'équation devient $x = \frac{1}{4}a$ valeur positive ; ainsi les $+x$ se prenant, en allant de A vers B, la courbe monte au dessus de AG entre les paralleles AB, ED. Soit 5° $y = \frac{1}{4}a$, l'équation sera $x = -\frac{45}{48}a$, ou $-x = \frac{15}{16}a$; & parceque les $-x$ se prennent au dessous de AG, la courbe descend au dessous de AG entre les paralleles DE, GF. Soit 6° $y = 2a$ nous aurons $x = \frac{8a^3 - 2a^3}{2aa - 2aa} = \frac{6a^3}{0}$; ce qui prouve que GF, d'où GA, $y = 2a$ doit partir, est asymptote de la courbe, ou des courbes qu'on décrit. Pour connoitre, comment la courbe $NECAIT$ s'étend du côté de I ; Soit 7° $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, l'équation proposée se change en $x = -\frac{3}{20}a$, ou $-x = \frac{3}{20}a$: c'est pourquoi la courbe descend au dessous de GA entre les paralleles AB, IH. Soit 8° $-y = 2a$, ou $y = -2a$, l'équation devient $x = +\frac{3}{2}a$, par où l'on voit que la courbe remonte au dessus de AG au déla de IH. Et si l'on continuë à prendre differentes valeurs de $-y$, on connoîtra que la courbe monte à l'infini de ce côté-là.

A present il faut examiner la courbe qui se forme au delà de l'asymptote GF. Soit donc 9° $y = \frac{3}{4}a$, la valeur de x est $= \frac{585}{16}a$. Soit 10° $y = \frac{7}{2}a$, on aura $x = 26\frac{1}{4}a$. Ces deux dernieres valeurs de x apprennent que la nouvelle courbe commence au delà de l'asymptote GF à une distance infinie de AG, & qu'elle s'approche de AG en s'éloignant de GF. Soit 11° $y = 3a$, on fera $x = 24a$. Soit 12° $y = 4a$, on aura $x = 30a$. Ces deux dernieres équations montrent qu'après que la courbe est descenduë jusqu'à environ $24a$, ou $24\ GE$ de distance de la ligne AG, vis-à-vis de Y, étant $GY = GE = a$, elle remonte, de sorte qu'elle forme comme un angle V. Elle est aussi décrite par l'intersection de la Regle AC, & de la parabole KC.

EXEMPLE IV. $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$.

Fig. 121. 1.

1. APrès avoir supposé Fig. 122. la même position & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur a données dans sa Geometrie : On demande $CB \times CD \times CF = CH \times CM \times a$, c'est-à-dire, en termes analytiques $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$.

2. On construit cette équation Fig. 129. de cette maniere. La Regle AC tourne autour du point A, la Regle IL autour du point I. Soit $AT = \frac{1}{2}a = EX$; aux points T, X j'arrête les Regles immobiles TS, XV paralleles à la ligne AB. On conduit les deux Regles AC, IL sur TS avec un poinçon, de sorte qu'elles s'y coupent continuellement. Pendant qu'on fait ainsi mouvoir ces deux Regles, la Regle IL pousse & fait mouvoir la petite Regle Ll, qui est toûjours perpendiculaire à la Regle immobile AB, sur laquelle l'extrêmité L glisse, un poinçon arrête cette extrêmité

dans les couliſſes des Regles IL, AB, tandis que ſon autre extrêmité l, qui eſt arrêtée ferme au point l de l'axe Kl de la parabole KC, fait monter & deſcendre cet axe ſur la Regle immobile XV; étant $Kl = \frac{1}{4}a$, & le parametre de la parabole a. L'interſection de la Regle AC & de la parabole KC décrit la courbe $NACEGP$. L'appliquée CV eſt $VB - CB$, $\frac{1}{2}a - y$.

Dém. Je prolonge CM en R, où elle coupe la Regle IL, je mene RP parallele à CB, on a cette Analogie $AM = CB$, $y : CM$, $x :: IM = CH$, $y + a : MR$, $\frac{xy+ax}{y} = AP = LB = lV$. KV ſera $\frac{1}{4}a + \frac{xy+ax}{y}$. Or par la proprieté de la parabole $a \times KV = \overline{CV}^2$. Ce qui ſe reduit à l'équation $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1° $y^3 - 3ayy + 2aay = axy + aax$ changée en $x = \frac{y^3 - 3ayy + 2aay}{ay + aa}$. Soit 2° $y = o$, l'équation ſe changera en $x = \frac{o}{aa}$, ce qui marque qu'au point A, ou $x = o$, on a auſſi $y = o$, & que la courbe paſſe au point A. Soit 3° $x = o$, l'équation reſte $y^3 - 3ayy + 2aay = o$, dont la premiere racine eſt $y = o$, & le quotient $yy - 3ay + 2aa$, dont les deux racines ſont $y - 2a = o$, $y - a = o$, ou $y = 2a$, $y = a$. Ainſi x étant nul, ce qui arrive lorſque la courbe coupe GA, y a trois valeurs, la premiere $y = o$, ce qui marque que la courbe paſſe au point A, comme on l'a déja dit; la ſeconde $y = 2a = AG$, la troiſiéme $y = a = AE$; ce qui montre que la courbe paſſe encore aux points E, G. Vous le prouverez encore ſuivant la Methode de M. DESCARTES, en refléchiſſant qu'en A vous avez $CB = o$, $CM = o$; en E, $CD = o$, $CM = o$; en G, $CF = o$, $CM = o$; & que par conſequent dans ces trois point $CB \times CD \times CF = o$, & $CM \times CH \times a = o$. Cette preuve peut s'appliquer à toutes les autres courbes. Soit 4° $y = \frac{1}{2}a$, l'équation devient $x = \frac{1}{4}a$. Cette valeur poſitive fait voir que la courbe monte au deſſus de GA entre les paralleles AB, ED. Soit 5° $y = \frac{3}{2}a$, l'équation ſera $x = -\frac{3}{20}a$, valeur negative, qui prouve que la courbe deſcend ſous GA entre les paralleles ED, GF. Soit 5° $y = 3a$, on aura $x = \frac{3}{2}a$, ainſi la courbe monte au deſſus de AG au delà de GF, & l'on trouvera, ſi l'on prend de plus grandes valeurs poſitives de y, que la courbe monte à l'infini de ce côté-là. Soit 6° $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, l'equation ſe change en $x = -\frac{15}{4}a$, ce qui montre que la courbe deſcend au deſſous de AG entre les paralleles AB, IH. Soit 7° $y = -a$, la valeur de x eſt $= \frac{-6a^3}{0}$: donc IH, à laquelle AI, $-y = \frac{1}{2}a$ ſe termine, eſt aſymptote de la courbe $NACEGP$, & de la courbe qui eſt au délà de IH.

Car ſoit 8° $y = -\frac{1}{4}a$; l'équation eſt $x = \frac{525}{16}a$. Soit 9° $y = -2a$, on aura $x = 24a$. Soit 10° $-y = 3a$, c'eſt $x = 30a$. Ces trois dernieres équations prouvent qu'à la diſtance d'environ $24a = 24AI$, au deſſus

de AG, une nouvelle courbe commence vis-à-vis de Y, & jette deux branches qui s'étendent à l'infini, comme l'on voit en Z. Cette courbe eſt auſſi décrite par l'interſection de la Regle AC & de la parabole KC.

EXEMPLE V. $y^3 - ayy - 9aay + 9a^3 = axy$.

M. DESCARTES dit, que le point cherché C ſe trouvera ſur une courbe de même nature ; quoique, tout le reſte demeurant le même qu'aux quatre Problêmes precedens, les quatre paralleles données ne fuſſent pas à égale diſtance l'une de l'autre. 1. Soient donc Fig. 130. GE, $2a$; EA, a; AI, $3a$; CM, x; CB, y; $CF = BF - CB$, $3a - y$; $CD = BD - CB$, $a - y$; $CH = CB + BH$, $y + 3a$. Et qu'on demande, comme Exemple I. $CF \times CD \times CH = CB \times CM \times a$, l'équation ſera $y^3 - ayy - 9aay + 9a^3 = axy$, qui ſe conſtruira de cette ſorte. Fig. 130.

2. La Regle EL tourne autour du Pole E, & paſſe par le point L de l'axe KL de la parabole KC, dont le parametre eſt a, & $KL = 9a$: la Regle EL fait mouvoir l'axe KL de ſorte que cet axe eſt toûjours ſur la ligne droite AB. L'interſection continuelle de la Regle EL & de la parabole KC décrit d'un côté la courbe $GQECP$, de l'autre la courbe NIo, qui ſont le lieu cherché.

Dém. Au point C le calcul a donné l'équation cherchée. Enſuite dans les triangles équiangles EMC, CBL on fait cette Analogie $EM = CD$, $a - y : MC$, $x :: CB$, $y : BL$, $\frac{xy}{a-y}$; qui étant ſouſtraite de $KL = 9a$ laiſſe $KB = 9a - \frac{xy}{a-y}$. Par la nature de la parabole $y^3 - ayy - 9aay + 9a^3 = axy$.

4. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Vous connoîtrez la poſition des courbes, en faiſant $1^o\ x = o$. $2^o\ y = o$. $3^o\ y = \frac{1}{2}a$. $4^o\ y = \frac{1}{2}a$. $5^o\ y = \frac{1}{2}a$. $6^o\ y = -a$. $7^o\ y = -4a$.

EXEMPLE VI. $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd}xy$.

M. DESCARTES aſſure encore, que le point C ſe trouvera ſur une courbe de même nature, quoique la cinquiéme ligne donnée ne coupât point à angles droits les quatre autres, & que les lignes cherchées ne fuſſent pas perpendiculaires aux données, tout le reſte demeurant le même, que dans ſa Geometrie.

Soit donc en premier lieu Fig. 131. GA qui coupe obliquement les quatre paralleles données, & que les quatre cherchées CB, CD, CF, CH faſſent les mêmes angles obliques que GA avec les paralleles, tandis que CM eſt paralelle à AB. Si l'on nomme GE, $a = EA = AI$; CB, y; CM, x; tout le reſte ſera auſſi entierement, comme dans l'Exemple que Fig. 131.

M. DES CARTES a conſtruit Exemple I. Fig. 122. & l'équation ſera $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = ax^2y$.

FIG. 132. Soit en ſecond lieu, Fig. 132. GA qui fait avec les paralleles un angle de 60. degrez ; mais parmi les cherchées, les deux CB, CH ſont paralleles à GA, CD fait avec ED un angle de $35^\circ. 15^{\prime}. 56^{\prime\prime}$. CF avec GF un angle de $25^\circ. 39^{\prime}. 32^{\prime\prime}$, CM eſt perpendiculaire ſur GA. Et l'on demande, comme Exemple I. que $CD \times CF \times CH$ ſoit égal à $CB \times CM \times a$. Continuons CB en S.

Nommons GE, $a = EA = AI$; CM, x; CB, y; CH ſera, $y + a$.

Maintenant dans CDR, nous avons $CR = a - y$; l'angle CDR eſt de $35^\circ. 15^{\prime}. 56^{\prime\prime}$. l'angle CRD de 120. degrez, que GA fait avec les paralleles. Donc comme 57735 ſinus de l'angle CDR eſt à 86602 ſinus de l'angle CRD : ainſi 1 eſt à $\frac{3}{2}$ que je nomme c : ainſi eſt CR, $a - y$ à CD, $ac - cy$.

De plus dans le triangle CSF, le côté CS eſt $BS - CB$, $2a - y$, l'angle CFS eſt de $25^\circ. 39^{\prime}. 32^{\prime\prime}$. l'angle CSF de 60. degrez. Donc comme 43301 ſinus de l'angle CFS eſt à 86602 ſinus de l'angle CSF : ainſi 1 eſt à 2, que j'appelle d : ainſi CS, $2a - y$ eſt à CF, $2ad - dy$. Après cela par l'hypotheſe $CD \times CF \times CH = CB \times CM \times a$; $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd} xy = \frac{1}{3} axy$.

Par le point C menons CT parallele à AB. Dans le triangle CMT le côté CM eſt x ; nous connoiſſons l'angle CMT. qui eſt droit ; & l'angle CTM qui eſt de 60. degrez. Donc comme 86602 eſt à 100000 : ainſi 1 eſt à $\frac{100000}{86602}$ que je nomme b : ainſi le côté CM, x eſt au côté CT, bx. Enſuite la parabole KC a pour parametre $\frac{a}{bcd}$, KL eſt celui de ſes diametres, dont les appliquées ſont avec lui l'angle CBK de 120. degrez, ce diametre eſt toûjours ſur la ligne AB, où il ſe meut par le moyen de la Regle GL, qui tourne autour du Pole G, & paſſe toûjours par le point L de ce diametre, étant $KL = abcd$. L'interſection de la Regle GL & de la parabole KC décrit les courbes GEC, NIo, qui ſont le lieu cherché.

Dém. GT, $2a - y$: TC, bx : : CB ; y : BL, $\frac{bxy}{2a - y}$. Otez BL de KL, il reſtera KB, enſuite par la nature de la parabole $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{a}{cd} xy$.

FIG. 133. En troiſiéme lieu Fig. 133. que GT ne ſoit pas parallele à CB, le reſte étant comme auparavant. On menera GV parallele & égale à CS, $2a - y$; & CQ parallele à GT. Il ſe fera deux triangles GTV, CQB équiangles. Je mets le rapport de GV, $2a - y$ à GT, comme 1 à h, ainſi GT eſt $2ah - hy$. Et parceque la raiſon de CB à CQ eſt la même, CQ eſt hy, qui ſera l'appliquée de la parabole KC, dont le parametre doit être $\frac{ahh}{bcd}$. Maintenant dans les triangles équiangles GTC, CQL, GT, $2ah - hy$: CT, bx : : CQ, hy : QL, $\frac{bxy}{2a - y}$; qui étant ôtée de $KL = abcd$,

laiſſe KQ, & par la nature de la parabole $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = \frac{4a}{cd}xy$.

EXEMPLE VII. $y^3 - 5ayy - \frac{6}{5}aay + 6a^3 = 4axy$.

M. DESCARTES dit enfin, que le point C peut ſe trouver quelquefois ſur une courbe de même nature que les precedentes, quoiqu'aucunes des données ne ſoient paralleles: dont voici un Exemple, Fig. 134. FIG. 134.

1. Soient données de poſition les cinq lignes AB, AD, KH, GE, FI, faiſant dans leurs interſections les angles que vous voyez: il faut trouver un point C, duquel on tire ſur les données, les lignes CB faiſant l'angle CBK de 60. degrez, CF faiſant l'angle CFI de 120. degrez, CE faiſant l'angle CEG droit, CH faiſant l'angle CHK de 30. degrez, CD faiſant l'angle CDA de 120. degrez; de ſorte que la ligne CD eſt parallele & égale à AB, & les lignes CB, CF, CE, CH n'en font qu'une. Il faut encore que $CB \times CE \times CF + 6\,\overline{IK}^2 \times \overline{\frac{6}{5}CB - IK}$, ſoit à $CD \times CH \times IK + AB \times \overline{\frac{5}{3}AB - 2AK}$: comme $\frac{3}{2}CB$ à IK. L'équation ſera $y^3 - 5ayy - \frac{6}{5}aay + 6a^3 = 4axy$.

2. Après avoir meſuré tant les angles donnez que les lignes données, dont nous avons beſoin; nommons IK, $a = 1$; $AI = 2a$; $KG = 3a = AK$; les inconnuës AB, $x = CD$; CB, y. Nous aurons $BI = AI - AB$, $2a - x = BF$; & $CF = y - 2a + x$.

Dans le triangle BGE, le côté BG eſt $AG - AB$, $6a - x$; les angles ſont connus: donc comme 100000 eſt à 50000: ou comme 1 à $\frac{1}{2}$: de même BG, $6a - x$ eſt à BE, $3a - \frac{1}{2}x$; & $CE = 3a - \frac{1}{2}x - y$.

Dans le triangle BHK, le côté BK eſt $3a - x$; les angles ſont connus: donc comme 50000 eſt à 100000: ou comme 1 eſt à 2: ainſi BK, $3a - x$ eſt à BH, $6a - 2x$; & $CH = 6a - 2x - y$.

3. Sur AD je coupe $AM = 5a$, étant $AD = CB$, y, MD eſt $5a - y$. PL eſt le diametre de la parabole PC, avec lequel les appliquées CB font un angle CBP de 120. degrez. Ce diametre eſt toûjours ſur la ligne AB, ſur laquelle la Regle ML, qui tourne autour du Pole M, la fait mouvoir, en paſſant toûjours par le point L du diametre, étant $PL = \frac{3}{10}a$. L'interſection de cette Regle ML avec les deux côtez de la ligne parabolique RPC décrit les courbes CM, NRO, qui ſont le lieu cherché. Le parametre de la parabole eſt $4a$.

Dém. Les triangles MDC, CBL ſont équiangles: donc MD, $5a - y : CD$, $x :: CB$, $y : BL$, $\frac{xy}{5a-y}$; qui étant ſouſtraite de PL, $\frac{3}{10}a$: par la nature de la parabole vous aurez l'équation cherchée.

EXEMPLE VIII. $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$.

LEs équations, qui donnent des courbes de nature differente de celles, qu'on vient de décrire, & dont il eſt parlé au commencement de cet Article, n. 2. commencent ici.

FIG. 122. 235. 1. Après avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que Mr DESCARTES leur a données dans ſa Geometrie; on demande, que $CM \times CF \times CH$ ſoit égal à $CB \times CD \times a$, ce qui produit $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$, équation qu'on peut ainſi conſtruire.

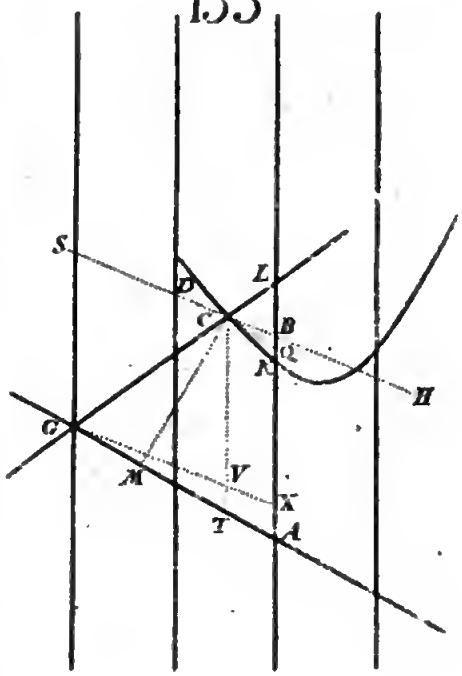
2. Fig. 135. Sur la ligne GA prenez $AT = AR = \frac{1}{2}a$, par les points T, R menez TL, RN infinies paralleles à AB. Sur TL prenez $TV = a$ & par le point V tirez l'infinie VN parallele à GA. Faites $VK = \frac{2}{3}a$: appliquez la parabole SKs, dont le parametre de l'axe eſt $2a$, faites que ſon ſommet ſoit ſur K, & ſon axe ſur KT; & que cette parabole demeure immobile dans cette ſituation. On a $VN = TR$, a; autour du point N faites rouler l'équerre LNP, dont le ſommet eſt toûjours en N & ſes deux côtez coupent toûjours l'infinie KP en deux points P & L, p & l, &c.

Lorſque l'équerre eſt dans la ſituation LNP, j'applique au point P, la ligne PC égale & parallele à LS appliquée de la parabole au point L; & j'applique au point L la ligne LZ égale & parallele à Ps appliquée de la même parabole au point P.

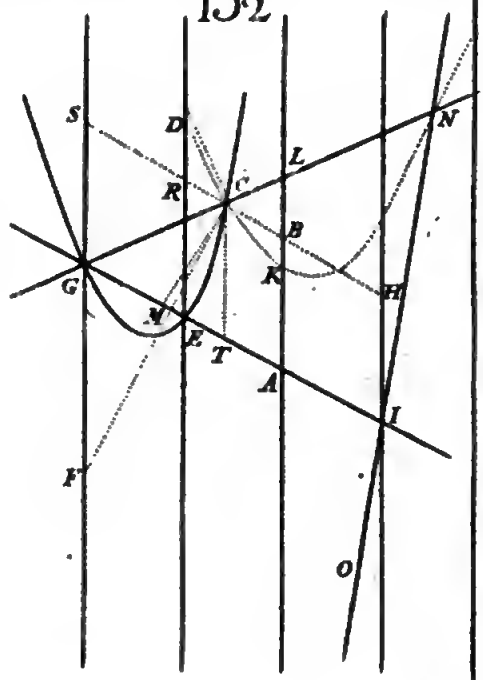
Lorſque l'équerre eſt dans la ſituation lNp, j'applique au point p la ligne pc égale & parallele à la ligne ls appliquée de la parabole au point l. De ſorte que tandis que l'équerre coupe l'axe KP en deux points au dedans de la parabole, il y a deux appliquées, qui changent mutuellement de place: mais tandis qu'un des côtez ſeulement de l'équerre coupe l'axe au dedans de la parabole, il n'y a qu'une appliquée, qui eſt tranſportée au point de l'axe, que l'autre côté de l'équerre coupe au dehors de la parabole. De plus ſuppoſons l'équerre dans la poſition VNg, l'axe n'eſt point coupé en deux points, on ne peut donc pas tranſporter l'ordonnée VY, & on n'a aucun point de la nouvelle courbe. Pour peu que nous baiſſions le côté NP, l'autre côté commencera à couper l'axe KP prolongé en haut à l'infini, & l'on pourra auſſi commencer à décrire la courbe cZ, & la continuer juſque vis-à-vis du ſommet K. Lorſque l'équerre eſt dans la poſition KNQ, on continuë la deſcription de la courbe cZ, & on commence celle de QC moitié de XQC, ce qui ſe fait juſqu'à ce que l'équerre ſoit dans la poſition VNR; car deſlors l'équerre ne coupe plus l'axe en deux points en même tems.

Pour décrire la courbe xz & l'autre moitié QX de QXC, on n'a qu'à appliquer au point P, PX égale à PC; au point L, Lz égale à LZ; au

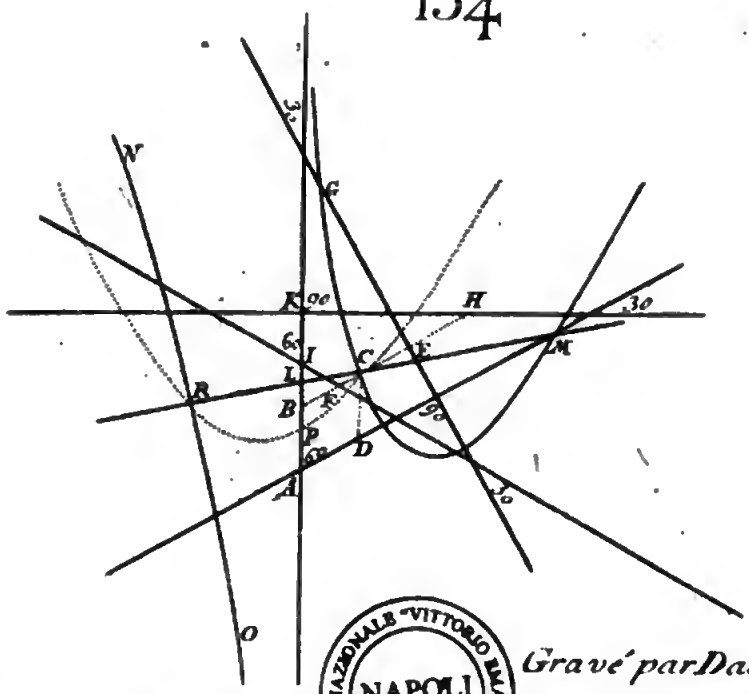
133



132



134



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Gravé par Daudet.

point p, px égale à pc. Ou bien après avoir pris $Vn = VN$, il faut faire tourner une équerre autour du point n, & le reſte comme on a fait au point N. Car on peut décrire ces courbes, comme nous décrivons celles de l'Exemple ſuivant. Les courbes XQC, cZ, xz ſatisfont au Problême.

Dém. 1° Au point C vous avez CM, $-x$; CB, $-y$; $BP = TA$, $\frac{1}{2}a$; $CP = CB + BP$, $-y + \frac{1}{2}a = LS$; $Mu = TV$, a; $Cu = CM + Mu$, $-x + a = PV$. Dans le triangle PNL rectangle en N, la ligne NV eſt perpendiculaire ſur PL: donc PV, $a - x$: VN, a:: VN, a: VL, $\frac{aa}{a-x}$, qui étant ſouſtraite de VK, $\frac{2}{3}a$, laiſſe $KL = \frac{2}{3}a - \frac{aa}{a-x}$. Or par la nature de la parabole vous aurez $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$, équation cherchée. 2° Au point X on trouveroit la même choſe ayant ſuppoſé une équerre en n, puiſque $XB = y$; & $XP = y - \frac{1}{2}a = sL$. 3° Au point c de la courbe cZ, vous avez cm, x; cb, $-y$; $cp = -y + \frac{1}{2}a = ls$; $cu = x - a = pV$. Dans le triangle pNl rectangle en N. Vous ferez cette Analogie pV, $x - a$: VN, a:: VN, a: Vl, $\frac{aa}{x-a}$; qui étant ajoûtée à VK, $\frac{2}{3}a$, fait $Kl = \frac{2}{3}a + \frac{aa}{x-a}$; & par la nature de la parabole l'équation $axy - xyy + 2aax = aay - ayy$.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1° l'équation changée en $x = \frac{aay - ayy}{ay - yy + 2aa}$. Faites 2° pour avoir la diſpoſition de la courbe XQC $x = o$; 3° $y = o$; 4° $y = \frac{1}{2}a$. 5° $y = \frac{2}{3}a$; 6° $y = 2a$.

Venons à preſent aux courbes cZ, xz. Soit 7° $y = \frac{1}{2}a$, l'équation ſera $x = \frac{15}{7}a$. Soit auſſi $-y = \frac{1}{2}a$, ou $y = -\frac{1}{2}a$, vous aurez l'équation $x = \frac{15}{7}a$ même valeur poſitive. Ce qui montre, que les deux courbes cZ, xz s'élevent au deſſus de GA au dehors des paralleles. Et ſi l'on prend differentes valeurs de y également éloignées du point T, on ſe convaincra que ces deux courbes s'écartent & s'approchent également de l'axe KL, & qu'elles ſont égales. 8° Si l'on fait $x = a$, on aura $2a^3 = o$. D'où l'on conclud qu'il eſt impoſſible que x ſoit égale à la quantité a, ou, ce qui eſt le même, qu'il n'y a point d'appliquée y au point V, étant $TV = a$: ainſi la ligne VN menée par le point V parallele aux appliquées PC, pc eſt une troiſiéme aſymptote.

4. M. DESCARTES dit que *ces courbes ſont telles, que toutes les lignes droites appliquées par ordre à leur diametre étant égales à celles d'une Section conique, les ſegmens de ce diametre, qui ſont entre le ſommet & ces lignes, ont même proportion avec une certaine ligne donnée, que cette ligne donnée a aux ſegmens du diametre de la Section conique, auſquels les pareilles lignes ſont appliquées par ordre.* Si l'on prend le point V pour le ſommet des trois courbes CQX, cZ, xz; VN pour la ligne donnée, PV pour un ſegment de l'axe KP de ces courbes pris entre le ſommet V, & la ligne PC appliquée à cet axe, & égale à LS appliquée à l'axe KL de la Section conique SKs; ſi l'on prend encore VL pour le ſegment de l'axe de la Section conique,

auquel la pareille ligne LS eſt appliquée : on trouvera 8. 6. Eucl. que $PV : VN :: VN : VL$. Mais ſi par le ſegment de l'axe de la Section conique on prenoit KL, qui eſt entre le ſommet, & l'appliquée LS, on ne trouveroit pas la proportion, dont M. Deſcartes parle. On la trouveroit beaucoup moins, ſi on prenoit QP pour le ſegment de XQC. On trouvera de même pour le point c, $pV : VN : VN :: Vl$. Et c'eſt la proportion, qui a donné l'équation de ces courbes.

EXEMPLE IX. $axy - xyy = aay - ayy + 2a^3$.

FIG. 122. 136. 1. APrès avoir ſuppoſé Fig. 122. la poſition & lavaleur des lignes telles que M. DESCARTES les détermine dans ſa Geometrie. Il faut que le parallelepipede $CM \times CB \times CD$ ſoit égal au parallelepipede $CF \times CH \times a$, & que $axy - xyy = aay - ayy + 2a^3$.

2. Je fais la conſtruction de cette ſorte Fig. 136. Je prends $BR = BP$ $Dr = \frac{1}{2}a$, & par les points R, P, r je mene les infinies RN, Pp, rn paralleles à AB. Je fais $VT = a$, & par le point V je tire VN parallele à GA, ſoit $UK = \frac{1}{2}a$; le point K eſt le ſommet de la parabole immobile SKs, dont le parametre eſt $2a$, & dont l'axe eſt poſé ſur la ligne Pp, laquelle eſt auſſi l'axe des courbes qu'on va décrire. Je coupe $VN = Vn = a$. A preſent autour du point N je fais tourner une équerre PNp, de laquelle le ſommet N eſt fixe au point N. Conſiderons la d'abord dans la poſition PNp : elle coupe l'axe Pp au point P au dehors de la parabole, & au point p au dedans ; je tranſporte l'ordonnée pS de la parabole, & je l'applique à l'axe en PC ; C'eſt un point de la courbe CIY, & CP une de ſes ordonnées. Toute la courbe CIY, & CP une de ſes ordonnées. Toute la courbe CIY peut ſe décrire de la même façon.

Mais il eſt à propos de conſiderer l'équerre PNp dans ſes differentes poſitions.

Commençons par la mettre dans la poſition VNR : alors le côté NV coupe l'axe au point V, & le côté NR rencontre ſa parallele VP à une diſtance infinie du côté de y, où l'ordonnée de ICy ſera égale à l'ordonnée Vb de la parabole. En effet à cette diſtance infinie la courbe ICy rencontre ſon aſymptote AB.

Enſuite pour peu qu'on éleve le côté Np de l'équerre au deſſus de V, il y coupera l'axe Vp ; tandis que l'autre côté NP coupera le même axe VP à une diſtance preſque infinie ; à laquelle l'ordonnée de la courbe ICy ſera égale à la petite ordonnée de la parabole, que le point p détermine. La courbe $yCIY$ pourra être ainſi décrite, juſqu'à ce que l'équerre ſoit venuë à la poſition KNQ, dans laquelle le côté Np ou NQ détermine l'ordonnée de la parabole, qui part du point Q, & qu'il faut tranſporter en Kk ordonnée de la courbe ICY ; tandis que le côté NP ou NK coupe l'axe en K,

K, où l'ordonnée de la parabole eſt zero, & qu'il faut tranſporter au point *Q*; où par conſequent ſe trouve le ſommet d'une nouvelle courbe, laquelle commence à ſe décrire. FIG. 136.

J'éleve donc *NP* ou *NK* au deſſus de *K*, mais au deſſous de *V*, & le côté *Np* ou *NQ* au deſſus de *Q* juſqu'à *o*: l'ordonnée de la parabole priſe entre *K* & *V*, ſera appliquée au point *o*, comme une ordonnée de la nouvelle courbe *QZ*; & l'ordonnée de la parabole qui part du point *o*, ſera appliquée au point pris entre *K* & *V*, comme une ordonnée de la courbe *CIY*. Et ces deux courbes ſe décriront ainſi, juſqu'à ce que l'équerre ſoit parvenuë dans la poſition *VNO*, dans laquelle l'ordonnée *Vb* ſera appliquée à l'axe *Qo* à une diſtance infinie, à laquelle la courbe *QZ* rencontre ſon aſymptote *AB*; & l'ordonnée infinie de la parabole déterminée par le côté *Np*, ou *NO* de l'équerre, ſera appliquée en *VN*, pour être l'ordonnée de la courbe *CIY*, laquelle en effet rencontre ſon aſymptote *VN* à une diſtance infinie. Le ſeul axe *Kb* ſert à décrire la branche infinie *QZ*. Après cette poſition de l'équerre *PNp*, elle ne coupe plus l'axe *Pp* que dans un point: ainſi la deſcription de la courbe *CIy* & de la partie *QZ* eſt finie. On décrira de la même maniere avec l'équerre *Pnp* la courbe *cG* & la partie *Qz* de la courbe ſuperieure; & cette Methode eſt la même que celle de l'Exemple precedent.

Que ſi à l'équerre *PNp* vous ajoûtez l'équerre *CVS* qui tourne autour du point fixe *V*; qu'un poinçon faſſe, que ces deux équerres ſe croiſent toûjours ſur la Regle fixe *AB* au point *X*; & qu'un autre poinçon faſſe le même effet au point *a*; qu'un troiſiéme poinçon faſſe auſſi croiſer ſur la Regle immobile *VP*, le côté *NP* de la premiere équerre avec la Regle *PC*, laquelle eſt toûjours perpendiculaire à *VP*; & qu'un quatriéme poinçon produiſe le même effet au point *p*, à l'égard du côté *Np* de la même équerre & de la Regle *pS*: lorſque je ferai monter ou deſcendre un des quatre poinçons, comme *X*, les quatre équerres, & les Regles *PC*, *pS* monteront auſſi & deſcendront. Alors l'interſection du côté *VC* de la ſeconde équerre avec la Regle *PC* décrit la courbe *yICY*, & l'interſection de l'autre côté *VS* de la même équerre avec la Regle *pS* décrit la parabole *KS*. La courbe *Gc* ſe décrira par une ſemblable poſition des équerres *Pnp*, *cVs*. Enfin ſi les mêmes poinçons font croiſer aux points *P*, *p* les deux équerres *PNp*, *Pnp*: le mouvement du ſeul poinçon *P* fera décrire les deux courbes.

Dém. Au point *C*, vous avez $CM, -x = PT$; $CB, -y$; $CP, = CB + BP, -y + \frac{1}{2}a = pS$; $PV = PT + TV, -x + a$; dans le triangle rectangle *PNp*, $PV, a - x : VN, a :: VN, a : Vp, \frac{aa}{a-x}$; $Kp = KV + Vp, \frac{1}{8}a + \frac{aa}{a-x}$, & par la nature de la parabole *KS*, $axy - xyy = aay - ayy + 2a^3$.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. Soit 1°

l'équation changée en $x = \frac{a^3 y - a y y + 2 a^3}{a y - y y}$. Pour trouver le chemin de la courbe, faites 1° $x = o$; 2° $y = o$; 3° $y = a$; 4° $y = \frac{1}{2}a$; 5° $y = \frac{1}{4}a$; 6° $y = -\frac{1}{2}a$; 7° $y = 3a$; 8° $x = a$. Si l'on prend V pour le sommet des courbes qu'on vient de décrire, on a $PV : VN :: VN : Vp$.

EXEMPLE X. $2axy - xyy = a^3 - ayy$.

Fig. 122. 137. 1. APrès avoir supposé Fig. 122. la position & la valeur que M. DESCARTES donne aux lignes dans sa Geometrie. Il faut que $CM \times CB \times CF$ soit égal à $CD \times CH \times a$; l'équation est $2axy - xyy = a^3 - ayy$, dont voici la construction Fig. 137.

2. Prenez $SA = \frac{1}{2}a$, par le point S menez Sl parallele à AB. La parabole KC a pour parametre $2a$, son axe est toûjours appliqué sur AB, KL est $\frac{1}{2}a$; Ll aussi $\frac{1}{2}a$, est une Regle parallele à GA, son extrémité l glisse sur la ligne Sl, & son extrémité L est attachée ferme au point L de l'axe de la parabole. On fait mouvoir sur AG les deux Regles PC, NC, de sorte que 1° l'angle CPN soit toûjours de 45. degrez ; mais NC fait differens angles avec GA, & tourne autour du point mobile N. 2° Leur distance PN soit toûjours égale à a ; 3° Ces deux Regles passent toûjours par un anneau C, qui roule sur la ligne parabolique KC ; 4° La Regle NC pousse devant soi la petite Regle Ll, laquelle fait en même tems mouvoir la parabole sur AB. L'intersection des deux Regles NC, PC entr'elles & avec la parabole décrit les trois courbes qui sont dans cette Figure. Vous pouvez aussi supposer un anneau à l'extrémité l, par lequel la Regle NC passe. Soit $ST = a$; par le point T menez Tt parallele à AG. Examinons les differens mouvemens de la parabole & des Regles PC, NC, & les differentes manieres, dont ces Regles se coupent soit au dessus, soit au dessous de GA.

En premier lieu concevons le sommet K de la parabole à une distance infinie au dessous de A, & les Regles NC, PC à une distance infinie au delà de G, où elles se coupent au dessus de GA dans l'anneau C. Soit NC perpendiculaire à GA, comme on l'a representée vers V ; le triangle CPN, qui aura l'angle PNC droit, aura les côtez PN, NC égaux ; donc le point C & l'anneau seront sur Tt, & la Regle NC ne touchera point la Regle Ll par sa partie inferieure infinie Nn. Mais dès que l'on tirera P du côté de G. La Regle NC poussera par sa partie inferieure Nn la Regle Ll, & la parabole montera & l'anneau aussi, & la courbe R se décrira. Lorsque Ll sera arrivé sur SA, ce sera la partie superieure NC qui poussera Ll, & cela jusqu'à une hauteur infinie tandis que P s'éloignera infiniment vers Q sur GA. De ce qu'au commencement l'anneau est sur Tt, & qu'immediatement après la courbe R se décrit ; il suit que la ligne Tt est son asymptote. La ligne GF est encore asymptote, c'est-à-dire que l'anneau

ne ſera jamais ſur GF. Car ſuppoſons le au point Z ; l'appliquée à la parabole Zg eſt $2a$, & parceque le parametre eſt auſſi $2a$, l'abſciſſe Kg ſera encore $2a$, afin que le rectangle du parametre & de l'abſciſſe ſoit égal au quarré de l'appliquée. Le triangle rectiligne KZg ſeroit donc iſoſcele : mais le triangle rectiligne KLl eſt auſſi iſoſcele à cauſe de $KL = Ll = \frac{1}{2}a$; donc la ligne CZ ou PCZ paſſeroit par les points K, l, ce qui eſt impoſſible. Donc l'anneau ne tombera point ſur GF, & le ſeul arc infini Zz ſert à la deſcription de la courbe R. FIG. 137.

En ſecond lieu mettons le point P en E, le point N en G, les Regles NC, Ll étenduës ſur AE, l'anneau en E. Pouſſons le point P à l'infini du côté de V : les Regles PC, NC ſe couperont au deſſous de GA, la parabole deſcendra, la Regle Ll étant tirée ou ſoutenuë par la Regle NC ; & la portion inferieure infinie Ec de la courbe ECc ſe décrira. GF ſera ſon aſymptote par la même raiſon, qu'elle l'eſt de R, ainſi qu'on vient de le prouver. L'arc fini XQ de la parabole ſert ſeul à la deſcription de la portion infinie Ec.

En troiſiéme lieu mettons encore le point P en E, l'anneau auſſi en E ; le point N en G, les Regles NC, Ll ſur GA. Alors ſi l'on tire le point P à l'infini du côté de I, les Regles NC, PC ſe couperont au deſſus de GA, & décriront la portion infinie EC de la courbe CEc, dont AB eſt aſymptote, c'eſt-à-dire que l'anneau ne tombera jamais ſur la ligne AB, ou ſur le ſommet K. L'arc fini XK ſert ſeul à décrire la partie infinie EC.

En quatriéme lieu, concevons que le point P eſt en I, l'anneau auſſi en I ; le point N en A, les Regles NC, Ll ſur GA. Alors ſi l'on pouſſe le point P à l'infini du côté de V, l'on décrira la portion infinie If de la courbe QIf, les Regles NC, PC ſe coupant ſous GA, & la Regle NC tirant après ſoi, ou ſoutenant la Regle Ll tandis que la parabole deſcend par ſon poids. La ligne AB eſt ſon aſymptote, par la même raiſon qu'elle l'eſt de la courbe EC. L'arc fini KY ſert ſeul à décrire la portion infinie If.

En cinquiéme lieu mettons encore le point P en I, l'anneau auſſi en I, le point N en A, les Regles NC, Ll ſur GA. Alors ſi l'on tire à l'infini le point P du côté de Q, les lignes NC, PC ſe couperont au deſſus de GA, & décriront la portion infinie IQ de la courbe fIQ ; la parabole deſcendra vers f, la partie inferieure Nn de la Regle NC tirant après ſoi, ou ſoutenant la Regle Ll. La ligne Tt eſt aſymptote de fIQ, c'eſt-à-dire que l'anneau ne parviendra jamais à la ligne Tt, car s'il y étoit, le triangle PNC, auroit les côtez $PN = NC = a$ & ſeroit iſoſcele, donc l'angle NPC étant de 45. degrez auſſi bien que l'angle PCN, l'angle PNC ſeroit droit & la Regle NC perpendiculaire ſur GA ne toucheroit plus la Regle Ll. L'arc infini Yy ſert à décrire la portion infinie IQ.

Toutes ces trois courbes ſont le lieu cherché. Suivant la poſition qu'on

donneroit au commencement à la parabole, on pourroit dans tous les cas ou la faire monter, ou la faire deſcendre. Ce qui convient à toutes les Figures, dont la parabole ſe meut dans ces Exemples.

Dém. Au point C. Dans le triangle CMP, $MP = MC$, x, & $NM = MP - NP$, $x - a$. De plus les triangles NMC, Csl ſont équiangles, ainſi NM, $x-a$: MC, x:: $Cs = \frac{1}{2}a - y$: sl, $\frac{\frac{1}{2}ax - xy}{x-a} = BL$, & ôtant BL de KL, $\frac{1}{2}a$; il reſte $KB = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax + xy}{x-a}$ & par la nature de la parabole $2axy - xyy = a^3 - ayy$.

3. Pour avoir le chemin des courbes, changez 1° l'équation en $x = \frac{a^3 - ayy}{2ay - yy}$; Faites 2° $x = 0$; 3° $y = 0$; 4° $y = \frac{1}{2}a$; 5° $y = \frac{1}{2}a$; 6° $y = 2a$; 7° $y = 3a$. Comme quelque valeur de y qu'on prenne plus grande que $2a$, on trouve toûjours une valeur poſitive de x, il ſuit que toute la courbe R eſt ſituée au deſſus de GA.

Pour la courbe fIQ faites $y = -\frac{1}{2}a$; $y = -\frac{1}{2}a$; $x = a$.

Si x étant a, la valeur de y n'eſt que $\frac{1}{2}a$, comme il arrive au point S, il ſuit qu'en aucun autre point de la ligne GA, on ne trouve une valeur de y qui réponde à $x = a$: ainſi ni IQ ne s'éleve point juſqu'à Tt, ni R ne deſcend point juſques-là, & la ligne Tt eſt aſymptote de ces deux courbes.

4. Je ne trouve pas ici la nature de ces courbes telle que M. DESCARTES la détermine, comme on l'a dit n. 4. Exemple 8. En effet de la maniere que ces trois courbes ſont diſpoſées, elles n'ont point de ſommet commun.

EXEMPLE XI. $aax - xyy = 2aay - ayy$.

Fig. 122. 138. 1. APrès avoir ſuppoſé Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur a données dans ſa Geometrie : on demande $CM \times CD \times CH = CB \times CF \times a$; $aax - xyy = 2aay - ayy$.

2. Cette équation ſe conſtruit ainſi Fig. 138. Soit $AS = \frac{1}{2}a$, menez Ss parallele à AB. Soit $ST = a$, menez Tt, parallele à GA. La parabole KC a pour parametre $2a$, ſon axe ſe meut ſur AB; KL eſt $\frac{1}{2}a$, la Regle $Ll = \frac{1}{2}a$ ſe meut de ſorte que ſon extrémité l gliſſe ſur Sl, & ſon point L ſoit attaché perpendiculairement au point L de l'axe. PC eſt une Regle qui coule ſur GA & fait toûjours l'angle CPM de 45. degrez; dans ſon mouvement, elle pouſſe ou traine après ſoi l'équerre MCB, dont la branche CB eſt toûjours perpendiculaire ſur AB, & la branche CM toûjours perpendiculaire ſur GA. La Regle Vt 1° eſt éloignée de CP, de la ligne $VP = a$, 2° elle eſt pouſſée ou tirée par la Regle PC ſur GA, 3° elle paſſe toûjours par le point t, où l'équerre BCM coupe la ligne Tt, un anneau retenant ſur Tt les deux Regles Vt, CM, laquelle CM eſt prolongée, lorſqu'il eſt neceſſaire. La Regle NCl gliſſe ſur GA, toûjours

parallele à Vt, elle paſſe avec la Regle PC par un anneau C qui coule ſur la ligne parabolique KC, elle fait mouvoir la petite Regle Ll, & en même tems la parabole. L'interſection C décrit les trois courbes R, CAc, QGf, d'une maniere fort ſemblable à celle dont les courbes de Fig. 137. ont été décrites, Exemple 10.

Pour décrire la courbe R, on met les Regles NC, PC, Vt, du côté de I à une diſtance infinie, les anneaux C & t ſont l'un ſur l'autre, les Regles NC, Vt ſur MC, la parabole à une diſtance infinie au deſſous de A, on tire le point P du côté de G à une diſtance infinie, & l'on décrit la courbe R.

Les points P, C, N, & l'anneau C ſont en A; le point V eſt en I & l'anneau t dans l'interſection de AB & Tt; on tire P à l'infini du côté de G, & l'on décrit la portion infinie AC de la courbe CAc. Les choſes étant encore remiſes au même état, ſi l'on tire P à l'infini du côté de I, on décrira la portion infinie Ac de la même courbe CAc.

Pour décrire la courbe fGQ, on fait, comme pour fIQ Figure 137. Exemple 10. Ces trois courbes ſont le lieu cherché.

Dém. Le triangle CMP eſt iſoſcele, & $MP = CM, x$, & $VM = x - a$. Enſuite les triangles VMt, Csl ſont équiangles avec MNC donc $VM, x - a : Mt, a :: Cs = CB - Bs, y - \frac{1}{2}a : sl, \frac{ay - \frac{1}{2}aa}{x-a} = BL$, qui étant ſouſtraite de KL, $\frac{1}{2}a$, laiſſe KB, $\frac{\frac{1}{2}ax - ay}{x-a}$. Et par la nature de la parabole, le parametre $2a \times KB = \overline{CB}^2$, $aax - xyy = 2aay - ayy$.

3. Suivant la Methode de L. 2. P. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. changez 1° l'équation en $x = \frac{2aay - ayy}{aa - yy}$. Pour avoir la ſituation des courbes; faites 2° $x = 0$; 3° $y = 0$; 4° $y = \frac{1}{2}a$; 5° $y = a$; 6° $y = \frac{3}{2}a$; 7° $y = 3a$. 8° $y = -\frac{1}{2}a$. 9° $y = -a$; 10° $y = -2a$, on aura $x = \frac{8}{3}a$; & parceque quelque valeur que l'on donne à $-y$ au deſſus de a, la valeur de x, qui en reſulte, eſt poſitive, il ſuit que toute la courbe R eſt placée au deſſus de GA. Si l'on fait 11° $x = a$, l'équation ſe change en $a^3 - ayy = 2aay - ayy$; $y = \frac{1}{2}a$; on voit donc que x étant a, y n'a que la valeur $\frac{1}{2}a$, comme il arrive au point S; ainſi la courbe fGQ ne s'éleve pas, & la courbe R ne deſcend pas juſques à Tt, qui par conſéquent eſt leur aſymptote.

4° Comme n. 4. Exemple 10.

EXEMPLE XII. $2aax - 3axy + xyy = aay + ayy$.

1. ON ſuppoſe Fig. 122. la même poſition & la même valeur des lignes, que M. DESCARTES leur donne dans ſa Geometrie. Et il faut que $CM \times CD \times CF$ ſoit égal à $CB \times CH \times a$; ce qui s'exprime en termes analytiques de cette ſorte $2aax - 3axy + xyy = aay + ayy$. Fig. 122. 139.

2. On conſtruira ainſi cette équation. Soit priſe $AS = AV$, $\frac{1}{2}a$, par

FIG. 339. les points S, V, on mene Ss, Vu paralleles à AB. Soit $ST = a$, par le point T on mene Tt parallele à GA. La parabole KC a toûjours ſon axe ſur la ligne KV, ſon parametre eſt $4a$, Kl eſt $\frac{1}{10}a$, Ll eſt une petite Regle, qui coule ſur Ss, à qui elle eſt toûjours perpendiculaire, tandis qu'elle eſt attachée ferme au point l de l'axe de la parabole, auquel elle eſt auſſi perpendiculaire. PC, CN ſont deux Regles, dont la diſtance PN eſt toujours égale à a, elles ſe meuvent ſur GA, PC fait toûjours l'angle CPN de 45. degrez, mais NC tourne autour du point mobile N, & dans ſon mouvement elle fait monter ou deſcendre la Regle Ll, & par conſequent la parabole KC; ces deux Regles PC, NC ſe coupent continuellement dans un anneau C, qui coule ſur la ligne parabolique KC. L'interſection C décrit les trois courbes R, Q, $CAIX$.

En premier lieu concevons la parabole KC élevée infiniment au deſſus de GA, & les points P, N des Regles PC, NC à une diſtance infinie au delà de G, où elles ſe coupent au deſſus de GA dans l'anneau C qui y a été auſſi tranſporté. Soit NC perpendiculaire à GA; dans le triangle CPN, les côtez PN, NC ſeront égaux; donc l'anneau & l'interſection C ſe trouvent ſur Tt, & la Regle NC ne touchera point la Regle Ll. Mais dès qu'on tirera P du côté de G, la Regle NC commencera à pouſſer en bas la Regle Ll, & la courbe R ſe décrira. On continuera ce mouvement de P juſques près de G, où la Regle PC retenant le point l par deſſous, tandis que la Regle NC preſſe le point L par deſſus; le mouvement ſera arrêté. Alors on retire P à l'infini du côté t, d'où il étoit venu, NC élevant à l'infini la Regle Ll & la parabole KC; l'anneau C coulant dans un arc de la parabole different de celui, dans lequel il a coulé auparavant. Dans ce retour le reſte de la courbe R ſe décrit. Le commencement de la deſcription de la courbe R fait connoître que Tt eſt ſon aſymptote, & l'on conclud que GF eſt ſon autre aſymptote de ce que l'anneau C ne ſe peut trouver ſur GF.

En ſecond lieu la partie infinie IX de la courbe $CAIX$ ſe décrit en mettant encore le ſommet K à une hauteur infinie au deſſus de GA, & les points P, N à une diſtance infinie du côté de X, en tirant le point P juſques en I. On conclurra encore que la portion IX ne s'éleve jamais juſqu'à Tt, ſi l'on obſerve que dans ce mouvement la Regle NC ſoutient & paſſe ſous Ll, & qu'elle ne peut par conſequent jamais couper PC ſur la ligne Tt; car ſi elle l'y coupoit l'angle PNC ſeroit droit, & NC parallele à HI ne toucheroit plus Ll. On peut cependant ſuppoſer comme on l'a fait auparavant, que cela arrive à une diſtance infinie du côté de X.

En troiſiéme lieu le point P étant arrivé en I, les Regles NC, Ll ſont couchées ſur GA, & ſi l'on tire P juſqu'en A, l'anneau coulera ſur l'arc de la parabole, qui eſt entre les paralleles IH, AB; les parties inferieures Nn, Pp des Regles NC, PC ſe couperont dans l'anneau, & décriront l'arc fini IA de la courbe $CAIX$, la Regle Nn pouſſant vers le bas la

Regle Ll, juſqu'à ce que l'anneau C ſoit ſur le ſommet ; & enſuite élevant la même Regle Ll. Fig. 139.

En quatriéme lieu le point P étant arrivé en A avec l'anneau, les Regles NC, Ll couvrent encore la ligne GA. Si alors on continuë à tirer P à l'infini du côté de G, les parties ſuperieures des Regles NC, PC ſe couperont au deſſus de GA, la ligne NC élevera à l'infini la Regle Ll & la parabole ; & on décrira la portion infinie AC de la courbe $ACIX$, l'anneau coulant ſur l'arc de la parabole, qui eſt entre les paralleles AB, ED. L'anneau n'arrivera jamais ſur DE, car ſi l'on y ſuppoſoit le point C, on prouveroit que CL ſeroit ſegment commun des lignes PC, NC. Ainſi la ligne ED eſt aſymptote de la courbe $CAIX$.

En cinquiéme lieu il faut concevoir la parabole à une diſtance infinie au deſſous de GA, les points N, P à une diſtance infinie vers X, les parties inferieures Nn, Pp des Regles NC, PC ſe coupent dans l'anneau C & dans l'arc de la parabole, qui eſt entre les paralleles ED, GF, alors on tire le point P juſques près du point I, où la Regle Nn pouſſant en haut Ll, la Regle Pp la retient. Il faut donc retirer le point P à l'infini du côté de X, d'où il étoit venu, la Regle Nn ſoutenant Ll. Ces deux mouvemens décrivent la courbe Q, qui eſt à la diſtance de 13 à $14a$ de la ligne GA. On prouvera que les paralleles ED, FG ſont ſes aſymptotes, parceque l'anneau ne peut être ſur aucune des deux, ſans que le même abſurde qu'auparavant ne ſuive.

Ces trois courbes ſont le lieu cherché.

Dém. Le triangle PCM a les côtez PM, CM égaux, ainſi $PM = x$; $NM = a - x$; $Cs = \frac{1}{2}a - y$; $Cu = y + \frac{1}{2}a$.

Dans les triangles NMC, CsL équiangles on a cette proportion, NM, $-x : MC$, $x :: Cs$, $\frac{1}{2}a - y : sL$, $\frac{\frac{1}{2}ax - xy}{a-x} = uC$; & ajoûtant $Kl = \frac{1}{16}a$, Ku ſera $\frac{1}{16}a + \frac{\frac{1}{2}ax - xy}{a-x}$. Or par la nature de la parabole, le parametre $4a \times Ku = \overline{Cu}^2$, ſe reduit à $2aax - 3axy + xyy = aay + ayy$. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Après avoir changé l'équation en $x = \frac{aay + ayy}{2aa - 3ay + yy}$; pour avoir la ſituation des courbes faites $1^\circ\ x = 0$; $2^\circ\ y = 0$; $3^\circ\ y = \frac{1}{2}a$; $4^\circ\ y = a$; $5^\circ\ y = -\frac{1}{2}a$. $6^\circ\ y = -\frac{1}{2}a$. $7^\circ\ y = \frac{5}{4}a$; il en reſulte $x = -15a$ comme ſi l'on faiſoit $y = \frac{1}{2}a$; la courbe Q eſt donc au deſſous de GA, entre les paralleles DE, GF, & forme deux rameaux, qui s'écartent de part & d'autre en deſcendant depuis le ſommet Q qui eſt à la diſtance de GA d'environ 13 à $14a$. Soit $9^\circ\ y = 2a$, il vient $x = \frac{6a^3}{0}$, ce qui donne FG pour aſymptote des courbes R, Q. Si l'on fait $10^\circ\ y = \frac{1}{2}a$, la ſubſtitution fait $x = \frac{25}{3}a$; la courbe R s'éleve donc au deſſus de GA, & à l'infini ſoit en haut, ſoit le long de Tt, parceque x aura toûjours des valeurs poſitives, quelque valeur poſitive que l'on prenne pour y au deſſus de $2a$.

Si l'on fait 11° $x = a$, l'on ne trouvera pour y qu'une valeur positive $y = \frac{1}{2}a$, car l'équation se change en $2a^3 - 3aay + ayy = aay + ayy$. Or y a cette valeur au point S; ainsi ailleurs la portion IX ne s'éleve pas, & la courbe R ne descend pas jusques à Tt, & cette ligne est asymptote de R, & de la partie IX de la courbe $CAIX$.

4. Comme n. 4. Exemple 10.

EXEMPLE XIII. $axy + xyy = 2a^3 - 3aay + ayy$.

FIG. 122. 140.

1. APrès avoir supposé Fig. 122. la position & la valeur que M. DESCARTES donne aux lignes dans sa Géometrie; on demande $CM \times CB \times CH = CD \times CF \times a$; $axy + xyy = 2a^3 - 3aay + ayy$, équation que vous pourrez construire de cette maniere, Fig. 140.

2. Soit $AS = AX = \frac{1}{2}a$; par les points S, X menez Ss, Xx paralleles à AB. Soit $ST = a$; par le point T menez Tt parallele à GA. La parabole KC a pour parametre $4a$, son axe Kx se meut sur Xx, Kl est $\frac{1}{16}a$. Ll est une Regle qui glisse sur Ss, & est attachée au point l de l'axe Kx. Le reste comme Ex. 11. n. 2. Fig. 138. excepté que l'angle CPA est tourné d'un côté different. L'intersection C décrit les trois courbes $YGEC$, Q, R.

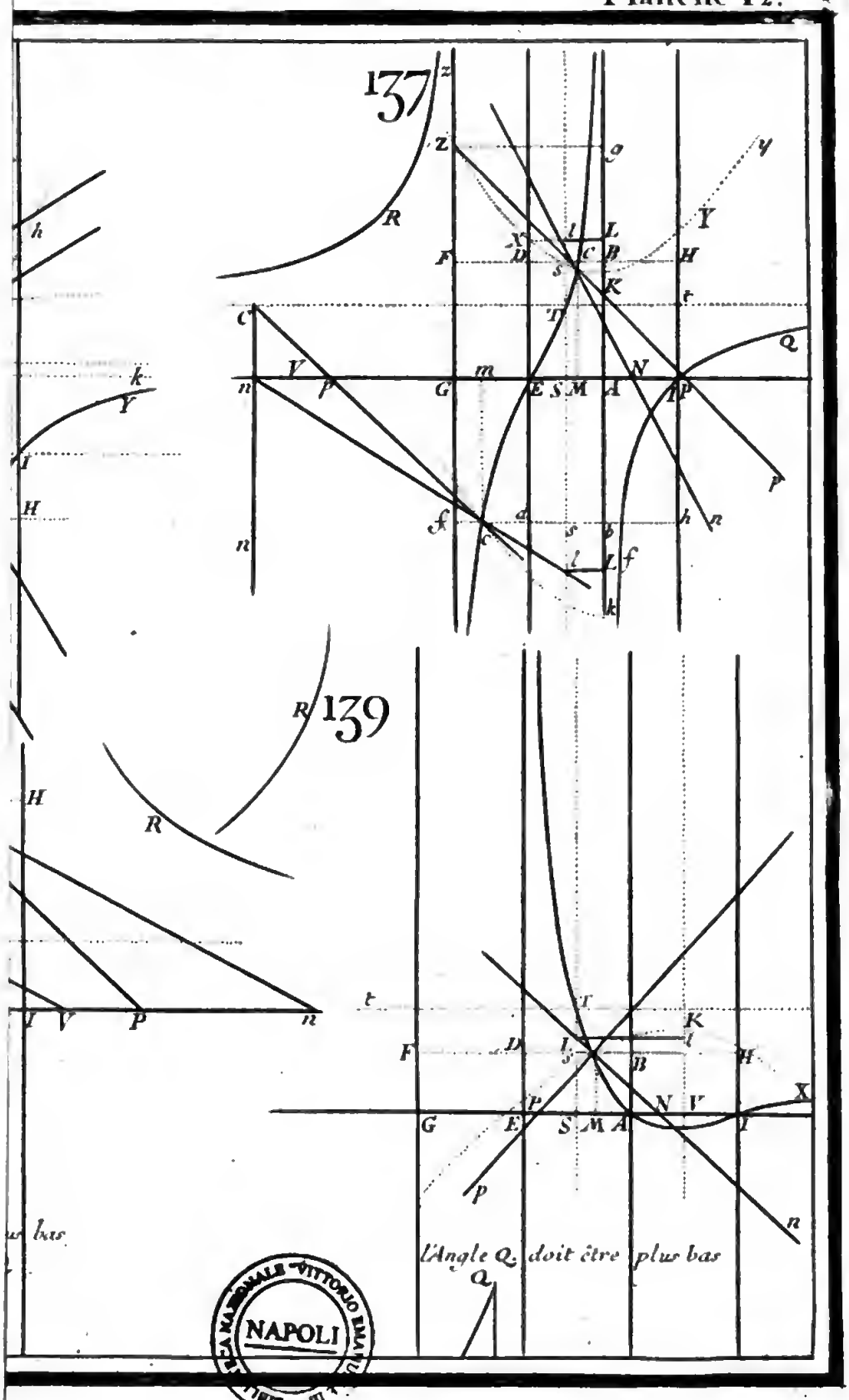
En premier lieu pour décrire la courbe R, on fait comme Ex. 11. pour décrire la courbe R de Fig. 138. excepté qu'on tire le point P jusques près de I; là comme Ex. 12. pour la courbe R de Fig. 139. la petite Regle Ll se trouve tellement gênée entre NC, PC, que le mouvement ne peut pas se continuer vers le même côté. Alors on retire à l'infini le point P du côté d'où il étoit venu, & l'on acheve ainsi la description de la courbe R; la Regle NC soûtient la Regle Ll dans le premier mouvement, & elle la pousse en haut dans le retour. L'anneau C ne sera jamais sur IH, par la même raison que dans les Exemples precedens il n'est jamais sur les asymptotes; IH sera donc une asymptote des courbes R, Q.

En second lieu la partie infinie YG de la courbe $YGEC$ se décrit en mettant le sommet de la parabole à une hauteur infinie au dessus de GA; les points N, P, V à une distance infinie du côté de Y; les Regles NC, Vt sur la partie MC de l'equerre MCB transportée au même endroit, les anneaux C, t l'un sur l'autre: On tire le point P jusques en G, le point t tombe en ce moment sur GF.

En troisiéme lieu si l'on continuë le mouvement de P depuis G jusqu'en E, les Regles NC, PC se couperont au dessous de GA, & décriront le petit arc GE, la ligne NC poussant en bas la Regle Ll, jusqu'à ce que l'anneau C soit sur le sommet K; & ensuite élevant la même Regle Ll.

En quatriéme lieu si l'on tire le point P depuis E à l'infini vers I, l'on décrira la portion infinie EC de la courbe $YGEC$, sans que l'anneau

puisse


137
R
Z
z
g
y
Y
h
k
Y
I
H
F
D
C
B
H
K
T
t
Q
V
m
G
E
S
M
A
N
P
p
f
d
s
b
h
n
L
l
139
R
H
I
V
P
n
t
T
K
l
F
D
B
H
G
E
S
M
A
N
V
X
p
n
l'Angle Q doit être plus bas
Q
NAPOLI

puiſſe être jamais ſur AB par la même raiſon qu'auparavant, & AB eſt aſymptote de GEC.

En cinquiéme lieu il faut concevoir la parabole à une diſtance infinie au deſſous de GA, les Regles NC, PC, Vt à une diſtance infinie du côté de Ys les parties inferieures de NC, PC étant employées ; on décrira la courbe Q, comme on a fait la courbe Q de Ex. 12. Fig. 139. les paralleles AB, IH ſont aſymptotes.

De la maniere dont on commence la deſcription de la courbe R, & de la portion YG, on conclurra que R ne deſcend point, & que YG ne s'éleve pas juſqu'à Tt, & que cette ligne eſt aſymptote de R.

Ces trois lignes ſont le lieu cherché.

Dém. Les triangles tVM, CNM, lCs ſont équiangles, le triangle PCM eſt iſoſcele, & $PM = CM$, x ; $VM = PM - PV$, $x - a$. Les triangles VtM, Csl donnent cette Analogie VM, $x - a : Mt$, $a :: Cs = sB - CB$, $\frac{1}{2}a - y : sl$, $\frac{\frac{1}{2}aa - ay}{x-a} = Lx$. Et ajoûtant $KL = \frac{1}{16}a$, on fait $Kx = \frac{1}{16}a + \frac{\frac{1}{2}aa - ay}{x-a}$, qui étant multipliée par le parametre $4a$, forme un produit qui par la nature de la parabole eſt égal au quarré de l'appliquée Cx, $yy + ay + \frac{1}{4}aa$, ce qui ſe reduit à $xyy + axy = 2a^3 - 3aay + ayy$. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. L'équation precedente ſe change en $x = \frac{2a^3 - 3aay + ayy}{yy + ay}$. Pour avoir la ſituation des courbes, faites $1^\circ\ x = 0$; $2^\circ\ y = 0$; $3^\circ\ y = \frac{1}{2}a$; $4^\circ\ y = \frac{3}{2}a$; $5^\circ\ y = 3a$; on trouve $x = \frac{1}{6}a$, valeur poſitive, & comme toutes les valeurs de x ſont poſitives en prenant y plus grande que $2a$, il ſuit que la courbe YG s'étend à l'infini du côté de Y. Si l'on fait $7^\circ\ -y = \frac{1}{3}a$, ou $y = -\frac{1}{3}a$, il reſulte $x = -14a$. Si l'on fait $-y = \frac{2}{5}a$, ou $y = -\frac{2}{5}a$, c'eſt $x = -14a$ cette valeur negative de x marque qu'au deſſous de GA entre les paralleles AB, IH, il ſe forme une nouvelle courbe Q, qui a deux rameaux qui deſcendent à l'infini. Son ſommet eſt à la diſtance de GA d'environ 13 à $14a$. Si l'on fait $8^\circ\ -y = a$, $y = -a$, l'on trouve $x = \frac{6a^3}{0}$, & IH eſt aſymptote. Si l'on fait $9^\circ\ -y = 3a$, $y = -3a$, il vient $x = \frac{2a^3 + 9a^2 + 9a^2}{9aa - 3aa} = \frac{10}{3}a$, & parceque les valeurs de x ſeront toûjours poſitives, quelque valeur de $-y$ que l'on prenne au delà de a, on conclud, que au dehors des paralleles, il ſe forme une courbe R, qui eſt toute au deſſus de GA. Si l'on fait $10^\circ\ x = a$, l'équation ſe change en $y = \frac{1}{2}a$. Et parceque x étant a, y n'a qu'une valeur $\frac{1}{2}a$, ce qui arrive au point S, il ſuit que Tt eſt aſymptote de la courbe R, & de la portion GY de la courbe $YGEC$.

PROBLEME.

ON ſera peut-être bien aiſe de voir une courbe, qui ſoit de telle nature, que toutes ſes appliquées étant égales aux appliquées d'une Section conique, il y ait même raiſon des abſciſſes de la nouvelle courbe priſes entre ſon ſommet & ſes ordonnées à une ligne donnée, que de cette ligne donnée aux abſciſſes de la Section conique priſes de même entre ſon ſommet & ſes ordonnées égales.

FIG. 141. Etant donnée une courbe quelconque AD, Fig. 141. décrire une autre courbe Hd, dont la nature ſoit telle, que ſes ordonnées cd étant égales aux ordonnées CD de la courbe AD; il y ait même raiſon de Ac abſciſſe priſe entre ſon ſommet A & l'ordonnée cd à une ligne donnée AB, que de la ligne AB à AC abſciſſe priſe entre le ſommet A & l'ordonnée CD égale à cd.

1. Suppoſons la choſe faite, & nommons la donnée AB, a; les inconnuës AC, x; $CD = cd$, y; Ac, z. Par l'hypotheſe, AC, $x : AB$, $a :: AB$, $a : Ac$, z. Donc $xz = aa$. équation generale pour toute ſorte de courbes cherchées Hd.

2. Que la courbe AD ſoit une parabole, dont le parametre eſt a; ſon équation ſera $x = \frac{yy}{a}$. Subſtituons cette valeur de x à ſa place dans l'équation generale $xz = aa$; nous ferons $yyz = a^3$, équation à l'hyperbole cubique par rapport à ſes aſymptotes. Ainſi la courbe Hd eſt une hyperbole cubique, dont l'équation eſt $yyz = a^3$, Ac, AB les aſymptotes, A le ſommet.

3. Que la courbe AD ſoit un cercle, dont le diametre eſt $2a$; ſon équation ſera $xx - 2ax = -yy$, dont la racine eſt $x = a + \sqrt{aa - yy}$, qui étant ſubſtituée dans $xz = aa$, donne $z\sqrt{aa - yy} = aa - az$, qu'il faut quarrer, pour avoir $yyzz - 2a^3z + a^4 = 0$. Equation de la nouvelle courbe Hd.

4. Si au lieu d'une courbe, l'on avoit donné un angle, & que l'on eut l'équation $x = \frac{cy}{b}$, l'analogie ſeroit $\frac{cy}{b} : a :: a : z$; $\frac{cyz}{b} = aa$, $yz = \frac{aab}{c}$ équation de la courbe Hd, qui ſeroit une hyperbole ordinaire entre ſes aſymptotes.

ARTICLE III.

Quelle eſt la ligne courbe la plus ſimple, qui donne la reſolution du Probléme de Pappus propoſé en cinq lignes droites.

1. M. DESCARTES dit, que cette queſtion étant propoſée en cinq lignes, le cas le plus ſimple eſt celui, où toutes les lignes données ſont paralleles entr'elles; & qu'après ce cas le plus ſimple eſt celui, où il y en a

quatre paralleles, & une cinquiéme qui les coupe. Mais quand même ce cas ſeroit par rapport à la Figure, le plus ſimple; il ne s'en ſuivroit pas, que la courbe qui le reſout fût auſſi la plus ſimple : car nous avons vû dans les Exemples de trois ou quatre lignes propoſées, que la reſolution s'eſt faite avec des courbes moins ſimples les unes que les autres. En effet trois lignes étant propoſées, on a trouvé un cercle, Sect. 2. Art. 6. Ex. 4. Fig. 88. une hyperbole rapportée à ſes diametres, Art. 7. Ex. 3. Fig. 100. Ex. 5. Fig. 102. une hyperbole rapportée à ſes aſymptotes, Art. 8. Ex. 3. Fig. 113. L'Exemple même de M. DESCARTES, qu'il a conſtruit avec un cercle, Art. 6. Ex. 13. Fig. 69. ſe conſtruit encore avec une hyperbole rapportée à ſes diametres, Art. 7. Ex. 9. Fig. 105.

2. Quelque raiſon que l'on apporte, pour prouver que les courbes, qui reſolvent la queſtion de Pappus propoſée en cinq lignes, dont quatre ſont paralleles entr'elles, & ſont coupées par une cinquiéme; quelque raiſon, dis-je, que l'on apporte, pour prouver que ces courbes ſont les plus ſimples qui puiſſent reſoudre ce Problème propoſé en cinq lignes : l'on aura de la peine à ſe perſuader que l'équation $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, ſoit plus ſimple, ou même auſſi ſimple que l'équation $y^3 = aax$ à la premiere parabole cubique. Il en eſt de même de l'équation $2aax - 3ayx + xyy = aay + ayy$ comparée avec l'équation $xyy = a^3$ d'une hyperbole cubique rapportée à ſes aſymptotes. Cependant M. DESCARTES aſſure Liv. 1. Part. 3. Sect. 2. & Liv. 2. Part. 2. Sect. 1. que lorſqu'il y a cinq, ſix, ſept ou huit lignes données, les points cherchez ſe rencontrent en quelqu'une des lignes, qui ſont d'un degré plus compoſées que les Sections coniques; & qu'il eſt impoſſible d'en imaginer aucune, qui ne ſoit utile à cette queſtion, à cauſe que la poſition des lignes droites données peut varier en toutes ſortes, & par conſequent faire changer tant les quantitez connuës, que les ſignes + & — de l'équation en toutes les façons imaginables.

M. DESCARTES n'oſe pas déterminer quelles courbes ſont les plus ſimples, ou celles des premiers Exemples, dans leſquels une des inconnuës y monte au cube y^3; ou celles des ſix derniers, dans leſquels les deux inconnuës compoſent le parallelepipede xyy. Si le Problême eſt ainſi propoſé, étant données quatre lignes paralleles, & une cinquiéme qui les coupe, trouver un point, duquel ayant tiré une ligne droite ſur chacune des données; le parallelepipede compoſé de trois de ces lignes ſoit égal au parallelepipede compoſé des deux autres & d'une ligne donnée : & ſi, comme M. DESCARTES le dit Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. entre les lignes du même genre celles-là ſont également compoſées, qui peuvent ſervir à trouver les mêmes points, & conſtruire les mêmes Problêmes, c'eſt-à-dire à conſtruire les differens cas du même Problême : il faut conclurre, que les courbes des premiers & des derniers Exemples, qui reſolvent les differens cas de la queſtion ici propoſée ſont également ſimples, à moins qu'on

ne veüille avec Mr DESCARTES donner la preference aux courbes des premiers Exemples, à cauſe que leur conſtruction eſt plus facile. Cependant il ſemble que les Geometres, qui veulent que l'équation $xy = aa$ dans laquelle les inconnuës compoſent un rectangle, ſoit plus compoſée que les équations $yy = ax$, $yy = 2ax \pm xx$, dans leſquelles le quarré de l'une, & même des deux inconnuës ſe trouve : doivent auſſi dire, que les équations des ſix derniers Exemples, dans leſquels les inconnuës compoſent un parallelepipede xyy, ſont plus compoſées que celles des Exemples precedens, qui contiennent le cube y^3 d'une ſeule inconnuë.

ARTICLE IV.

Cinq lignes étant données, les points cherchez peuvent être en une ligne droite, en un cercle, ou en une Section conique. Et trois ou quatre lignes étant données, ils peuvent être ſur une courbe d'un genre plus élevé.

PArceque cinq lignes étant données, leur differente poſition peut faire changer les ſignes + & — d'une infinité de façons ; il ſuit que les points cherchez peuvent compoſer une ligne droite, ou un cercle, ou une Section conique. On a déja vû Art. 1. des Exemples à la ligne droite. Parceque, comme on l'a obſervé, Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 1. les produits des lignes cherchées peuvent avoir entr'eux telle raiſon, qu'on voudra ; il ſuit que, quelque nombre de lignes qu'on propoſe, il n'eſt point de ligne, qui ne puiſſe être utile en quelque cas ; & qu'ainſi trois ou quatre lignes étant données, les points cherchez peuvent être ſur une courbe d'un genre plus élevé que les Sections coniques. Voici des Exemples.

FIG. 121. 1. On demande Fig. 122. que le parallelepipede ſous CM, CB, CH ſoit au parallelepipede ſous CD, CF, & une donnée a ; comme CM eſt à a. Après avoir ſuppoſé la même valeur des lignes que M. DESCARTES leur donne dans ſa Geometrie, on trouve cette proportion $axy + xyy : 2a^3 - 3aay + ayy :: x : a$, qui ſe reduit à $y = \frac{1}{2}a$ équation à la ligne droite, qu'il eſt aiſé de conſtruire.

2. On demande que $CB \times CD \times CH : CM \times CF \times a :: CB : a$. $aay - y^3 : 2aax - axy :: y : a$, qui ſe reduit à $yy - xy = aa - 2ax$, équation à l'hyperbole rapportée à ſes diametres, ou à ſes aſymptotes, qu'il n'eſt pas fort difficile de conſtruire.

3. On demande que $\overline{CM \times CD \times CH} + \overline{CM \times \overline{CB}^2} : CB \times CF \times a :: a : CM$, c'eſt-à-dire, $aax - xyy + xyy = aax : 2aay - ayy :: a : x$; $yy - 2ay = -xx$, équation au cercle.

FIG. 86. 4. Fig. 86. Les lignes AB, EF ſont paralleles, EA les coupe à angles

droits. Il faut trouver un point C, duquel tirant les perpendiculaires CB, CD, CF ſur les données, on ait $CB \times CD : CF \times a :: \overline{CD}^2 : \overline{CB}^2$.

Nommons AE, $a = BF$; AB, $x = CD$; CB, y; $CF = BF - CB$, $a - y$. On a donc $xy : aa - ay :: xx : yy$. & $y^3 = aax - axy$.

5. Quand on ne ſuppoſeroit que deux lignes droites données AB, AD, ſi l'on demandoit que le quarré de CD fût au quarré de CB, comme CB eſt à une donnée a; on auroit $xx : yy :: y : a$, & $y^3 = axx$ équation à la ſeconde parabole cubique.

ARTICLE V.

Si le Problême de Pappus peut être propoſé d'une maniere entierement impoſſible.

ON a vû, Part. 2. Sect. 2. Art. 1. n. 4. que M. DESCARTES dit dans une de ſes Lettres, qu'on peut propoſer le Problême de Pappus en pluſieurs manieres differentes de celles, dont il l'a propoſé dans ſa Geometrie, & parmi leſquelles il y en a quelques-unes d'impoſſibles de quelque façon que l'on faſſe le calcul.

On n'entend pas parler ici des impoſſibilitez, qui ſont évidentes, dès qu'on les propoſe, & avant tout examen & tout calcul: comme ſi le Problême de Pappus étant propoſé en quatre lignes, on demandoit que $CB \times CF$ & $CD \times CH$ fuſſent entr'eux, comme deux perpendiculaires tirées du point A ſur ES de Fig. 69. Ou qu'après avoir dit que $AG = 5$, $AE = 3$, on demandoit, que ces deux rectangles fuſſent égaux, & comme AG à AE. FIG. 69.

Mais il s'agit des impoſſibilitez, dont on ne peut s'appercevoir, qu'après avoir fini ou du moins avancé le calcul. Voyez Sect. 2. Art. 5. Ex. 9. & Art. 6. Ex. 10. Cela arrivera certainement toutes les fois que tous les termes, qui ſont ſous le ſigne radical, auront le ſigne —; or les ſignes peuvent varier de toutes les façons imaginables: ainſi le Problême de Pappus peut être propoſé en trois ou quatre lignes d'une maniere impoſſible.

ARTICLE VI.

Des differentes Eſpeces de courbes, & de leur deſcription.

M. DESCARTES.

POur les lignes qui ſervent aux autres cas, je ne m'arrêterai point à les diſtinguer par eſpeces: car je n'ai pas entrepris de dire tout; & ayant expliqué la façon de trouver une infinité de points par où elles paſſent, je penſe avoir donné le moyen de les décrire.

Quelles ſont les lignes courbes, qu'on décrit en trouvant pluſieurs de leurs points, qui peuvent être reçuës en Geometrie.

Même il eſt à propos de remarquer, qu'il y a grande difference entre cette façon de trouver pluſieurs points pour tracer une ligne courbe, & celle dont on ſe ſert pour la ſpirale, & ſes ſemblables. Car par cette derniere on ne trouve pas indifferemment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais ſeulement ceux, qui peuvent être déterminez par quelque meſure plus ſimple, que celle qui eſt requiſe pour la compoſer, & ainſi à proprement parler, on ne trouve pas un de ſes points, c'eſt-à-dire pas un de ceux, qui lui ſont tellement propres, qu'ils ne puiſſent être trouvez que par elle. Au lieu qu'il n'y a aucun point dans les lignes, qui ſervent à la queſtion propoſée, qui ne ſe puiſſe rencontrer entre ceux qui ſe déterminent par la façon tantôt expliquée. Et pourceque cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment pluſieurs de ſes points, ne s'étend qu'à celles, qui peuvent auſſi être décrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entierement rejetter de la Geometrie.

Quelles ſont auſſi celles, qu'on décrit avec une corde, qui peuvent y être reçuës.

Et on n'en doit pas rejetter non plus celle, où on ſe ſert d'un fil, ou d'une corde repliée, pour déterminer l'égalité ou la difference de deux ou pluſieurs droites, qui peuvent être tirées de chaque point de la courbe qu'on cherche, à certains autres points, ou ſur certaines autres lignes à certains angles: ainſi que nous avons fait en la Dioptrique * pour expliquer l'ellipſe & l'hyperbole. Car encore qu'on n'y puiſſe recevoir aucunes lignes qui ſemblent à des cordes, c'eſt-à-dire, qui deviennent tantôt droites & tantôt courbes, à cauſe que la proportion, qui eſt entre les droites & les courbes, n'étant pas connuë, & même je croi ne le pouvant être par les hommes, on ne pourroit rien conclurre de là qui fût exact & aſſuré. Toutefois à cauſe qu'on ne ſe ſert de cordes en ces conſtructions, que pour déterminer des lignes droites, dont on connoît parfaitement la longueur, cela ne doit point faire qu'on les rejette.

* Diſcours 8.

1. Il y a quatre eſpeces de courbes dans le premier genre, le cercle, la parabole, l'ellipſe, l'hyperbole; M. DESCARTES diviſe encore les ellipſes en differentes eſpeces, auſſi bien que les hyperboles dans ſa Diop-

trique. Mais la difficulté qu'on trouve dans les autres genres, eſt cauſe qu'on ne l'a point fait.

2. Nous avons parlé de la deſcription des courbes avec un fil ou une corde, Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 4. Methode 2. de leur deſcription en cherchant pluſieurs de leurs points §. 3. Il reſte à expliquer la difference, que M. DESCARTES met entre les manieres de décrire les courbes en trouvant pluſieurs de leurs points, & qui commence par ces mots; *Même il eſt à propos de remarquer*, &c.

3. M. DESCARTES vient de parler de la courbe de Fig. 122. qui ſe décrit par un mouvement regulier & continu : il ſemble donc, qu'en diſant, *qu'il y a grande difference entre cette façon de trouver pluſieurs points pour tracer une ligne courbe, & celle dont on ſe ſert pour la ſpirale*; il compare la Methode, qui décrit une ligne Geometrique par un mouvement continu avec la Methode, qui décrit auſſi la ſpirale par un mouvement continu, & qui conſiſte en ce que Fig. 45. tandis que le rayon aA parcourt d'un mouvement uniforme toute la circonference du cercle $ABCDA$ par ſon extrêmité A; le point a du centre parcourt le rayon aA d'un mouvement auſſi uniforme; de ſorte que la trace, que le point a laiſſe dans ce mouvement compoſé, ſoit la ſpirale $abcdA$, comme il a été dit, Part. 1. Sect. 1. Art. 3. n. 3. Si c'étoit là le ſentiment de M. DESCARTES, il auroit raiſon de preferer la Methode, avec laquelle il a décrit la courbe de Fig. 122. à la Methode de décrire la ſpirale, parceque le mouvement du point a ſur le rayon, & celui du rayon ſur la circonference du cercle ne ſauroient ſe faire exactement enſemble, la proportion du rayon & de la circonference n'étant pas connuë. Auſſi ne crois-je pas, que la ſpirale ait jamais été décrite de cette façon.

Fig. 122.

Fig. 45.

4. La maniere ordinaire de décrire la ſpirale eſt de chercher pluſieurs de ſes points de cette façon Fig. 45. Le point A eſt l'origine des x, qui ſe prennent en allant de A en B, C, D ſur la circonference du cercle $ABCD$ & les abſciſſes ſont les arcs AB, AC, &c. Le centre a eſt l'origine des ordonnées y, qui ſe prennent en allant de a vers A ſur le rayon aA, & ſe tranſporte ſur les rayons ab, ac, &c. Par exemple ſi l'on veut le point d de la ſpirale, lequel répond au point D neuviéme diviſion de la circonference depuis le point A : je tire le rayon aD, & ayant pris ag ſur le rayon, je tranſporte cette ligne en ad, & d eſt un point de la ſpirale cherchée. On trouvera de la même façon autant de points qu'on voudra de cette courbe.

Si la penſée de M. Deſcartes eſt ici, que la maniere de décrire les courbes par un mouvement continu & regulier, eſt préferable à cette ſeconde maniere de décrire la ſpirale : il a encore raiſon; puiſqu'elle eſt même préferable à la maniere de décrire les lignes Geometriques en cherchant pluſieurs de leurs points; à cauſe que par cette maniere on ne décrit pas à pro-

FIG. 45. prement parler les courbes, desquelles on ne trouve qu'un très-petit nombre de points ; mais on les suppose décrites, & on les considere. Au lieu que par le mouvement continu on trace la courbe, sans en chercher les points separément.

5. Il paroît plûtôt, que M. Descartes ne parle en cet endroit, que des Methodes qui décrivent la spirale & les lignes Geometriques en trouvant plusieurs de leurs points. Ce qui se prouve soit par les paroles mises à la Marge du Texte, soit par celles-ci. *Et pource que cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles, qui peuvent aussi être décrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entierement rejetter de la Geometrie.* Et quand il dit que cette *façon* a été *tantôt expliquée :* il entend ce qu'il en a dit, Liv. 1. Part. 3. Sect. 5. Art. 3. n. 2. Cela supposé.

6. Ne trouve-t-on pas n. 4. indifferemment les points de la spirale, c'est-à-dire, tous ceux que l'on veut ?

7. *On trouve seulement les points de la spirale, qui peuvent être déterminez par une mesure plus simple, que celle qui est requise pour la composer.* Je ne voi pas, qu'on puisse trouver les points de la spirale, ni qu'on puisse la décrire d'une maniere plus simple, que celle qui vient d'être rapportée n. 4. ni qu'on puisse se servir pour cela d'une mesure plus simple.

Ainsi à proprement parler, on ne trouve pas un des points de la spirale, c'est-à-dire pas un des points, qui lui sont tellement propres, qu'ils ne puissent être trouvez que par elle. Il me semble que le point *d* par exemple est aussi propre de la spirale, que les points des lignes Geometriques leur sont propres. Que signifie cette expression, le point *d* de la spirale peut être trouvé par la spirale ? Est-ce qu'on trouve les points de l'hyperbole par l'hyperbole ?

8. *Cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles, qui peuvent être décrites par un mouvement regulier & continu.* Cela est vrai de la Methode de Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

PARTIE TROISIE'ME.

Les proprietez des lignes courbes Geometriques se déduisent de leur équation.

L'Equation d'une ligne courbe Geometrique, est l'expression Algebrique du rapport, qu'ont tous les points de cette ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, avec qui on l'a comparée. M. Descartes parle en peu de mots des proprietez en general, qu'on peut conclurre de l'équation des courbes ; ensuite il s'étend sur la maniere de mener leurs tangentes, en supposant

ſuppoſant la connoiſſance de cette équation. Ce ſera la matiere des deux Sections de cette Partie.

SECTION I.

Des proprietez en general des lignes courbes déduites de leur équation.

M. DESCARTES.

OR de cela ſeul qu'on ſçait le rapport, qu'ont tous les points d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ai expliquée; il eſt aiſé de trouver auſſi le rapport qu'ils ont à tous les autres points & lignes données: & enſuite de connoître les diametres, les aiſſieux, les centres, & autres lignes, ou points, à qui chaque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus ſimple qu'aux autres: & ainſi d'imaginer divers moyens de les décrire, & d'en choiſir les plus faciles. Et même on peut auſſi par cela ſeul trouver quaſi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'eſpace qu'elles comprennent, ſans qu'il ſoit beſoin que j'en donne plus d'ouverture. Et enfin pour ce qui eſt de toutes les autres proprietez qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que de la grandeur des angles, qu'elles font avec avec quelques autres lignes.

Que pour trouver toutes les proprietez des lignes courbes, il ſuffit de ſçavoir le rapport qu'ont toutes leurs points à ceux des lignes droites; & de la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces points à angles droits.

Prenons pour exemple l'hyperbole GCE Fig. 53. dont l'équation a été trouvée Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$, après qu'on l'a eû comparée avec la droite AB, & qu'on a eû nommé les connuës AG, a; KL, b; NL, c; les inconnuës CB, y; AB, x; & qu'on a eû trouvé $BL = \frac{by - bc}{c}$. Je regarde cette équation, comme une premiere proprieté, dont il faut conclurre les autres. Tandis qu'on fait la recherche des proprietez inconnuës, il n'eſt pas poſſible, qu'il n'y ait de tems en tems bien du travail inutile, ſoit parcequ'on ne peut pas toûjours deviner d'abord le chemin le plus court, ſoit parcequ'il ſe trouve des chemins qui ne conduiſent à rien. Après avoir trouvé pluſieurs de ces proprietez, on leur donne l'ordre qui paroît le plus naturel: une proprieté déja trouvée ſert fort ſouvent à en connoître une autre, ſans qu'il ſoit neceſſaire de recourir à la premiere équation; ſouvent auſſi on découvre une nouvelle proprieté ſans avoir beſoin ni de l'équation, ni des proprietez déja connuës.

Fig. 53.

I.

Fig. 142. 53. On mene par le point G, Fig. 142. qui eſt la même que Fig. 53. la droite GF parallele à AB; on veut ſavoir le rapport des points C de la courbe GCE aux points de la droite GF. Continuez BC en F, vous avez $FB = GA, a$; & $CF, z = a - y$; & $y = a - z$.

Tirez la valeur de y de l'équation $yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$; pour cela extrayez ſa racine, qui ſera $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c - \frac{cx}{2b} + \sqrt{-\frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{acx}{2b} - \frac{ccx}{2b} + \frac{ccxx}{4bb}}$. Subſtituez cette valeur de y dans $z = a - y$. Quarrez chaque membre, il vous reſtera $zz - az + cz - \frac{cx}{b}z + \frac{ac}{b}x = o$, équation qui exprime le rapport du point C & de tous les autres de la courbe GCE à tous les points de la droite GF.

Mais ce rapport auroit pû ſe trouver plus aiſément de cette façon. Les triangles CBL, CFG ſont équiangles; donc $CB, y : BL, \frac{by - bc}{c} :: CF, z : FG, x, xy = \frac{zby - bcz}{c}$; pour y mettez ſa valeur $a - z$; vous ferez $zz - az + cz + \frac{acx}{b} - \frac{cxz}{b} = o$. Comme auparavant.

II.

On diviſe AG en deux parties égales au point I, & par le point I on mene IP parallele à KN; on cherche le rapport des points C de la courbe GCE aux points de la droite IP. Nous avons $IA = \frac{1}{2}a$; nommons CR, v. Les triangles NLK, PAI donnent cette Analogie $NL, c : LK, b :: IA, \frac{1}{2}a : AP, \frac{ab}{2c}$; donc $PB, \frac{ab}{2c} - x$. Les triangles PAI, PBR fourniſſent celle ci, $PA, \frac{ab}{2c} : AI, \frac{1}{2}a :: PB, \frac{ab}{2c} - x : BR, \frac{1}{2}a - \frac{cx}{b}$; Donc $CR, v = \frac{1}{2}a - \frac{cx}{b} - y$. Pour y ſubſtituons ſa valeur trouvée n. 1. Nous aurons $v + \frac{1}{2}c + \frac{cx}{2b} = -\sqrt{-\frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{acx}{2b} - \frac{ccx}{2b} + \frac{ccxx}{4bb}}$. Si nous quarrons les deux membres, l'équation ſe reduira à $vv + cv + \frac{cx}{b} + \frac{1}{2}ac - \frac{1}{4}aa + \frac{acx}{2b} + \frac{ccx}{b} = o$, qui exprime le rapport des points de la courbe GCE aux points de la droite IP. Et ſi nous faiſons $v + \frac{1}{2}c + \frac{cx}{2b} = s$, & enſuite $x - \frac{ab}{c} - b = t$, nous trouverons la reduite $\frac{4bbss}{cc} = tt - \frac{4abb}{c}$ équation à l'hyperbole rapportée à un diametre, comme Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 1. n. 3.

III.

Fig. 143. On prend Fig. 143. $GI = AE$, on mene IP parallele à CK. Il faut trouver les proprietez de la courbe GCE par rapport à CB, cD, priſes entre la courbe & les lignes PA, PI, ſur la ligne DB parallele à GA. Je prolonge BD juſqu'à ce qu'elle rencontre IH parallele & égale à AB, x.

Lorſque la Regle GL, qui paſſe toûjours par le point L dans ſon mou-

vement autour du point G, tombe sur GA; alors les points N, C tombent sur E, & EA est égale à NL, $c = GI$. Les triangles équiangles NLK, IHD donnent cette Analogie $KL, b : NL, c :: IH, x : HD, \frac{cx}{b}$; & comme $HB = a + c$: on aura $DB = a + c - \frac{cx}{b}$; & $DC = a + c - \frac{cx}{b} - y$. FIG. 143.

L'équation à la courbe GCE est $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$, ou $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy = ac$. Je multiplie CD par CB, le produit est $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$, qui est égal à ac. Il est évident qu'en quelque point de la portion infinie RCE, que je prenne le point C, je trouverai la même valeur de $CD \times CB$: donc tous ces rectangles sont égaux à $AG \times GI = ac = AE \times EI$, & par conséquent ils sont égaux entr'eux. Il suit encore que tous les CB, c'est-à dire les lignes paralleles à GA prises entre la courbe RCE & la droite AB, ont toûjours une valeur, puisque le rectangle sous CB & CD étant égal à ac, il n'est jamais égal à zero : donc il y a toûjours quelque espace entre RCE & AB, ainsi AB est asymptote de RCE.

Supposons la Regle generatrice en Gl, où elle est, lorsque le point c de la courbe GCE est décrit. Nous avons cB, y, & le reste comme au point C. Les triangles nlk, cBk sont équiangles; & nous ferons $nl, c : lk, b :: cB, y : Bk, \frac{by}{c}$; donc $Bl = \frac{by}{c} - b$; $Al = x + \frac{by}{c} - b$. Les triangles GAl, cBl sont encore équiangles; donc $GA, a : Al, x + \frac{by}{c} - b :: cB, y : Bl, \frac{by}{c} - b$; $yy = ay + cy - \frac{cxy}{b} - ac$ même équation qu'au point C.

De plus comme auparavant nous avons $HD = \frac{cx}{b}$. Nous avons aussi $DB = a + c - \frac{cx}{b}$; & $cD, a + c - \frac{cx}{b} - y$, qui étant multipliée par cB, y; produit $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$, qui est égal à ac. D'où nous conclurrons comme auparavant, qu'en quelque point de la portion infinie RcG de la courbe GCE, que nous prenions le point c, nous trouverons la même valeur de $cD \times cB$; donc tous ces rectangles sont égaux à $AG \times GI = ac = AE \times EI$, & ainsi ils sont égaux entr'eux : nous conclurrons encore que tous les cD, ou toutes les lignes paralleles à GA prises entre la courbe RcG & la droite IP ont toûjours une valeur réelle, qu'il y a toûjours quelque espace entre RcG & IP, & que IP est une autre asymptote de RcG.

De plus les rectangles quelconques $CD \times CB$, $cD \times cB$, qui sont toûjours égaux à ac, sont égaux entr'eux : ainsi $cB : CB :: CD : cD$; $cB - CB = cC : CB :: CD - cD = Cc : cD$; & $CB = cD$. On prouvera de même que $ST = st$, &c.

On pourra encore démontrer, comme on fait dans les Traitez des Sections coniques, que quelque ligne droite LK, Ad, Fig. 144. qui coupe l'hyperbole en deux points : on a toûjours $CA = Td$, $XL = SK$. Ce qui FIG. 144.

FIG. 144. fournit une Methode pour décrire l'hyperbole. Car les aſymptotes PA, PD étant données, avec un ſeul point C appartenant à l'hyperbole ; on tirera par le point C autant de lignes droites qu'on voudra terminées aux aſymptotes, comme BCD, ACd ; enſuite on coupera $Td = CA$, $cD = CB$, les points T, c ſont à l'hyperbole. Si après cela par un point T déja trouvé l'on tire d'autres lignes YTL, &c. & que l'on coupe $YT = ZL$, le point Z ſera auſſi à l'hyperbole.

IV.

FIG. 145. On diviſe IA, Fig. 143. en deux également au point F, & l'on joint FP ; on mene Tt parallele à IA, & par le point R la ligne MRm auſſi parallele à IA. On demande le rapport de l'hyperbole avec FP, fS, fs, Mm.

Les triangles PFA, PfT ſont équiangles, comme auſſi les triangles PFI, Pft. Donc $PF : FA :: Pf : fT$. & $PF : FI :: Pf : ft$. Mais les deux premiers termes PF, PF ; les deux ſeconds FA, FI ; les deux troiſiémes Pf, Pf ſont égaux entr'eux ; donc les deux derniers fT, ft ſont encore égaux : & comme n. 3. $ST = st$, on aura $fS = fs$. Or on peut démontrer la même choſe de toute parallele Cc à GA ; il ſuit donc que PF diviſe en deux parties égales toutes les lignes Cc, Ss, paralleles entr'elles & inſcrites dans l'hyperbole, ainſi PF eſt un diametre de la courbe GCE.

On prouvera que $RM = Rm$, comme on a prouvé que $fT = ft$. Mm eſt parallele à GA, & elle paſſe par le point R, elle eſt donc toute hors de l'hyperbole : car ſi une de ſes parties étoit dedans, il faudroit que l'autre y fût auſſi, afin que tout ce qui ſeroit inſcrit dans la courbe ſe trouvât coupé en deux parties égales. La ligne Mm eſt donc touchante en R de l'hyperbole.

Je prolonge Mm & IH en h. La regle GL paſſant en R, & le marquant, Rm eſt y. Les triangles IMh, NKL ſeront équiangles, comme IDH, NKL l'étoient au point C ; & l'on trouvera, comme n. 3. $hM = \frac{cx}{b}$, $hm = a + c$; $Mm = a + c - \frac{cx}{b}$; $MR = a + c - \frac{cx}{b} - y$, qui étant multipliée par Rm, y, le produit eſt $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$, qui eſt égal à ac : donc $RM \times Rm$ ou $\overline{RM}^2 = ac$; $yy = ac$. C'eſt pourquoi 1° le quarré de RM eſt égal à chaque rectangle $CB \times CD$, $ST \times St$. 2° RM eſt moyenne proportionelle entre AG, GI, ou entre AE, EI ; puiſque de $yy = ac$ il ſuit que $EA, c : MR, y :: MR, y : EI, a$.

V.

FIG. 143. 144. On prolonge, Fig. 144. PF en V, de ſorte que PV ſoit égal à PR ; il faut déterminer le rapport de la ligne PF à l'hyperbole GCE.

La ligne VR eſt coupée en deux également au point P, & on lui a ajoûté Rf: donc 6. 2. Eucl. $\overline{Pf}^2 = Vf \times fR + \overline{PR}^2$. La ligne BD eſt coupée également en f, & inégalement en C: donc $CB \times CD + \overline{Cf}^2 = \overline{fB}^2$; $\overline{Cf}^2 = \overline{fB}^2 - CB \times CD$, & parceque n. 4. on a trouvé $\overline{Rm}^2 = CB \times CD$, ce ſera $\overline{Cf}^2 = \overline{fB}^2 - \overline{Rm}^2$. Fig. 143. 144.

Enſuite dans les triangles équiangles PfB, PRm, nous avons $Pf : fB :: PR : Rm$; donc 22. 6. Eucl. $\overline{Pf}^2 - \overline{PR}^2 : \overline{PR}^2 :: \overline{fB}^2 - \overline{Rm}^2 : \overline{Rm}^2$. Mettons dans cette Analogie à la place de $\overline{Pf}^2$ ſa valeur $Vf \times fR + \overline{PR}^2$, & à la place de $\overline{fB}^2 - \overline{Rm}^2$ ſa valeur $\overline{Cf}^2$; nous ferons $Vf \times fR : \overline{PR}^2 :: \overline{Cf}^2 : \overline{Rm}^2$; $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{PR}^2 : \overline{Rm}^2$. Mais VR étant double de PR, $\overline{VR}^2$ ſera quadruple de $\overline{PR}^2$, & par la même raiſon $\overline{Mm}^2$ eſt auſſi quadruple de $\overline{Rm}^2$. Donc le rapport de $\overline{VR}^2$ à $\overline{Mm}^2$ eſt le même que celui de $\overline{PR}^2$ à $\overline{Rm}^2$; donc $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{VR}^2 : \overline{Mm}^2$.

Maintenant Fig. 143. les triangles NLK, IPA fourniſſent cette Analogie, NL, $c : LK$, $b :: IA$, $a + c : AP$, $\frac{ab+bc}{c}$; & $PB = \frac{ab+bc}{c} - x$. Et puiſque n. 4. $\overline{Rm}^2 = ac$, Rm eſt $\sqrt{ac}$; Mm, $2\sqrt{ac}$.

Dans le triangle PRm, on connoît tous les angles. Poſons la raiſon de mR à RP comme d à e, & celle de mR à mP comme d à h: ce qui donnera les deux proportions ſuivantes $d : e :: mR, \sqrt{ac} : RP$, $\frac{e}{d}\sqrt{ac} = f$. $d : h :: Rm, \sqrt{ac} : mP$, $\frac{h}{d}\sqrt{ac} = g$.

Les triangles équiangles PmR, PBf fourniſſent auſſi cette Analogie $Pm, g : PB, \frac{ab+bc}{c} - x :: mR, \sqrt{ac} : Bf$, $\frac{ab\sqrt{ac}+bc\sqrt{ac}}{cg} - \frac{x}{g}\sqrt{ac}$. Donc $Cf = \frac{ab\sqrt{ac}+bc\sqrt{ac}}{cg} - \frac{x}{g}\sqrt{ac} - y$, que je nomme z. Ces deux triangles donnent encore $Pm, g : PB, \frac{ab+bc}{c} - x :: PR, f : Pf$, $\frac{abf+bcf}{cg} - \frac{f}{g}x$, que je nomme v.

Nous avons donc Fig. 144. $PR, f = PV$; $RV, 2f$; les abſciſſes Pf, v; les appliquées Cf, z. Et ſi nous faiſons $VR, 2f : Mm, 2\sqrt{ac} :: Mm, 2\sqrt{ac} : RH$, $\frac{2ac}{f}$ que je nomme p, nous aurons toutes les quantitez neceſſaires pour former les équations au diametre Vf.

Car 1° étant $Vf = f + v$; $Rf = v - f$; l'Analogie qu'on a trouvée ci-deſſus $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{VR}^2 : \overline{Mm}^2$, s'exprimera ainſi $vv - ff : zz :: 4ff : 4ac$. $\frac{ff}{ac}zz = vv - ff$, qui eſt une des équations de l'hyperbole par rapport à ſon diametre vf.

Comme 2° nous avons $VR : Mm :: Mm : RH$; la raiſon de VR à RH déf. 11. 5. Eucl. eſt doublée de la raiſon de VR à Mm. Or la raiſon de $\overline{VR}^2$ à $\overline{Mm}^2$ eſt auſſi 20. 6. Eucl. doublée de celle de VR à Mm: donc dans la proportion $Vf \times fR : \overline{Cf}^2 :: \overline{VR}^2 : \overline{Mm}^2$, on peut ſubſtituer VR & RH à la place de $\overline{VR}^2$, $\overline{Mm}^2$, pour faire $Vf \times fR, vv - ff : \overline{Cf}^2, zz :: VR, 2f : RH, p$. $\frac{2f}{p}zz = vv - ff$, qui eſt une autre équation de l'hyperbole rapportée à ſon diametre Vf. La ligne VR s'appelle le diametre déterminé.

Fig. 142. 143.

V I.

Si l'on reflechit ſur ce qu'on a dit juſqu'à preſent, on remarquera 1° qu'il y a une infinité de diametres tels que Pf, qui paſſent par le point P, & qui coupent en deux parties égales certaines paralleles inſcrites dans l'hyperbole. 2° Que le point P, où tous ces diametres ſe coupent, eſt le centre. 3° Que parmi ces diametres il y en a un, qui coupe ſes appliquées perpendiculairement, & qu'on appelle aiſſieu, axe. 4° Que tous ces diametres ont des équations ſemblables à celles du diametre PF.

V I I.

Des proprietez déja connuës, ſurtout, de l'axe on peut déduire toutes celles, qui conviennent à une hyperbole & à ſon oppoſée, ce qui fournit pluſieurs manieres de décrire l'hyperbole, ſur tout les proprietez des foyers, ainſi qu'on peut voir dans les Traitez des Sections couiques. Et parceque toutes les proprietez, dont on a parlé ici, ont été tirées de l'équation $yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$, il ſuit que toutes les proprietez d'une courbe peuvent ſe conclurre de ſon équation trouvée par le rapport qu'on découvre entre tous les points de cette courbe, & tous les points d'une ligne droite.

V I I I.

On appelle rectification d'une courbe, par exemple de la circonference d'un cercle, l'operation par laquelle on trouveroit une ligne droite égale à cette circonference; & l'on appelle quadrature d'une courbe, par exemple d'un cercle, l'operation par laquelle on trouveroit un triangle, un quarré, ou quelqu'autre ſurface rectiligne égale à la ſurface du cercle. Le Problême de la quadrature du cercle conſiſte, ou à trouver cette quadrature, ou à démontrer, qu'elle eſt impoſſible. Il ſe reſoudroit parfaitement de l'une ou de l'autre façon. M. DESCARTES ne croit pas la rectification des courbes poſſible, puiſqu'il s'explique ainſi, Part. 2. Sect. 3. Art. 6. *La proportion, qui eſt entre les droites & les courbes, n'étant pas connuë, & même je croi ne le pouvant être par les hommes.* Mais dans la Geometrie des infiniment petits, le calcul integral trouve la rectification de pluſieurs courbes; en particulier de toutes les paraboles, dont l'équation eſt $y^{2m+1} = x^{2m}$, étant m un nombre entier poſitif. Ici M. DESCARTES reconnoît qu'on peut ſavoir quelque choſe touchant la quadrature des courbes.

2. La Geometrie ordinaire démontre, que l'aire d'un cercle eſt égale à celle d'un triangle rectangle, dont un côté eſt le rayon du cercle, & l'autre eſt égal à ſa circonference; mais elle ne trouve pas ce ſecond côté. Et ce peu qu'on ſait de la quadrature du cercle, n'a pas beſoin des équations $yy = 2ax - xx$, $yy = aa - xx$. Le calcul integral ſe ſert de ces équa-

tions, pour former les ſuites infinies, auſquelles la circonference & l'aire du cercle ſont égales.

4° La quadrature du cercle étant ſuppoſée, on connoît l'eſpace compris par une ellipſe, dont on ſait l'équation. Soit Fig. 146. l'ellipſe $AEBF$, dont les deux axes ſont AB, EF, du centre C & de l'intervale CA ou CB je décris le grand cercle AKB; & de l'intervale CE ou CF le petit cercle EGF. Nommons les connuës AB, $2a$; $AC = CB$, a; EF, $2b$; $EC = CF$, b; les inconnuës CD, x; DK, y; DH, z; CL, v; LG, s; LH, r; on aura $BD = a + x$; $AD = a - x$; $FL = b + v$; $EL = b - v$. Soit encore le parametre du grand axe AB de l'ellipſe, p; le parametre du petit axe FE, n. FIG. 146.

Comparons 1° l'ellipſe avec le grand cercle. Par la nature du cercle, nous avons $BD \times DA$, $aa - xx = \overline{DK}^2$, yy; & par la nature de l'ellipſe, $BD \times DA$, $aa - xx : \overline{DH}^2$, $zz :: BA$, $2a : p$. Donc $aa - xx = yy = \frac{2a}{p} zz$; $pyy = 2azz$, & $yy : zz :: 2a : p$. Mais yy eſt à zz en raiſon doublée de y à z, & par la nature de l'ellipſe le grand axe $2a$ de l'ellipſe eſt auſſi à ſon parametre p en raiſon doublée du grand axe $2a$ au petit axe $2b$, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques: donc $2a : 2b :: y : z$, c'eſt-à-dire comme le grand axe $2a$ de l'ellipſe eſt au petit axe $2b$; ainſi chaque appliquée DK, y au cercle eſt à chaque appliquée correſpondante DH, z à l'ellipſe: donc 12. 5. Eucl. comme le grand axe AB eſt au petit EF, ainſi toutes les appliquées y au cercle, c'eſt-à-dire tout le cercle qu'elles rempliſſent, ſont à toutes les appliquées z à l'ellipſe, c'eſt-à-dire, à toute l'ellipſe qu'elles compoſent. C'eſt pourquoi les trois premiers termes de cette proportion étant connus, à ſavoir le grand axe, le petit axe de l'ellipſe, le cercle; le quatriéme terme, qui eſt l'ellipſe ſeroit auſſi connu.

On comparera 2° de la même maniere l'ellipſe avec le petit cercle; & l'on verra que le petit cercle eſt à l'ellipſe, comme le petit axe eſt au grand.

L'ellipſe eſt donc moyenne proportionelle entre le cercle qui a le grand axe de cette ellipſe pour diametre, & le cercle qui a le petit axe de l'ellipſe pour diametre.

5° Archimede a trouvé la quadrature de la parabole: elle ſe peut déduire de ſon équation, $yy = ax$, de laquelle on conclud dans les Traitez des Sections coniques, que Fig. 147. Si PD eſt un diametre, FL une appliquée à ce diametre, PF une tangente de la parabole au point F; le ſegment PA du diametre fait par la tangente eſt égal au ſegment AL fait par l'appliquée. Ce qui étant ſuppoſé, voici comment on démontre la quadrature d'une portion de la parabole. FIG. 147.

Soit $AFBCMA$ une portion de parabole fermée par la droite BC, que AD ſoit le diametre dont DB, DC; FL ſont les appliquées; tirez AB, AC.

Fig. 147. Je dis que le triangle rectiligne BAC eſt à la portion fermée $AFBCMA$ de la parabole, comme 3 à 4. Diviſez la droite BA en deux parties égales au point I, menez HIG parallele à AD, joignez FB, FA. Je dis que le triangle rectiligne BAD eſt quadruple du triangle rectiligne BFA. Menez encore AH, IK paralleles à FL, joignez enfin GK.

Le triangle HIA eſt double du triangle AFI, puiſque leur hauteur étant la même, la baſe HI eſt double de la baſe FI; donc le triangle HIA eſt égal au triangle AFB double de AFI.

Mais le triangle ABD contient quatre triangles égaux au triangle HIA. Donc le triangle ABD eſt quadruple du triangle FBA.

Le même ſe prouve du triangle ADC.

Je dis de plus que, ſi l'on diviſe en deux parties égales les quatre droites BF, FA, AM, MC, & que par ces diviſions on mene des diametres paralleles à AD, & que l'on inſcrive dans chacun des quatre ſegmens BF, FA, AM, MC de la parabole un triangle dont le ſommet ſe termine au ſommet de chacun de ces nouveaux diametres : alors les deux triangles precedens BFA, AMC pris enſemble, ſont quadruples de ces quatre nouveaux pris enſemble.

Que ſi dans les huit ſegmens que laiſſent les quatre nouveaux triangles, on inſcrit de la même façon huit triangles ; on prouvera encore, que les quatre triangles précédens pris enſemble, ſont quadruples des huit triangles pris enſemble. Et ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la difference des triangles inſcrits & des ſegmens laiſſez, ſoit moindre que toute quantité donnée, c'eſt-à-dire ſoit égale à zero.

On aura donc des quantitez en proportion continuë quadruple, ou comme 4 à 1, dont le premier terme ſera le triangle BAC qui ſera 4, & le dernier ſera les triangles que l'on conçoit inſcrits dans les derniers ſegmens moindres que toute quantité donnée, & ces triangles auſſi bien que les ſegmens ſont zero. Appellons la ſomme de tous les termes x. Tous les antecedens ſeront $x - 0$; tous les conſequens ſeront $x - 4$. Donc 12. 5. Eucl. $x - 0 : x - 4 :: 4 : 1$; $x = \frac{16}{3}$, qui eſt la ſomme de tous les termes, ou de tous les triangles, & de la portion $AFBCMA$ de la parabole. Maintenant x, ou $\frac{16}{3}$ qui eſt toute la portion parabolique eſt au triangle BAC, 4 : comme 4 eſt à 3. Donc la parabole $AFBCMA$ eſt au triangle BAC qui lui eſt inſcrit de la maniere qu'on l'a fait ici ; comme 4 à 3. ou 3 : 4 :: le triangle : la parabole, & les trois premiers termes étant connus, le quatriéme ou la parabole ſera connuë, & elle eſt égale à quatre tiers du triangle.

Que ſi l'on acheve le parallelogramme $BCSR$, qui eſt double du triangle BAC, il ſera à la portion parabolique $AFBCMA$ comme 6 à 4. ou comme 3 à 2. Et la portion parabolique eſt égale à deux tiers du parallelogramme.

IX.

IX.

Mr DESCARTES assure, que pour ce qui est de toutes les autres proprietez, qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dépendent que des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. Telle est la belle proprieté des foyers de l'hyperbole, qui consiste en ce que Fig. 145. étant VR l'axe, L, K les foyers, si le rayon GE tombe sur la ligne hyperbolique ERC de telle sorte, que, si on le continuoit, il iroit au foyer L, ce rayon GE se réflechira à l'autre foyer K. Et comme il peut tomber une infinité de rayons sur la ligne hyperbolique ERC, & même sur toute la surface d'un miroir hyperbolique, qui tous seront dirigez vers le foyer L, ils se refléchiront aussi tous au foyer K, & y pourront bruler. Fig. 145.

Cette proprieté vient de ce que les lignes GE, KE font un même angle avec la ligne hyperbolique.

SECTION II.

Methode pour mener les Tangentes des Courbes.

M. DESCARTES.

MAis lorsqu'on peut tirer des lignes droites, qui les coupent à angles droits, aux points, où elles sont rencontrées par celles, avec qui elles font les angles qu'on veut mesurer, ou, ce que je prends ici pour le même, qui coupent leurs contingentes; la grandeur de ces angles n'est pas plus mal aisée à trouver, que s'ils étoient compris entre deux lignes droites. C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les élemens des lignes courbes, lorsque j'aurai generalement donné la façon de tirer des lignes droites, qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire, que c'est ici le Problême le plus utile & le plus general, non seulement que je sçache, mais même, que j'aye jamais desiré de savoir en Geometrie.

On peut considerer les lignes courbes comme des polygones, ou des parties de polygones rectilignes composez d'une infinité de côtez infiniment petits. Les anciens Geometres ne les ont-ils pas ainsi considerez, lorsqu'ils ont dit par Exemple, * qu'on peut inscrire dans un cercle, ou décrire autour d'un cercle des Polygones de tant de côtez, que la difference du cercle à ces polygones fût moindre qu'une quantité donnée quelconque? * *Eucl. Elem. l. 12. Prop. 2.*

FIG. 145. Et puiſqu'ils avançoient, qu'alors *Polygona in circulum deſinunt*, ne penſoient-ils pas qu'il n'y avoit aucune difference entre la circonference du cercle & les derniers polygones tant inſcrits que circonſcrits ; de ſorte que le cercle fût un polygone d'une infinité de côtez infiniment petits ? De même les côtez des derniers triangles, que l'on conçoit inſcrits dans les derniers ſegmens de la portion parabolique, dont on cherche la quadrature, ne ſont en rien differens de la ligne parabolique elle-même, elle peut donc auſſi être conſiderée comme un polygone compoſé de ces petits côtez, de ces lignes droites infiniment petites. La Geometrie des infiniments petits conſidere toûjours toutes les courbes comme des polygones, ou des parties de polygones compoſez d'une infinité de lignes droites infiniment petites.

FIG. 149. Dans cette ſuppoſition Fig. 149. le côté infiniment petit *ab* (il eſt ici repreſenté aſſez grand, pour rendre la choſe ſenſible) eſt un point de la courbe *AdB*, ou un côté infiniment petit du polygone *AdB*, qui ne differe en rien de la courbe *AdB* ; & ce point, ou côté infiniment petit, prolongé de part & d'autre en *e* & en *g* eſt la tangente *edg* de la courbe au point *d*, ou *adb* ; de ſorte que la courbe *AdB* & la tangente *edg* n'ont que le point où la ligne droite *adb* infiniment petite de commun. On voit qu'à chaque point de la courbe on peut mener une tangente de cette courbe, puiſque chaque ligne droite infiniment petite, qui fait partie de la courbe, peut être prolongée de part & d'autre. De là il ſuit, que ſi la ligne droite *Cd* fait un angle droit *Cde* avec la ligne infiniment petite *adb*, ou avec la tangente *edg*, on pourra dire, qu'elle fait auſſi un angle droit avec la courbe *AdB* au point *d* ; & que ſi la ligne *Fd* fait un angle oblique *Fde* de 40. degrez avec le côté infiniment petit *adb*, ou avec la tangente *edg*, on pourra dire, qu'elle fait auſſi un angle oblique de 40. degrez avec la courbe *AdB*. M. DESCARTES a donc raiſon de dire, qu'il n'eſt pas plus mal aiſé de meſurer l'angle oblique *Fdb*, que la droite *Fd* fait avec la courbe *AdB* ; que de meſurer l'angle *Fde*, que la même droite *Fd* fait avec *edg* tangente de la courbe au point *d* : puiſque ces deux angles ſont le même.

M. DESCARTES 1° commence à donner la Methode pour mener les tangentes des courbes, par chercher une nouvelle valeur des deux inconnuës, qui ſe trouvent dans l'équation de la courbe, à laquelle on veut mener une tangente, ce qui ſert à faire diſparoître une des deux inconnuës. 2° Il explique le fondement de ſa Methode. 3° Il acheve de donner cette Methode, en apprenant la maniere de reſoudre une équation, dans laquelle les inconnuës ont deux valeurs égales. 4° Nous apporterons des Exemples, où le point donné n'eſt pas ſur l'axe de la courbe donnée. 5° Il aſſure, que cette Methode peut ſervir à d'autres Problêmes qu'à celui des tangentes. 6° Il parle de la conſtruction des tangentes. Nous ajoûterons 7° d'autres manieres de mener les tangentes des courbes.

ARTICLE I.

Commencement de la Methode pour mener les tangentes des courbes.

M. DESCARTES.

SOit Fig. 150. 151. 152. CE la ligne courbe, & qu'il faille tirer une ligne droite par le point C, qui faſſe avec elle des angles droits. Je ſuppoſe la choſe déja faite, & que la ligne cherchée eſt CP, laquelle je prolonge juſques au point P, où elle rencontre la ligne droite GA, que je ſuppoſe être celle, aux points de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne CE: en ſorte que faiſant Fig. 151. MA ou $CB = y$, & CM ou $BA = x$, j'ai quelque équation, qui explique le rapport, qui eſt entre x & y. Puis je fais $CP = s$, & $PA = v$, ou $PM = v - y$, & à cauſe du triangle rectangle PMC j'ai ss, qui eſt le quarré de la baſe égal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui ſont les quarrez des deux côtez; c'eſt-à-dire, j'ai $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, ou bien $y = v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cette équation, j'ôte de l'autre équation, qui m'explique le rapport qu'ont tous les points de la courbe CE à ceux de la droite GA, l'une des deux indéterminées x ou y. Ce qui eſt aiſé à faire, en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, & le quarré de cette ſomme au lieu de xx, & ſon cube au lieu de x^3, & ainſi des autres, ſi c'eſt x que je veüille ôter; ou bien ſi c'eſt y, mettant en ſon lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cette ſomme au lieu de yy, ou y^3, &c. De façon qu'il reſte toûjours après cela une équation, en laquelle il n'y a plus qu'une ſeule quantité indéterminée x, ou y.

Fig. 150. 151. 152. *Façon générale pour trouver des lignes droites, qui coupent les courbes données ou leurs contingentes à angles droits.*

● Puiſqu'on a l'équation $ss = xx + vv - 2vy + yy$, on fait $xx = ss - vv + 2vy - yy$, & extrayant la racine quarrée de chaque membre, on a $x = \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Ou bien on fait $yy - 2vy + vv = ss - xx$, dont les racines ſont $y - v = \sqrt{ss - xx}$, $y = v + \sqrt{ss - xx}$.

2. On ſuppoſe que la droite GA eſt celle, aux points de laquelle on rapporte les points de la courbe CE: mais il faut que ce rapport ſe faſſe par CM perpendiculaire ſur GA, puiſque l'angle CMP doit être droit, afin qu'on ait $\overline{CP}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $ss = xx + vv - 2vy + yy$, ainſi qu'on

vient de le voir dans le Texte de M. DESCARTES. Or il arrive ſouvent qu'une appliquée à une courbe fait un angle oblique avec un de ſes diametres, comme Fig. 143. l'appliquée Cf fait un angle oblique avec le diametre PF; & même CB fait auſſi un angle oblique avec la droite AB, à laquelle on a rapporté la courbe CE. Dans ce cas la Methode, qui eſt ici expliquée, n'a pas lieu.

3. M. DESCARTES dit d'abord, qu'il ſuppoſe la choſe faite, c'eſt-à-dire, entr'autres choſes que CP coupe à angles droits la courbe CE, ou ſa touchante au point C. Il ſemble cependant, que ſoit que CP coupe à angles droits, ſoit qu'elle coupe à angles obliques la courbe CE; le triangle CPM peut être rectangle en M, & donner toûjours $ff = xx + vv - 2vy + yy$, & par conſequent les mêmes valeurs de x & de y: ce qui eſt vrai. Mais M. DESCARTES appliquera Art. 2. 3. ces valeurs de x & de y aux ſeules tangentes, & il fera connoître les conditions, avec leſquelles la droite CP eſt toûjours celle, qui coupe la courbe CE à angles droits.

4. Après que la nouvelle valeur de x ou de y eſt trouvée, on la ſubſtituë à la place de celle des deux, qu'on veut faire évanoüir dans l'équation de la courbe, c'eſt-à-dire dans celle qui exprime le rapport de chaque point de la courbe CE à chaque point de la droite GA, & l'on ſubſtituë, s'il le faut, le quarré de la valeur de x ou de y à la place de xx ou de yy; &c. De telle ſorte, dit M. Deſcartes, qu'il reſte toûjours une équation, dans laquelle il n'y a plus qu'une ſeule indéterminée x, ou y.

Cela veut dire, que des deux indéterminées x, y, il n'en reſtera qu'une: car dans ces équations: comme on va le voir, les indeterminées v, f reſtent toûjours. Pour la maniere de ſubſtituer la valeur de x ou de y à leur place, les Exemples ſuivans la feront connoître.

II. M. DESCARTES.

FIG. 151. Comme ſi Fig. 151. CE eſt une ellipſe, & que MA ſoit le ſegment de ſon diametre, auquel CM ſoit appliquée par ordre, & qui ait r pour ſon côté droit, & q pour le traverſant, on a par le 13. Th. du Liv. 1. d'Apollonius, $xx = ry - \frac{r}{q}yy$, d'où ôtant xx, il reſte $ff - vv + 2vy - yy = ry - \frac{r}{q}yy$, ou bien $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qff}{q-r}$ égal à rien. Car il eſt mieux en cet endroit de conſiderer ainſi enſemble toute la ſomme, que d'en faire une partie égale à l'autre.

Soit ACG une ellipſe, dont le côté droit ou parametre ſoit r; le côté traverſant ou diametre AG, q; l'abſciſſe AM, y; l'appliquée CM, x;

GM ſera $q - y$. Maintenant par la nature de l'ellipſe, comme le diametre GA, q eſt à ſon parametre r : de même le rectangle des ſegmens $GM \times MA$ du diametre, lequel rectangle eſt $qy - yy$, eſt au quarré xx de l'appliquée CM. Donc $xx = ry - \frac{r}{q}yy$. Pour xx mettons ſa valeur, l'équation devient $qff - qvv + 2qvy - qyy = qry - ryy$. Et parceque GA, q eſt plus grand que le parametre r, rangeons tous ces termes d'un même côté, de ſorte que qyy ait le ſigne +, diviſons tout par $q - r$, le quotient eſt $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qff}{q-r} = o$.

M. Deſcartes donne pluſieurs Regles dans cette Geometrie, qui demandent, qu'on égale tous les termes d'une équation à zero. La raiſon pour laquelle il le fait ici, c'eſt qu'en comparant Art. 3. chaque terme de l'équation $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qff}{q-r} = o$ avec chaque terme de l'équation $yy - 2ey + ee = o$, qui a deux racines égales, on découvre la valeur cherchée de AP, v.

III. M. DESCARTES.

Tout de même ſi CE Fig. 152. eſt la ligne courbe décrite par le mouvement d'une parabole en la façon ci-deſſus expliquée, & qu'on ait poſé b pour GA, c pour KL, & d pour le côté droit du diametre KL en la parabole : l'équation qui explique le rapport, qui eſt entre x & y eſt $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = o$, d'où ôtant x, on a $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ff - vv + 2vy - yy}$, & remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

Fig. 152.

$$y^6 - 2by^5 \left\{\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left\{\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left\{\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddff \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd = o.$$

& ainſi des autres.

La courbe CE Fig. 152. eſt la même que CE de Figure 57. dont nous avons parlé Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 2. n. 6. qui eſt décrite par l'interſection de la Regle GL & de la parabole droite KC. Nous en avons encore parlé Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Ex. 1.

L'équation $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = o$ ſe trouve de cette maniere.

Nommons GA, b; KL, c; le parametre de la parabole KC, d; AB, $x = CM$, CB, $y = AM$; $GM = b - y$. Les triangles ſemblables GMC,

CBL donnent cette Analogie, $GM, b-y :: CM, x :: CB, y : BL, \frac{xy}{b-y}$, qui étant ajoûté à KL, c, fait $KB = \frac{cb-cy+xy}{b-y}$. Or par la nature de la parabole $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = o$. La difference de cette équation & de celles qu'on a trouvées dans les deux endroits qu'on a citez, n'eſt que dans les differentes lettres, avec leſquelles les valeurs des quantitez données, ont été exprimées.

Dans cette équation pour x mettez ſa valeur, elle ſe changera en celle-ci $y^3 - byy - cdy + bcd = -dy\sqrt{ff - vv + 2vy - yy}$.

Quarrez chaque membre, & mettez tous les termes du même côté pour avoir

$$\begin{array}{llll} & -2cdy^4 + 4bcdy^3 & -2bbcdyy & \\ y^6 - 2by^5 + bby^4 & & +ccddyy & -2bccddy + bbccdd = o. \\ & +ddy^4 \quad -2ddvy^3 & -ddffyy & \\ & & +ddvvyy & \end{array}$$

IV. M. DESCARTES.

Même encore que les points de la ligne courbe ne ſe rapportaſſent pas en la façon que j'ai dit, à ceux d'une ligne droite; mais en toute autre façon qu'on ſçauroit imaginer, on ne laiſſe pas de pouvoir toûjours avoir une telle équation. Comme ſi Figure 150. CE eſt une ligne qui ait tel rapport aux trois points F, G, & A, que les lignes droites tirées de chacun de ces points comme C, juſques au point F, ſurpaſſent la ligne FA d'une quantité, qui ait certaine proportion donnée à une autre quantité, dont GA ſurpaſſe les lignes tirées des mêmes points juſques à G. Faiſons $GA = b$, $AF = c$, & prenant à diſcretion le point C dans la courbe, que la quantité dont CF ſurpaſſe FA, ſoit à celle dont GA ſurpaſſe GC, comme d à e, en ſorte que ſi cette quantité qui eſt indéterminée ſe nomme z, FC eſt $c + z$, & GC eſt $b - \frac{e}{d}z$. Puis poſant $MA = y$, GM eſt $b - y$, & FM eſt $c + y$; & à cauſe du triangle rectangle CMG, ôtant le quarré de GM du quarré de GC, on a le quarré de CM, qui eſt $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Puis ôtant le quarré de FM du quarré de FC, on a encore le quarré de CM en d'autres termes, à ſavoir $zz + 2cz - 2cy - yy$. Et ces termes étant égaux aux precedens, ils font connoître y ou MA, qui eſt $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$, & ſubſtituant cette ſomme au lieu de y

Fig. 150.

dans le quarré de CM, on trouve qu'il s'exprime en ces termes $\frac{bddzz+ceezz+2bcddz-2bcdez}{bdd+cdd}-yy$. Puis ſuppoſant que la ligne droite PC rencontre la courbe à angles droits au point C, & faiſant $PC=s$, & $PA=v$ comme devant, PM eſt $v-y$; & à cauſe du triangle rectangle PCM, on a $ss-vv+2vy-yy$ pour le quarré de CM, ou derechef ayant au lieu de y ſubſtitué la ſomme qui lui eſt égale, il vient $zz+\frac{2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-cddss+cddvv+eevv-deev-ddvv}{bdd+cee}=0$ pour l'équation que nous cherchions. FIG. 149.

On a $FA=c$, & l'excez dont CF ſurpaſſe FA eſt z; ainſi CF eſt $z+c$.

De plus comme d eſt à e; de même z excez de CF ſur FA eſt à $\frac{ez}{d}$ excez de GA ſur GC; ainſi GA étant b, CG eſt $GA-\frac{ez}{d}=b-\frac{ez}{d}$. Puiſque MA eſt y, GM eſt $b-y$, & FM eſt $c+y$.

Maintenant dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CM}^2=\overline{CG}^2-\overline{GM}^2=\frac{ee}{dd}zz-\frac{2be}{d}z+2by-yy$. Et dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CM}^2=\overline{CF}^2-\overline{FM}^2=zz+2cz-2cy-yy$. Donc $\overline{CM}^2=\frac{ee}{dd}zz-\frac{2be}{d}z+2by=zz+2cz-2cy$; ordonnons les termes pour avoir $2by+2cy=\frac{ddzz+2cddz-eezz+2bdez}{dd}$, $y=\frac{ddzz+2cddz-eezz+2bdez}{2bdd+2cdd}$.

Après cela on ſubſtituë cette valeur de y à ſa place dans celui que l'on veut des quarrez de CM, comme dans le premier $\frac{ee}{dd}zz-\frac{2bez}{d}+2by-yy$, ce qui produira $\frac{ee}{dd}zz-\frac{2be}{d}z+\frac{2bddzz+4bcddz-2bceezz+4bbdez}{2bdd+2cdd}-yy$. On reduit les fractions à même denomination, & il vient $\overline{CM}^2=\frac{bddzz+ceezz+2bcddz-2bcdez}{bdd+cdd}-yy$. On ne reduit pas $-yy$ à la même denomination que les autres termes ont, parceque cette valeur de $\overline{CM}^2$ ſera bientôt comparée avec une autre valeur de $\overline{CM}^2$ où il y aura auſſi $-yy$, & ces deux termes s'effaceront.

Car dans le triangle rectangle PMC on a $\overline{CM}^2=\overline{CP}^2-\overline{PM}^2=ss-vv+2vy-yy$, comme on l'a trouvée dès le commencement de cette Section, où l'on a nommé PC, s; PA, v; AM, y; MP, $v-y$; de ſorte que l'on peut comparer ces deux valeurs de $\overline{CM}^2$, $ss-vv+2vy-yy=\frac{bddzz+ceezz+2bcddz+2bcdez}{bdd+cdd}-y^2$. Mettez pour y ſa valeur $\frac{ddzz+2cddz-eezz+2bdez}{2bdd+2cdd}$, dans $ss-vv+2vy-yy$; vous trouverez $ss-vv\frac{+ddvzz+2cddvz-eevzz+2bdevz}{bdd+cdd}-yy=\frac{bddss-bddvv+cddss-cddvv+ddzzz+2cddvz-eevzz+2bdevz}{bdd+dd}-yy=\overline{CM}^2$.

Vous pouvez à preſent comparer encore les deux valeurs de $\overline{CM}^2$, reduites à même denomination, en ſupprimant les denominateurs com-

muns. Enſuite rangez tous les termes d'un ſeul côté. Enfin diviſez par $bdd + cee + eev - ddv$, & vous aurez l'équation de M. Deſcartes $zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddff + bddvv - cddff + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} = 0$.

V. M. DESCARTES,

Or après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en ſervir pour connoître les quantitez x, ou y, ou z, qui ſont déja données, puiſque le point C eſt donné, on la doit employer à trouver v ou f, qui déterminent le point P, qui eſt demandé.

Dans les trois Figures 150. 151. 152. la ligne AG eſt donnée de poſi-
FIG. 150. 151. 152. tion, le point C eſt auſſi donné, puiſqu'il eſt pris à volonté : c'eſt pourquoi la perpendiculaire $CM = x$ abbaiſſée du point C ſur la droite AG eſt connuë & par conſequent donnée. La perpendiculaire CM détermine le point M, d'ailleurs le point A eſt donné ; ainſi la droite $AM = y$ eſt encore donnée. De même Fig. 150. le point F eſt auſſi bien donné que les points C, A ; on connoît donc les droites CF, FA, & l'excez z, dont CF ſurpaſſe FA. Il eſt donc vrai que les trois quantitez x, y, z ſont connuës, dès que le point C a été choiſi.

On ſe ſervira donc des dernieres équations, qui conviennent aux Figures, 150. 151. 152. ou pour trouver $AP = v$, ce qui donne d'abord le point cherché P ; ou pour trouver $CP = s$, laquelle étant connuë, on n'a qu'à ouvrir ſon compas de la longueur de s, mettre un de ſes piez ſur le point C, & couper avec l'autre la droite AG en P, ce qui déterminera encore le point cherché P. Mais comment ſe ſert-on de ces dernieres équations, pour trouver le point P, qu'elles doivent faire connoître ? c'eſt ce qui s'expliquera, Art. 3.

ARTICLE II.

Fondement de la Methode pour mener les tangentes des courbes.

M. DESCARTES.

ET à cet effet il faut conſiderer, que ſi le point P eſt tel qu'on le
FIG. 153. deſire, le cercle Figure 153. dont il ſera le centre, & qui paſſera par le point C, y touchera la ligne courbe CE ſans la couper : mais que ſi ce point P eſt tant ſoit peu plus proche ou plus éloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe non ſeulement au point C, mais auſſi neceſſairement en quelqu'autre.

Puis

Puis il faut auſſi conſiderer, que lorſque ce cercle coupe la courbe *CE*, l'équation par laquelle on cherche la quantité *x* ou *y*, ou quelqu'autre ſemblable, en ſuppoſant *PA* & *PC* être connuës, contient neceſſairement deux racines, qui ſont inégales. Car par exemple ſi ce cercle coupe la courbe aux points *C* & *E*, ayant tiré *EQ* parallele à *CM*, les noms des quantitez indéterminées *x* & *y* conviendront auſſi bien aux lignes *EQ* & *QA*, qu'à *CM* & *MA*, puis *PE* eſt égale à *PC* à cauſe du cercle, ſi bien que cherchant les lignes *EQ* & *QA* par *PE* & *PA* qu'on ſuppoſe comme données, on aura la même équation, que ſi on cherchoit *CM* & *MA* par *PC*, *PA*. D'où il ſuit évidemment que la valeur de *x* ou de *y*, ou de telle autre quantité qu'on aura ſuppoſée, ſera double en cette équation, c'eſt-à-dire qu'il y aura deux racines inégales entr'elles; & dont l'une ſera *CM*, l'autre *EQ*, ſi c'eſt *x* qu'on cherche; ou bien l'une ſera *MA*, & l'autre *QA*, ſi c'eſt *y*; & ainſi des autres. Il eſt vrai que ſi le point *E* ne ſe trouve pas du même côté de la courbe que le point *C*, il n'y aura que l'une de ces deux racines qui ſoit vraïe, & l'autre ſera renverſée, ou moindre que rien. Mais plus ces deux points *C*, & *E* ſont proches l'un de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines; & enfin elles ſont entierement égales, s'ils ſont tous deux joints en un, c'eſt-à-dire ſi le cercle qui paſſe par *C*, y touche la courbe *CE* ſans la couper. Fig. 153.

1. Toute ligne courbe, qui n'eſt pas un cercle, peut être coupée par quelque cercle au moins en quatre points differens. Soit donnée la courbe *CAaa*, Fig. 153. dont *AP* eſt l'axe. Du point *M*, de l'intervale *Mc* décrivez le cercle *acaii*, il coupe la courbe *CAaa* aux deux points *a*, *a* d'un côté, & aux deux point *i*, *i* de l'autre. Du même point *M* & de l'intervale *Md* décrivez un autre cercle, il touche la même courbe au point *d*, & la toucheroit encore de l'autre côté entre *C* & *E*, ſi on avoit achevé de décrire toute ſa circonference. Et ſi du même centre *M* on décrivoit un cercle, dont le rayon fût moindre que *Md*, ni il ne toucheroit, ni il ne couperoit la courbe *CAaa*. On peut auſſi prendre pluſieurs autres centres hors de l'axe *AP*, au dedans de la courbe & décrire des cercles dont les uns toucheront la courbe en un ſeul point, ſans la toucher ou couper ailleurs; les autres la toucheront en un point, & la couperont en

Fig. 153. en deux ; les autres la couperont en deux ou trois points ſans la toucher ; d'autres enfin qui ne la toucheront & ne la couperont du tout point. Il y a même des courbes, qui peuvent être coupées ou touchées par un cercle en un plus grand nombre de points ; comme on le verra, Liv. 3. Part. 5. Sect. 2. Exemple 6.

2. Lorſque pluſieurs cercles *a c a*, *b e b* ſont décrits d'un même centre *M*, plus les rayons ſont courts, plus les points d'interſection ſont près l'un de l'autre, lorſqu'ils ſont pris du même côté *A c a* ; plus les rayons, qui vont du centre aux points d'interſection ſont auſſi près l'un de l'autre.

En effet les points *b*, *b* ſont plus près l'un de l'autre, que les points *a*, *a* ; & les rayons *M b*, *M b* plus près que les rayons *M a*, *M a*. Et lorſque le cercle touche la courbe en *d*, les deux points d'interſection n'en font qu'un *d*, & les deux rayons n'en font qu'un *M d* : c'eſt-à-dire que le point *d* du contact peut être conſideré comme deux points d'interſection, qui concourent en un même endroit, & le rayon *M d* comme deux rayons, qui ſont l'un ſur l'autre.

3. Dans l'endroit, où un cercle touche une courbe, la tangente de la courbe eſt la même que celle du cercle : mais dans l'endroit, où le cercle coupe une courbe, la tangente de la courbe eſt differente de la tangente Fig. 154. du cercle, & ces deux tangentes ſe coupent. Soit Fig. 154. la parabole *d A r*, & du point *C* comme centre décrivons le cercle *d i p*, qui touche la parabole en *d*, & la coupe en *h* & *r*. Conſiderons encore ici les courbes, comme des polygones d'une infinité de côtez infiniment petits *a b*, *A l*, *y z*, &c. *a b*, *i g*, *p q*, &c. Au point *d*, ou à la ligne droite infiniment petite *a d b*, le cercle touche la parabole, & le point *a d b* eſt commun au cercle & à la parabole, donc la tangente *f d e*, qui n'eſt autre choſe, que le point *a d b* prolongé de part & d'autre, eſt commune aux deux courbes.

Au point *h*, ou aux lignes infiniment petites *g h i*, *l h k*, le cercle coupe la parabole, parceque la ligne *g h i* du cercle coupe la ligne *l h k* de la parabole, donc la tangente *n m* du cercle, qui n'eſt autre choſe, que le petit côté *g i* prolongé en *m* & *n*, coupe la tangente *o c* de la parabole. qui n'eſt autre choſe que le petit côté *k l* prolongé. On dira la même choſe au point *r*, où les tangentes *s t*, *u x* ſe coupent encore.

Ce que l'on vient d'expliquer touchant un cercle & une autre ſorte de courbes, ſe doit entendre de deux cercles & de deux courbes quelconques, qui ſe touchent ou ſe coupent.

4. La ligne *C d* tirée du centre *C* au point *d* du contact, eſt perpendiculaire à la touchante *e d f* du cercle : elle ſera donc auſſi perpendiculaire à la touchante de la courbe, que le cercle touche en *a d b* ; puiſque la touchante de cette courbe eſt alors la même que la touchante *e d f* du cercle. C'eſt pour cela que M. Deſcartes avance, que ſi le point *P* des Figures 150. 151. 152. eſt tel qu'on le deſire, c'eſt-à-dire ſi la ligne *P C*

eſt perpendiculaire à la touchante des courbes *ACG* au point *C*; le cercle, dont le point *P* ſera le centre, & qui paſſera par *C*, y touchera la ligne courbe *CE*, ſans la couper. Fig. 153.

Toute la Methode, dont on parle ici, pour tirer les tangentes des courbes, conſiſte donc, le point *C* étant donné, à trouver ſur la droite auſſi donnée *AG* le point *P*, qui ſoit le centre d'un cercle, qui touche la courbe, dont on cherche la tangente, au point *C*. Car alors la droite, qu'on tirera par le point *C* perpendiculaire à *PC*, ſera tangente du cercle, & par conſequent de l'autre courbe.

Maintenant il nous faut examiner, qu'eſt-ce qu'il arrive de particulier, lorſque le cercle décrit du point *P*, de l'intervale *PC*, touche la courbe *CE* en *C*. Le voici.

5. En premier lieu Fig. 153. que le cercle *EC* décrit du centre *P* coupe la courbe *AE* aux deux points *C*, *E*; abbaiſſez *CM*, *EQ* perpendiculaires ſur *AP*; ſoit *AP*, a; les rayons *PC*, *PE*, b; les coupées *AQ*, *AM*, y; les ordonnées *EQ*, *CM*, x; on aura $PM = a - y$; $PQ = a - y$. Maintenant dans le triangle *PCM*, vous aurez $\overline{PC}^2$, $bb = xx + aa - 2ay + yy$; & dans le triangle *PEQ* vous aurez $\overline{PE}^2$, $bb = xx + aa - 2ay + yy$.

Ces deux équations étant les mêmes, on en tirera les mêmes valeurs de $x = \sqrt{bb - aa + 2ay - yy}$, & de $y = a - \sqrt{bb - xx}$. De telle ſorte pourtant que les deux valeurs de x exprimées par $\sqrt{bb - aa + 2ay - yy}$ ſont inégales entr'elles, parceque y, qui les compoſe, eſt plus grande au point *M*, qu'au point *Q*. De même les deux valeurs de y exprimées par $a - \sqrt{bb - xx}$ ſont inégales entr'elles, parceque x qui en eſt partie, eſt plus grande au point *M* qu'au point *Q*.

On voit en ſecond lieu, que comme plus les points *C*, *E* s'approchent, moins les ordonnées *CM*, *EQ*, ou les abſciſſes *AM*, *AQ* ſont differentes en grandeur; lorſqu'enfin les points *C*, *E* ſe rencontreront, & n'en feront plus qu'un; alors *EQ* ſera ſur *CM* & lui ſera égale, *AQ* s'ajuſtera ſur *AM* & lui ſera égale; & les deux valeurs tant des appliquées que des abſciſſes ſeront égales. Mais les points *C*, *E* ſe trouvent l'un ſur l'autre, comme on l'a vû, lorſque le cercle décrit du point *P* & paſſant par le point *C* touche la courbe dont on cherche la tangente: donc lorſque le cercle décrit du point *P* par le point *C* touche la courbe, je peux conſiderer l'appliquée & l'abſciſſe de la courbe qui répondent au point *C*, comme deux appliquées égales, & comme deux abſciſſes auſſi égales.

6. De là il ſuit, que dès que je ſuppoſerai Figures 150. 151. 152. que *CM*, x, ou *AM*, y ont deux valeurs égales chacune, ou que l'équation, qui exprime le rapport du point *C* à la ligne droite *AG*, contient deux racines égales de *CM*, ou de *AM*: par là je détermine *CP* à être le rayon du cercle, qui a pour centre le point *P*, & qui touche en *C* la courbe *AE*: Fig. 150. 151. 152.

ou, ce qui eſt le même, je détermine la ligne PC à être celle qui coupe à angles droits la courbe AE en C, & la tangente du cercle & de la courbe au point C qui leur eſt commun. De ſorte que dès que CP ſera connuë & tirée au point C, la perpendiculaire qu'on tirera par le point C ſur CP, ſera la touchante cherchée de la courbe AE.

7. Nous allons voir Art. 3. comment on opere, après qu'on a ſuppoſé, que l'équation, qui exprime le rapport du point C à la ligne droite AG contient deux racines égales entr'elles. Mais il faut remarquer ici que par ces deux racines on n'entend pas les deux racines qui ſe trouvent en toute équation qui contient le quarré de l'inconnuë, à qui ces deux racines conviennent, comme lorſque de l'équation $bb = xx + aa - 2ay + yy$, ou $yy - 2ay + aa = bb - xx$, j'extrais les deux racines $y = a \pm \sqrt{bb - xx}$. Car ces deux racines ſont indépendantes de la ſuppoſition, que les deux ordonnées CM, EQ, Fig. 153. ſe reüniſſent en une ſeule, elles ſont toûjours inégales, & ſouvent l'une poſitive, l'autre negative. Au lieu que les deux racines dont on parle ici ſont toûjours égales entr'elles, toûjours du même côté d'un diametre, & par conſequent toûjours ou toutes deux poſitives, ou toutes deux negatives en même tems.

La racine, que M. DESCARTES appelle renverſée, ou moindre que rien, c'eſt celle qu'on appelle ordinairement negative ou fauſſe, dans laquelle ou toutes les quantitez qui la compoſent, ont le ſigne —, ou celles qui ont le ſigne — ſont plus grandes que celles, qui ont le ſigne +.

ARTICLE III.

Suite de la Methode pour mener les tangentes des courbes.

I. M. DESCARTES.

DE plus il faut conſiderer, que lorſqu'il y a deux racines égales en une équation, elle a neceſſairement la même forme, que ſi on multiplie par ſoi-même la quantité qu'on y ſuppoſe être inconnuë, moins la quantité connuë qui lui eſt égale, & qu'après cela ſi cette derniere ſomme n'a pas tant de dimenſions que la precedente, on la multiplie par une autre ſomme qui en ait autant qu'il lui en manque, afin qu'il puiſſe avoir ſeparément équation entre chacun des termes de l'une, & chacun des termes de l'autre.

Comme par exemple je dis que la premiere équation trouvée ci-deſſus, * à ſavoir $yy \frac{+quy - 2qy + qvv - qff}{q - r}$ doit avoir la même forme que celle qui ſe produit en faiſant $e = y$ & multipliant $y - e$

* *Art. 1. num. 2. Fig. 154.*

par ſoi-même, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en ſorte qu'on peut comparer ſeparément chacun de leurs termes, & dire que puiſque le premier, qui eſt yy eſt tout le même en l'une qu'en l'autre, le ſecond qui eſt en l'une $\frac{qry - 2qvy}{q-r}$ eſt égal au ſecond de l'autre qui eſt $-2ey$; d'où cherchant la quantité v, qui eſt la ligne PA, on a $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, ou bien à cauſe que nous avons ſuppoſé e égal à y, on a $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et ainſi on pourroit trouver s par le troiſiéme terme $ee = \frac{qvv - qss}{q-r}$: mais pourceque la quantité v détermine aſſez le point P, qui eſt le ſeul que nous cherchions, on n'a pas beſoin de paſſer outre. FIG. 151.

Je poſe $y = e$, ou $y - e = o$; dans cette équation y eſt regardée comme inconnuë, parceque pouvant repreſenter toutes les droites ou coupées AM priſes depuis le ſommet A, elle eſt indeterminée: mais dans chaque operation dès que le point C eſt pris à volonté, $AM = y$ eſt déterminée & connuë. Enſuite je fais le quarré de $y - e = o$, qui eſt $yy - 2ey + ee = o$, & qui contient certainement deux racines égales. D'un autre côté l'on ſuppoſe que l'équation $yy + \frac{qry - 2qvy}{q-r} + \frac{qvv - qss}{q-r}$ contient auſſi deux racines égales: donc les deux équations etant égales entr'elles; puiſqu'elles ſont égales chacune à zero; & les premiers termes yy, yy des deux équations étant encore égaux, les ſeconds termes $\frac{+qry - 2qvy}{q-r}$, $-2ey$, dans leſquels la quantité y eſt multipliée, ſeront auſſi égaux; d'autant plus que l'indeterminée v peut repreſenter une grandeur telle qu'il eſt neceſſaire, afin que ces deux ſeconds termes ſoient exactement égaux. Il en eſt de même des deux troiſiémes termes $+ ee$, $\frac{+qvv - qss}{q-r}$, dans leſquels y ne ſe trouve pas; à cauſe que les deux indeterminées v, s peuvent avoir la valeur neceſſaire, afin que ces deux termes ſoient auſſi égaux.

Je puis donc égaler les ſeconds termes, & avoir $-2ey = \frac{+qry - 2qvy}{q-r}$; je multiplie tout par $q - r$, & je fais $-2qey + 2ery = qry - 2qvy$; je diviſe tout par y, il reſte $-2qe + 2er = qr - 2qv$; $2qv = 2qe - 2er + qr$; je diviſe tout par $2q$, le quotient eſt $v = e - \frac{er}{q} + \frac{1}{2}r$. Je ſubſtituë y pour e qui lui eſt égale, il vient $v = y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$.

Comme CM, y eſt donnée dès qu'on a determiné le point C, on ſait la valeur de $v = AP$: ainſi on trouve le point P, & l'on joint CP. Et la ligne CP ayant été trouvée par des équations dans leſquelles on ſuppoſoit que CM, y avoit deux racines égales, elle a les conditions requiſes pour être le rayon d'un cercle, dont le centre eſt P, & qui touche la courbe AE en C; d'où il ſuit que la ligne droite, qu'on menera par le point C perpendiculaire ſur PC eſt la touchante cherchée de la courbe AE au point donné C.

II. M. DESCARTES.

* *Art.* 1. n. 2. FIG. 152. Tout de même la ſeconde équation trouvée * ci-deſſus, à ſavoir

$$y^6 - 2by^5 \left\{\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left\{\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left\{\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd$$

(Je l'appelle *A*) doit avoir la même forme, que la ſomme qui ſe produit lorſqu'on multiplie $yy - 2ey + ee$ par $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y +$

k^4, qui eſt $y^6 \left\{\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left\{\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left\{\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left\{\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy$

$\left\{\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4$. (Je l'appelle *B*) de façon que de ces deux équations j'en tire ſix autres, qui ſervent à connoître les ſix quantitez f, g, h, k, v, & s. D'où il eſt fort aiſé à entendre, que de quelque genre, que puiſſe être la ligne courbe propoſée, il vient toûjours par cette façon de proceder, autant d'équations, qu'on eſt obligé de ſuppoſer de quantitez, qui ſont inconnuës. Mais pour démêler par ordre ces équations, & trouver enfin la quantité v qui eſt la ſeule dont on a beſoin, & à l'occaſion de laquelle on cherche les autres: il faut premierement par le ſecond terme chercher f, la premiere des quantitez inconnuës de la derniere ſomme, & on trouve $f = 2e - 2b$.

Puis par le dernier il faut chercher k la derniere des quantitez inconnuës de la même ſomme, & on trouve $k^4 = \frac{bbccdd}{ee}$.

Puis par le troiſiéme terme il faut chercher g la ſeconde quantité, & on a $gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Puis par le penultiéme il faut chercher h la penultiéme quantité, qui eſt $h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Et ainſi il faudroit continuer ſuivant ce même ordre juſques à la derniere, s'il y en avoit davantage en cette ſomme; car c'eſt choſe qu'on peut toûjours faire en même façon.

Puis par le terme qui ſuit en ce même ordre, qui eſt ici le quatriéme, il faut chercher la quantité v, & on a $v = \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}$; ou mettant y au lieu de e qui lui eſt égal, on a $v = \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3}$ pour la ligne AP, Fig. 152. Fig. 152.

1. On appelle racines d'une équation les quantitez par la multiplication deſquelles cette équation a été produite, $y - a = o$, $y - b = o$ ſont les racines de l'équation $yy - ay - by + ab = o$. L'équation A contient ſix racines, parmi leſquelles il y en a certainement deux égales dès qu'on ſuppoſe PC rayon d'un cercle, qui touche la courbe AE en C, ainſi qu'il a été dit Art. 1. Ce qui regarde ces differentes racines ſera expliqué, Liv. 3. Part. 2. Sect. 1.

2. La multiplication de $yy - 2ey + ee$ par $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$ étant faite, le produit qui eſt l'égalité B, 1° eſt égal à zero, parceque par quelque quantité qu'on multiplie zero, le produit eſt toûjours zero : or l'équation $yy - 2ey + ee$ eſt par la ſuppoſition égale à zero. 2° Chaques termes correſpondans des équations A & B peuvent être comparez, le ſecond de l'une avec le ſecond de l'autre, le troiſiéme de l'une avec le troiſiéme de l'autre, &c. parceque les indéterminées des termes de l'équation B peuvent avoir la valeur qui eſt neceſſaire, afin que les deux termes que l'on compare, ſoient exactement égaux. 3° Des ſix racines que contient auſſi l'équation B, on eſt certain qu'il y en a deux égales, à ſavoir celles de l'équation $yy - 2ey + ee = o$. De ce qu'il y a deux racines égales dans l'équation B, quelles que ſoient les autres, il ſuit que cette équation convient au point C Fig. 152. & qu'elle peut ſervir à trouver la droite PC, qui eſt ſuppoſée perpendiculaire à la courbe CE. 4° On voit que quelques ſignes qu'ayent les termes de l'équation $y^4 . fy^3 . ggyy . h^3y . k^4$, on feroit une équation, qui auroit autant de termes que l'équation B, & dont on pourroit dire ce qu'on vient de dire de l'équation B, & dont on pourroit ſe ſervir avec autant de ſuccez, ainſi que M. DESCARTES le remarquera bientôt.

3. Comme c'eſt pour connoître v, qu'on cherche les valeurs des autres indéterminées, on ne cherche que la valeur de celles des indéterminées, qui ſe trouvent dans le terme de l'équation A, où eſt v, & de celles qui ſe trouvent dans le terme de l'équation B qui lui répond : à moins que ces indéterminées ne puſſent être connuës, ſans en avoir trouvées d'autres : car alors il faudroit encore déterminer la valeur de ces dernieres. Dans cet Exemple le terme, où eſt v, eſt le quatriéme de l'équation A, $+ 4bcdy^3 - 2ddvy^3$, à qui le quatriéme terme $+ h^3y^3 - 2eggy^3 + eefy^3$

FIG. 151. répond dans l'équation *B*. Nous chercherons donc la valeur des indéterminées f, g, h, & parceque h ne peut être connuë ſans que l'on connoiſſe auparavant k, on en cherchera auſſi la valeur. On commence par les termes qui ſervent à découvrir la valeur des autres.

On choiſit le quatriéme terme, qui contient v, plûtôt que le cinquiéme qui contient le quarré vv, quoique l'on puiſſe fixer la valeur de v par ce dernier ; parcequ'il eſt plus facile de le faire avec l'un qu'avec l'autre. Et même ſi v n'avoit qu'une dimenſion dans pluſieurs termes, on prefereroit celui, qui demanderoit une operation plus aiſée.

4. On commence par les ſeconds & par les derniers termes des équations *A*, *B* ; parceque n'y ayant dans les deux premiers termes que f d'indéterminée, & dans les deux derniers que k ; ces termes ne ſuppoſent la connoiſſance d'aucune indéterminee, & qu'ils ſerviront, après qu'ils ſeront trouvez, à découvrir les autres.

On compare ainſi les ſeconds termes $-2by^3 = fy^3 - 2ey^3$, on diviſe tout par y^3, il reſte $-2b = f - 2e$; $f = 2e - 2b$.

On vient aux derniers $bbccdd = eek^4$; $k^4 = \frac{bbccdd}{ee}$. On ne fait pas la valeur de k, parceque dans les autres termes il n'y a que le quarré de quarré k^4.

On compare enſuite les troiſiémes termes, parceque dans le troiſiéme terme de l'équation *B* il n'y a que deux indéterminées f, g, & que la valeur de f, que l'on connoît, étant ſubſtituée à ſa place, on déterminera g. Soit donc $ggy^4 - 2efy^4 + eey^4 = -2cdy^4 + bby^4 + ddy^4$; $gg - 2ef + ee = -2cd + bb + dd$, ou mettant pour f ſa valeur $2e - 2b$, on ſait $gg - 3ee + 4be = -2cd + bb + dd$; $gg = 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Après cela l'on compare les penultiémes termes, parceque dans le penultiéme terme de l'équation *B* il n'y a que deux inconnuës h, k, & que la valeur de k déja connuë étant ſubſtituée, on découvrira celle de h.

Soit donc $-2ek^4y + eeh^3y = -2bccddy$; $-2ek^4 + eeh^3 = -2bccdd$, où mettant pour k^4 ſa valeur $\frac{bbccdd}{ee}$, on trouve $h^3 = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$,

Enfin l'on compare les quatriémes termes, parcequ'ils ne contiennent d'indéterminées que v, que l'on cherche, & f, g, h que l'on connoît. C'eſt donc $4bcdy^3 - 2ddvy^3 = h^3y^3 - 2eggy^3 + eefy^3$; $4bcd - 2ddv = h^3 - 2egg + eef$. 1° Subſtituons la valeur de h^3 à ſa place, nous ferons $4bcd - 2ddv = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee} - 2egg + eef$. 2° Subſtituons la valeur de gg à ſa place, il viendra $4bcd - 2ddv = \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee} - 6e^3 + 8bee + 4cde - 2bbe - 2dde + eef$. 3° A la place de f ſubſtituons ſa valeur ; diviſons tout par $2dd$; pour e mettons y, qui lui eſt égale & rangeons les termes comme M. DESCARTES,

TES, il ſe fera enfin $v = \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} = AP$.

III. M. DESCARTES.

Et ainſi la troiſiéme équation, * qui eſt $zz \frac{+2bcddz - 2bcdez}{bdd} \frac{- 2cddvz - 2bdevz - bddff + bddvv - cddff + cddvv}{+ccc + cev - ddv}$ a la même forme que $zz - 2fz + ff$, en ſuppoſant f égal à z; ſi bien qu'il y a derechef équation entre $-2f$, ou $-2z$ & $\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv}{- 2bdcv} \frac{bdd + cec + cev}{ddv}$; d'où on connoît que la quantité v eſt $\frac{bcdd - bcde + bddz}{cdd + bde - cez} \frac{+ ceez}{+ ddz}$. C'eſt pourquoi compoſant la ligne AP de cette ſomme égale à v, dont toutes les quantitez ſont connuës, & tirant du point P ainſi trouvé une ligne droite vers C, elle y coupe la courbe CE à angles droits; qui eſt ce qu'il falloit faire.

* Art. 11. v. 4. F. 150.

Il faut déterminer la valeur de v, qui eſt dans l'équation $zz + \frac{2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddff + bddvv - cddff + cddvv}{bdd + cec + cev - ddv} = 0$. Je fais $z = f$, $z - f = 0$, dont le quarré eſt $zz - 2fz + ff = 0$. On compare les ſeconds termes $-2fz = \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdvz}{bdd + cec + cev - ddv}$, ou bien en laiſſant z qui ſe trouve dans chaque terme $-ef = \frac{+2bcdd}{- 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cec + cev - ddv}$, ou même ainſi que M. DESCARTES le fait, parce que $f = z$, $-2z = \frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cec + cev - ddv}$.

Je multiplie tout par $bdd + cec + cev - ddv$, d'où l'on tire $v = \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - cez + ddz} = AP$.

Toute la valeur de v eſt connuë, parceque z, qui eſt l'excez de CF ſur FA eſt déterminée, lorſque le point C a été pris à volonté; & que les points F, A ont été données.

IV. M. DESCARTES.

Et je ne voi rien qui empêche qu'on n'étende ce Problême en même façon à toutes les lignes courbes, qui tombent ſous quelque calcul Geometrique.

1. On pourroit l'appliquer au cercle de cette maniere. On a trouvé au commencement de cet Article, Fig. 151. que pour l'ellipſe AP, v étoit $y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$. Le cercle étant une eſpece d'ellipſe, dont tous les diametres ſont égaux entr'eux & à leurs parametres, on a $q = r$ & l'on a pour le cercle $v = \frac{1}{2}q = AP$. Ce qui marque que AP eſt égal au rayon du cercle, & que le point P eſt le centre. Fig. 151.

FIG. 150. 2. Soit la courbe AE, Fig. 150. une parabole, dont le parametre eſt r, l'abſciſſe AM, y; l'ordonnée CM, x; AP, v; $MP = AP - AM$, $v - y$, CP, s. On a dans le triangle rectangle, CMP, $ss = xx + vv - 2vy + yy$ comme auparavant, & par la nature de la parabole $xx = ry$; ſubſtituons cette valeur de xx à ſa place: nous aurons $ff = ry + vv - 2vy + yy$; $yy + ry - 2vy + vv - ff = o$, qu'il faut comparer avec $yy - 2ey + ee = o$. Les ſeconds termes ſont $-2ey = ry - 2vy$, $-2e = r - 2v$; $2v = r + 2e$; $v = \frac{1}{2}r + e = \frac{1}{2}r + y$. Et parceque AM eſt y; il ſuit que MP eſt $\frac{1}{2}r$ la moitié du parametre.

3. Soit la même courbe AE une hyberbole, dont le diametre déterminé eſt q, le parametre r; & le reſte comme auparavant. Par la nature de l'hyperbole on a $xx = ry + \frac{r}{q}yy$, qu'il faut ſubſtituer dans $ff = xx + vv - 2vy + yy$, afin de la changer en $ff = ry + \frac{r}{q}yy + vv - 2vy + yy$, multipliez par q, ce ſera $qyy + ryy - 2qvy + qry + qvv - qff = o$ diviſez par $q + r$, vous ferez $yy \frac{-2qvy + qry}{q+r} \frac{+qvv - qff}{q+r} = o$.

Comparez le ſecond terme de cette équation avec le ſecond terme de l'équation $yy - 2ey + ee = o$. ce ſera $-\frac{2qvy + qry}{q+r} = -2ey$; $v = \frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q}$; $v = \frac{1}{2}r + y + \frac{ry}{q}$. Si l'hyperbole eſt équilatere, l'on a $r = q$, & $v = \frac{1}{2}r + 2y = AP$.

FIG. 155. 4. Soit la courbe CD, Fig. 155. la conchoïde ſuperieure de Fig. 43. Soit A le pole, BD, $a = CE$; BA, b; CM, $x = HB$; CH, $y = MB$; $AM = b + y$; BP, v; $PM = v + y$; PC, s. Son équation telle qu'elle a été trouvée, Liv. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 3. n. 1. ſera celle-ci, $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = o$. $xxyy = -y^4 - 2by^3 + aayy - bbyy + 2aaby + aabb$. Après cela dans le triangle rectangle CMP l'on comme auparavant $\overline{CP}^2$, $ff = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $xx + vv + 2vy + yy$; $xx = ff - vv - 2vy - yy$. Mettons cette valeur de xx à ſa place, nous aurons $y^3 \frac{+aayy - bbyy - ffyy}{2v} \frac{+vvyy + 2aaby + aabb}{-2b} = o$. équation du troiſiéme degré. Maintenant pour donner à l'équation $yy - 2ey + ee = o$ les dimenſions convenables, je la multiplie par $y + f = o$, ce qui produit $y^3 - 2eyy + fyy + eey - 2efy + eef = o$.

Je compare d'abord les derniers termes $eef = \frac{aabb}{2v - 2b}$: donc $f = \frac{aabb}{2vee - 2bee}$. Enſuite je viens aux troiſiémes termes $eey - 2efy = \frac{2aaby}{2v - 2b}$; je ſubſtituë pour f ſa valeur déja trouvée, & je fais $eey - \frac{2aabbey}{2vee - 2bee} = \frac{2aaby}{2v - 2b}$, ou $ee - \frac{aabb}{ve - be} = \frac{aab}{v - b}$, $v = b + \frac{a - b}{ee} + \frac{aabb}{e^3} = b + \frac{a - b}{yy} + \frac{aabb}{y^4}$. La conſtruction ſe fera, Art. 6.

5. On pourroit même, ſi l'on en avoit beſoin, ſe ſervir de ce Problême pour tirer une perpendiculaire ſur un point donné d'une ligne droite.

FIG. 150. Soit Fig. 150. le point C de la droite FC, ſur laquelle il faut tirer la per-

pendiculaire CP : je fais un angle quelconque CFP, je tire & je nomme CM, x ; FM, y ; FP, v ; $MP = v - y$; CP, s. Que l'équation à la ligne droite au point C ſoit $x = \frac{by}{a}$, dont le quarré eſt $xx = \frac{bbyy}{aa}$; je ſubſtituë cette valeur de xx à ſa place dans l'équation $ff = xx + vv - 2vy + yy$, & je fais $ff = \frac{bbyy}{aa} + vv - 2vy + yy$; $yy \frac{-2aavy - aaff}{aa+bb} + \frac{aavv}{aa+bb} = o$. dont je compare le ſecond terme avec le ſecond terme de $yy - 2ey + ee = o$, & c'eſt $-\frac{2aavy}{aa+bb} = -2ey$; $\frac{aav}{aa+bb} = e$; $aav = aae + bbe$, $v = e + \frac{bbe}{aa} = y + \frac{bby}{aa}$, & ſi a étoit égal à b, $v = 2y$. FIG. 130.

V. M. DESCARTES.

Même il eſt à remarquer touchant la derniere ſomme, qu'on prend à diſcretion, pour remplir le nombre des dimenſions de l'autre ſomme lorſqu'il y en manque, comme nous avons pris tantôt $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, que les ſignes + & — y peuvent être ſuppoſez tels, que l'on veut, ſans que la ligne v, ou AP ſe trouve diverſe pour cela, comme vous pourrez aiſément voir par experience. Car s'il falloit que je m'arrêtaſſe à démontrer tous les Theorêmes, dont je fais quelque mention, je ſerois contraint d'écrire un Volume beaucoup plus gros que je ne deſire.

Quelques ſignes qu'ayent les termes de l'équation $y^4 . fy^3 . ggbb\ h^3y . k^4 . = o$, le produit de cette équation multipliée par $yy - 2ey + ee = o$, ſera toûjours égal à zero, & contiendra toûjours deux racines égales entr'elles, & chaque terme ſera comparé à chaque terme correſpondant de l'équation qu'on veut reſoudre, par les indéterminées qu'ils contiennent : ainſi l'on trouvera toûjours ce qu'on cherche.

Si vous multipliez $yy\ 2ey + ee = o$ par $y^4 - fy^3 + ggyy - h^3y + k^4$ le produit ſera le même qu'auparavant à l'équation B à quelques ſignes près & par la comparaiſon de ſes termes avec l'équation A vous trouverez $f = 2b - 2y$, $k^4 = \frac{bbccdd}{yy}$; $gg = -4by + 3yy - 2cd + bb + dd$; $h^3 = \frac{2bccdd}{yy} - \frac{2bbccdd}{y^3}$; & enfin après avoir ſubſtitué les valeurs de h^3, gg, f, à leur place, vous trouverez la même valeur de v qu'auparavant.

C'eſt à tort qu'on a avancé * que M. DESCARTES avoit fait une faute en appliquant cette Methode à toutes ſortes de degrez, comme ſi elle ne convenoit qu'aux équations planes, & à celles qui en dépendent ; mais non pas aux cubiques, & à celles qui en dépendent : puiſque les mêmes raiſons, qui prouvent qu'elle eſt bonne pour quelques équations, prouvent auſſi qu'elle l'eſt pour toutes. * *Tom. 3. Lett. 58. & 59.*

ARTICLE IV.

Cette Methode ſert à mener les tangentes des courbes, le point donné n'etant pas ſur l'axe au dedans de la courbe.

1. SOit donné le point P du côté de la concavité de la parabole AC,
Fig. 157. duquel il faut tirer ſur la partie AC de la parabole la ligne PC,
qui coupe à angles droits la parabole en C. Sur l'axe AF abbaiſſez du point C le perpendiculaire CG. Menez PF parallele à CG, & PM parallele à FG, juſqu'à ce qu'elle rencontre CG prolongée en M.

Nommons les données $PF, a = GM$; AF, v; le parametre de la parabole p; les inconnuës AG, y; CG, x; PC, s; vous aurez $CM = x + a$; $FG = v - y = PM$. Dans le triangle CPM, vous trouvez $\overline{CP}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $ss = xx + 2ax + aa + vv - 2vy + yy$. Si l'on cherche la valeur de AG, y immediatement, l'operation eſt beaucoup plus facile, que ſi l'on cherche d'abord la valeur de x, & qu'on ſe ſerve enſuite de x connuë pour découvrir y. Vous rangerez donc ainſi les termes de l'équation précedente $vv - 2vy + yy = ss - xx - 2ax - aa$; extrayez les racines $y = v - \sqrt{ss - xx + 2ax + aa}$. Mettez cette valeur de y dans l'équation à la parabole $py = xx$, & quarrez les deux

membres c'eſt $x^4 * \begin{matrix} +ppxx \\ -2pvxx \end{matrix} + 2appx \begin{matrix} +aapp \\ -ppss \\ +ppvv \end{matrix} = 0$.

Pour reſoudre cette équation par la Methode de M. DESCARTES, vous multipliez l'équation $xx - 2ex + ee$ par $xx + fx + gg$, le pro-

duit eſt $x^4 \begin{matrix} -2ex^3 \\ +fx^3 \end{matrix} \begin{matrix} +eexx \\ -2efxx \\ +ggxx \end{matrix} \begin{matrix} +eefx \\ -2eggx \end{matrix} + eegg = 0$. & vous

venez à la comparaiſon des termes de ces deux équations.

Les ſeconds termes ſont $-2ex^3 + fx^3 = 0$, $f = 2e = 2x$.

Les quatriémes $+2appx = +eefx - 2eggx$, pour f ſubſtituez ſa valeur $2x$, $gg = ex - \frac{app}{e} = xx - \frac{app}{x}$.

Les troiſiémes $+ppxx - 2pvxx = eexx - 2efxx + ggxx$; pour f & gg mettez leur valeur déja trouvée, vous aurez $2x^3 + ppx - 2pvx + app = 0$; $x^3 * + \frac{1}{2}ppx - pvx + \frac{1}{2}app = 0$. Dont la conſtruction telle qu'on la fera, Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemple 4. donnera la valeur de x: laquelle étant connuë nous fera aiſément connoî-

tre y ; car de l'équation à la parabole $xx = py$, on tire $y = \frac{xx}{p}$. Or AG, y étant déterminée, on éleve au point G la perpendiculaire GC, & la droite PC coupe la parabole à angles droits au point C, de ſorte que la droite EC perpendiculaire à PC, eſt touchante de la courbe au point C. Ici on ne cherche pas v, qui eſt donnée ; car le point P étant donné, la perpendiculaire PF détermine la longueur de AF, v. Mais on cherche AG, y, & CG, x qui ſont inconnuës.

2. Si le point P étoit donné ſur l'axe AF au dedans de la parabole, la ligne PF, a ſeroit nulle ; & il ne faudroit qu'effacer le terme où a ſe trouve dans l'équation, afin de la reduire à $x^3 * - pvx + \frac{1}{2}ppx * = o$, $xx = pv - \frac{1}{2}pp$; on mettroit cette valeur de xx à ſa place dans l'équation à la parabole $xx = py$, & l'on formeroit $y = v - \frac{1}{2}p$, équation conforme à celle qu'on a trouvé, Art. 3. n. 4. pour la parabole $v = y + \frac{1}{2}r$, en ſuppoſant le parametre r.

3. Que le point p ſoit donné du côté de la convexité de la parabole. Nous ſuppoſerons la choſe faite, & après avoir abbaiſſé la perpendiculaire pf ſur l'axe AG, par le point C nous menerons GC parallele à pf, juſqu'à ce qu'elle rencontre pm parallele & égale à Gf. Nommons la donnée pf, $a = mG$; Af, v ; AG, y : CG, x ; pC, s ; $pm = Gf = y - v$; $mC = a - x$.

Le triangle rectangle Cmp donne $\overline{Cp}^2 = \overline{mC}^2 + \overline{mp}^2$, $ss = aa - 2ax + xx + yy - 2vy + vv$; $y = v + \sqrt{ss - aa + 2ax - xx} = \frac{xx}{p}$ à cauſe de l'équation à la parabole $xx = py$. & en ſuivant n. 1. On vient à $x^3 * + \frac{1}{2}ppx - pvx + \frac{1}{2}app = o$. que l'on conſtruira, Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. ſi Af, $v > \frac{1}{2}p$; mais Ex. 6. ſi $v < \frac{1}{2}p$.

4. Le point P étant donné, Fig. 156. ſur l'axe AB prolongé hors de l'ellipſe AC ; trouver le point C tel, que la droite PC ſoit touchante de l'ellipſe au point C. FIG. 156.

Je ſuppoſe le point C trouvée ; j'abbaiſſe CG appliquée à l'axe, enſuite je tire la ſecante PEF, qui coupe l'ellipſe aux points E, F ; je tire les appliquées ED, FH, & par le ſommet A la ligne ALK parallele aux appliquées. Il eſt certain, que plus la ſecante PF s'approchera de la tangente PC, plus les points D, H s'approcheront de G, les points E, F de C, les appliquées ED, FH de l'appliquée CG ; & qu'il ſe fait trois triangles équiangles PAL, PDE, PHF. Mais lorſque PF tombera ſur PC, elle ne coupera l'ellipſe qu'au point C, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera touchante au point C, & les deux lignes PD, PH ne feront plus que la ligne PG, les appliquées ED, FH ſe confondront avec l'appliquée CG. Il y aura deux racines égales dans l'équation, parceque CG eſt comme deux appliquées égales, & AG comme deux abſciſſes égales, les deux triangles PDE, PHF ne feront plus que le triangle PGC ; & le triangle PAL devient le triangle PAK.

FIG. 156. Il faut ſuppoſer la choſe faite, & nommer la donnée PA, b; les inconnuës AG, y; GC, x; PC, s; $PG = b + y$; AK, z; & étant comme Art. 1. Fig. 151. l'axe AB, q; le parametre r, l'équation à l'ellipſe eſt $xx = ry - \frac{r}{q} yy$.

Les triangles ſemblables PAK, PGC donnent cette proportion PA, $b : AK$, $z :: PG$, $b + y : GC$, x: donc $x = \frac{bz + yz}{b}$, dont le quarré $xx = \frac{bbzz + 2bzzy + zzyy}{bb} = ry - \frac{r}{q} yy$, d'où l'on forme $yy + \frac{2bqzzy - bbqry}{qzz + bbr} + \frac{bbqzz}{qzz + bbr} = o$. qu'il faut comparer avec $yy - 2ey + ee$.

Et premierement les derniers termes $\frac{bbqzz}{qzz + bbr} = ee$; $zz = \frac{bbree}{bbq - qee} = \frac{bbryy}{bbq - qyy}$.

Enſuite les ſeconds termes $\frac{2bqzzy - bbqry}{qzz + bbr} = -2ey$; $2bqzzy - bbqry = -2eqzzy - 2bbrey$; d'où l'on forme, après avoir ſubſtitué la valeur de zz, $yy + \frac{2by - bbq}{\frac{2b}{bq} + q} = o$. D'où après en avoir extrait la racine, on tirera $y = \frac{bq}{2b + q} = AG$. On connoît donc le point G, où l'on élevera la perpendiculaire GC, & l'on menera du point P la touchante PC.

5. Soit la courbe AC une parabole dont l'équation eſt $xx = py$; $y = \frac{xx}{p}$: mais dans l'équation $bx = bz + yz$ trouvée n. 4. on a $y = \frac{bx - bz}{z} = \frac{xx}{p}$; $xx - \frac{bpx}{z} + bp = o$ qu'il faut comparer avec $xx - 2ex + ee = o$; ſi l'on compare les derniers termes $bp = ee$; c'eſt $bp = xx$, mais par la nature de la parabole, $xx = py$; donc $py = bp$, AG, $y = AP$, b.

Si l'on comparoît les ſeconds termes $-\frac{bpx}{z} = -2ex$; $z = \frac{bp}{2x}$, ſubſtituez cette valeur de z dans l'équation $y = \frac{bx - bz}{z}$; il vient $xx = \frac{2y + bp}{2}$: mais par la nature de la parabole $xx = py$: donc $py = \frac{2y + bp}{2}$ $y = b$. comme auparavant. Vous obſerverez, qu'il faut quelquefois ſubſtituer dans l'équation de la courbe, les valeurs que $yy - 2ey + ee = o$ a découvertes; pour avoir tout ce qu'on cherche.

6. On ne s'eſt ſervi n. 4. 5. de la Methode de M. DESCARTES, que dans la ſuppoſition qu'on a faite que y tenoit la place de deux abſciſſes égales, & x celle de deux appliquées auſſi égales, & que par conſequent l'une de ces deux inconnuës avoit deux racines égales dans l'équation dont on s'eſt ſervi. La raiſon pourquoi on le fait, eſt rapportée n. 4. Mais on ne ſe ſert pas du triangle PCG, comme on l'avoit fait auparavant, parceque ici PC n'eſt pas le rayon d'un cercle, dont le centre ſoit P, & qui touche la courbe au point C. Et l'on ne réuſſiroit pas ſi l'on ſe fondoit ſur l'équation tirée du triangle rectangle PGC.

En effet ſoit encore AC une parabole, dont l'équation eſt $xx = ry$. PC eſt s; CG, x; AG, y; PA, b; PG, $b + y$. On a $\overline{PC}^2 = \overline{PG}^2 + \overline{CG}^2$, $ſſ = xx + bb + 2by + yy$; $xx = ſſ - bb - 2by - yy = ry$; $yy + 2by + ry + bb - ſſ = o$. Comparons cette équation avec $yy -$

$2ey + ee = o$. Prenons les ſeconds termes $+2by + ry = -2ey$; $y = -b - \frac{1}{2}r$. Ce qui n'eſt pas vray.

La raiſon de ceci eſt que Fig. 151. lorſqu'on ſuppoſe que PC eſt le rayon d'un cercle, dont P eſt le centre, & qui touche la courbe AE au point C, il ſe fait une combinaiſon de l'équation au cercle & de l'équation à la courbe, qui ont une commune appliquée CM. Or l'équation au cercle dont P eſt le centre, PC un rayon, & dont le diametre fh eſt ſur l'axe AG de la courbe, c'eſt l'équation $ff = xx + vv - 2vy + yy$, ou $xx = ff - vv + 2vy - yy$, qui vient du triangle rectangle PMC. Car ſoit $Ph = Pf = PC$, s; PM, $v - y$; hM ſera $hP + PM$, $s + v - y$; $fM = fP - PM$, $s - v + y$: l'équation au cercle eſt $\overline{CM}^2 = hM \times Mf$, $xx = ff - vv + 2vy - yy$. Ainſi il ne faut pas être ſurpris; ſi l'on s'eſt ſervi de cette équation au cercle pour trouver le point C dans les cas, où on l'a fait. Fig. 151.

Mais n. 4. 5. Figure 156. où vous avez les deux triangles ſemblables PAK, PGC, qui donnent une équation à la ligne droite, il ſe trouve une combinaiſon de l'équation à la ligne droite & de l'équation à la courbe, dont CG eſt une commune appliquée. C'eſt pour cela, qu'on ne doit pas ſe ſervir de l'équation $ff = xx + bb + 2by + yy$ tirée du triangle rectangle PGC; mais de l'équation $bx = bz + yz$, qui vient de l'Analogie, que fourniſſent les triangles ſemblables PAK, PGC.

ARTICLE V.

Cette Methode ſert à d'autres Problémes, qu'à celui des tangentes.

M. DESCARTES.

MAis je veux bien en paſſant vous avertir que l'invention de ſuppoſer deux équations de même forme, pour comparer ſéparément tous les termes de l'une à ceux de l'autre, & ainſi en faire naître pluſieurs d'une ſeule; dont vous avez vû ici un Exemple; peut ſervir à une infinité d'autres Problêmes, & n'eſt pas l'une des moindres de la Methode, dont je me ſers.

On appliquera cette Methode à la recherche des points d'inflexion des courbes, & aux queſtions de *maximis & minimis*. M. DESCARTES aſſure en particulier dans * une de ſes Lettres, que cette Methode ſert à ces queſtions. * *Tom. 3. Lett. 4. au Pere Merſenne.*

M. DESCARTES ſe ſert encore de la même comparaiſon d'une équation donnée avec une équation feinte, ſans ſuppoſer des racines égales, pour la reſolution d'autres Problèmes. Liv. 3. Part. 3. Sect. 4. 5.

§. I.

Cette Methode ſert à trouver les points d'inflexion des courbes.

LA courbe ACF, Fig. 158. eſt telle, que ſa concavité AC, & enſuite ſa convexité CF ſont tournées du côté de la ligne AB: le point C où finit la concavité AC, & où commence la convexité CF, ſe nomme point d'inflexion; c'eſt un point commun & à la concavité & à la convexité.

Fig. 158.

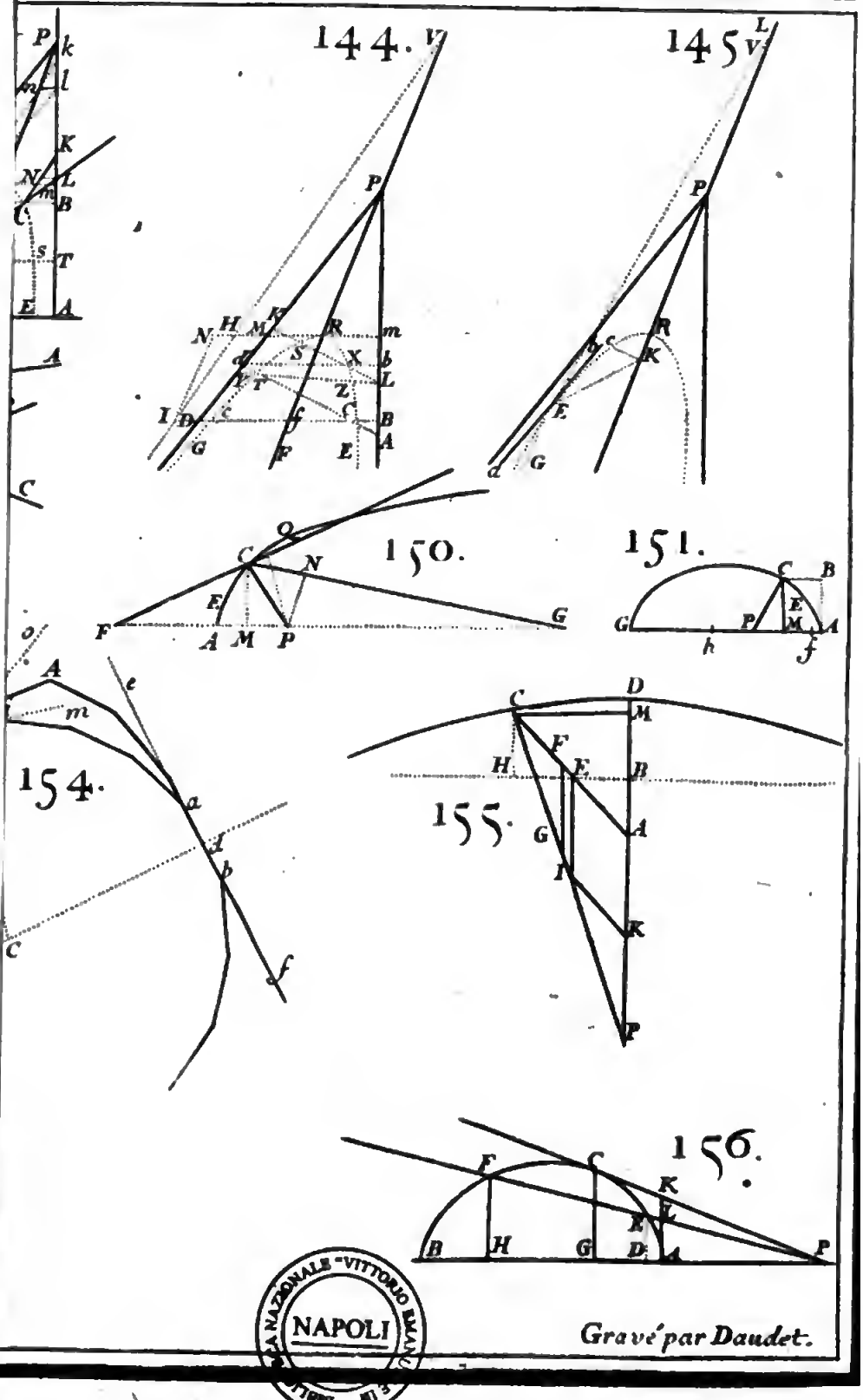
L'appliquée CD tirée du point d'inflexion C ſur l'axe AB, peut être conſiderée comme trois appliquées égales réünies en un même point C. Car la droite pfF, que l'on ſuppoſe toucher la courbe en f, & la couper en F, détermine deux ordonnées FB, fb de la courbe; dont la derniere fb, qui eſt terminée au point touchant f équivaut à deux appliquées égales, & l'équation qui lui convient a deux racines égales, comme on a dit Art. 2.

Ainſi l'on peut avancer, que toute ligne droite pfF, qui touche la courbe en un point, & la coupe en un autre, détermine trois racines dont deux ſont égales entr'elles. Après cela il eſt clair, que l'on peut tirer d'autres droites, qui toucheront & couperont en même tems la courbe, & dont les points F, f d'attouchement & d'interſection s'approcheront toûjours plus l'un de l'autre, juſqu'à ce qu'enfin ces deux points f, F ſe confondent, & n'en faſſent plus qu'un, comme nous ſuppoſons qu'il arrive au point C, où l'on peut dire que la droite PCe touche & coupe tout enſemble la courbe. Alors les appliquées FB, fb n'en font qu'une CD; les coupées pb, pB n'en font qu'une PD; & l'équation qui appartiendra au point C de la courbe, aura trois racines égales CD deux à raiſon de la tangente, une à raiſon de la ſecante, qui ſe confondent au point d'inflexion C.

Lorſqu'on a eû deux racines égales, on a pris ſuivant la Methode de M. Deſcartes $y = e$, $y - e = o$, dont le quarré $yy - 2ey + ee = o$ a ſervi à reſoudre le Problême des tangentes. C'eſt par une ſuite de cette Methode qu'ici nous prendrons le cube $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = o$, pour reſoudre le Problême des points d'inflexion. Car comme $yy - 2ey + ee = o$ contient deux racines égales, à cauſe que c'eſt le produit de la multiplication de $y - e = o$ par $y - e = o$: de même $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = o$, qui eſt le produit de $yy - 2ey + ee = o$ par $y - e = o$ troiſiéme racine égale à chacune des deux premieres, contient trois racines égales. Et il eſt certain que ce n'eſt pas là une Methode differente de la precedente.

1. Soit propoſé le cercle AFB, Fig. 159. Il faut décrire la courbe ADG, dont le ſommet ſoit A, l'axe AB, & dont chaque appliquée CD ſoit troiſiéme proportionelle de chaque appliquée CF & de chaque corde AF

Fig. 159.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

AF correſpondante du cercle : de ſorte qu'à chaque point D l'on ait cette Analogie $CF : AF :: FA : CD$.

Par le ſommet A menez AE parallele à CD. Nommez la connuë AB, a ; l'inconnuë AC, x ; CF, y ; CD, z ; PA, s ; AE, r ; $PC = s + x$.

Pour former l'équation à la courbe ADG, je me ſers du triangle ACF rectangle en C, & dans lequel $\overline{AF}^2$, $xx + yy$. D'ailleurs par la nature du cercle j'ai au point F $yy = ax - xx$, $y = \sqrt{ax - xx} = CF$; je mets donc cette valeur de yy à ſa place dans l'équation precedente, ce qui fait $\overline{AF}^2 = xx + ax - xx = ax$, & $AF = \sqrt{ax}$. Enſuite ſuppoſ. au point D j'ai cette proportion CF, $\sqrt{ax - xx} : AF, \sqrt{ax} : AF, \sqrt{ax} : CD$, z ; $ax = z\sqrt{ax - xx}$. Dont les quarrez ſont $aaxx = axzz - xxzz$; $azz - xzz - aax = o$ équation à la courbe ADG, dont la droite BH parallele à CD eſt aſymptote, car au point B, où l'appliquée au cercle eſt nulle, on a ſupp. comme l'appliquée, o eſt à la corde AB, a : ainſi la corde AB, a eſt à l'appliquée BH, z de la courbe ADG ; donc $z = \frac{aa}{o}$, ce qui marque ſuivant la Methode Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 3. que BH eſt aſymptote.

Vous chercherez à preſent le point d'inflexion D par les triangles équiangles PAE, PCD ; qui fourniſſent l'Analogie $PA, s : AE, r :: PC, s + x : CD, z$; & $x = \frac{sz - rs}{r}$; pour x ſubſtituez cette valeur dans l'équation $azz - xzz - aax = o$. Vous ferez $z^3 - \frac{arzz}{s} - rzz + aaz - aar = o$.

Pour reſoudre cette équation vous la comparez avec l'équation $z^3 - 3ezz + 3eez - e^3 = o$; qui contient trois racines égales. Il ſuffira de comparer les troiſiémes termes $+ 3eez = + aaz$; d'où l'on tire $ee = \frac{aa}{3}$; $zz = \frac{1}{3}aa$. Subſtituez cette valeur de zz dans l'équation $azz - zzx - aax = o$; vous aurez $x = \frac{1}{4}a$. C'eſt pourquoi vous couperez $AC = \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}AB$, vous menerez l'ordonnée CD, qui déterminera le point D d'inflexion de la courbe ADG.

2. Soit propoſée la premiere parabole cubique dAD Fig. 160. dont l'équation eſt $y^3 = aax$, c'eſt-à-dire que le cube de l'appliquée CD, y eſt égal au parallelepipede ſous la flèche correſpondante AC, x & ſous aa quarré du parametre a. L'on cherche ſon point d'inflexion, en ſuppoſant que c'eſt le point D. Fig. 160.

On trouvera comme n. 1. dans les triangles équiangles PAE, PCD $x = \frac{sy - rs}{r}$; on ſubſtituë cette valeur de x dans l'équation $y^3 - aax = o$, ce qui donne $y^3 * - \frac{aasy}{r} + aas = o$, dont il faut comparer le ſecond terme qui eſt nul, avec le ſecond terme de $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = o$, ſoit donc $- 3eyy = o$, $y^3 = \frac{o}{3}$. Si l'on ſubſtituë cette valeur de y^3 dans l'équation $y^3 - aax = o$. On fait $aax = o$, $x = \frac{o}{aa}$. Tout cela prouve que le point d'inflexion de la parabole cubique dAD eſt au ſommet A, où $y = o$, $x = o$.

FIG. 158. 3. Nous trouverons la même choſe pour la ſeconde parabole cubique CKc Figure 58. mais le point d'inflexion K s'appelle point de rebrouſſement, parceque la ſeconde partie Kc de la parabole retourne du même côté de l'axe KB, où eſt la premiere partie CK : ſon équation eſt $y^3 = axx$.

FIG. 161. 4. Cherchons le point d'inflexion N Fig. 161. de la conchoïde parabolique No, dont il a été parlé, Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Exemp. 1. & dont l'équation a été trouvée là $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$, en ſuppoſant $Ab = Nm$, $+x$; bN, $-y$. Soit comme auparavant PA, s; AS, r; $Pb = s + x$. Les triangles ſemblables PAS, PbN donnent, PA, s: AS, r: Pb, $s+x$: bN, $-y$; & $sr + rx = -sy$; $x = \frac{-sy-sr}{r}$.

Mettons cette valeur de x à ſa place dans l'équation $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$, elle ſe changera en $y^3 - 2ayy \frac{+asyy}{r} - aay + asy + 2a^3 = 0$, qu'il faut comparer avec $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$. Les derniers termes ſuffiront, $-e^3 = 2a^3$; $-y^3 = 2a^3$; $-y = \sqrt[3]{2a^3}$. $yy = \sqrt[3]{4a^6}$. Subſtituons ces valeurs de y, yy, y^3 dans l'équation $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$: d'où l'on tirera $-2\sqrt[3]{2a^3} + a + x = 0$. $x = -a + 2\sqrt[3]{2a^3}$, $x = -a + 2a\sqrt[3]{2}$. Ainſi le point N ſe trouvera dans le concours N de bN, $-y = \sqrt[3]{2a^3}$, & de Nm, $x = -a + 2a\sqrt[3]{2}$.

Si l'on avoit cherché le point d'inflexion de la conchoïde EC, dont No eſt la contrepoſée ; nous aurions trouvé qu'il n'y a que le point N d'inflexion dans les courbes, que l'équation $y^3 - 2ayy - aay - axy + 2a^3 = 0$ produit ; & qu'ainſi la courbe CE n'en a point. En effet ſuppoſons que C eſt un point d'inflexion, tirez pCE, nommez $CM = AB$, x; CB, y; pA, s; AE, r; $pB = pA - AB$, $s - x$. Dans les triangles pAE, pBC, vous trouverez $x = \frac{rs-sy}{r}$, qui étant ſubſtituée dans l'équation propoſée, fera $y^3 - 2ayy + \frac{asyy}{r} - aay - asy + 2a^3 = 0$. La comparaiſon de $-e^3 = 2a^3$, donnera encore $x = -a + 2\sqrt[3]{2a^3}$, comme auparavant.

5. Il faut trouver le point d'inflexion C Fig. 162. de la courbe CEc, dont on a trouvé Part. 2. Sect. 3. Art. 2. Ex. 10. l'équation $2axy - xyy - a^3 + ayy = 0$. Après avoir nommé CB, y; AB, x; AP, s; AS, r; PB, $s + x$; les triangles PBC, PAS donnent $x = \frac{sy-rs}{r}$, qui étant ſubſtituée dans l'équation de la courbe fait $y^3 - 2ayy - \frac{aryy}{s} - ryy + 2ary + \frac{a^3r}{s} = 0$. Qu'il faut comparer avec l'équation $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = 0$.

Les troiſiémes termes donnent $r = \frac{3ee}{2a}$. Les quatriémes $+a^3r = -e^3s$; ſubſtituez la valeur de r, vous aurez $s = \frac{-3aa}{2e}$. Les ſeconds $-3es = -2as - ar - rs$, ſubſtituez les valeurs de s & de r, multipliez par 2, diviſez par 3, ce ſera $y^3 - \frac{1}{2}ayy + 3aay + 2a^3 = 0$. La reſolution

de cette équation, que l'on fera Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemple 6. donnera la valeur de $y = CB$, qui étant substituée dans l'équation $2axy - xyy - a^3 + ayy$ fera connoître la valeur de AB, $x = CM$.

6. Supposons que AD Fig. 160. est une parabole du quatriéme degré, dont l'équation est $y^4 = a^3x$; $y^4 - a^3x = o$. Nous trouverons $x = \frac{sy - rs}{v}$, qui étant substituée dans l'équation, fera $y^{4**} - \frac{a^3sy}{r} + a^3s = o$. Parceque cette équation est du quatriéme degré, & qu'on suppose qu'elle a trois racines égales, on multipliera $y^3 - 3ey^2 + 3eey - e^3 = o$ par $y + f$, le produit est

$$\begin{array}{llll} y^4 & -3ey^3 & +3eeyy & -e^3y \\ & +fy^3 & -3efyy & +3eefy \end{array} \quad -e^3f = o.$$

que l'on comparera avec l'équation à resoudre de cette maniere.

Parceque le second terme de l'équation à resoudre est nul, il suit que le second terme $-3ey^3 + fy^3 = o$; $f = 3e$; & par la même raison le troisiéme $+3eeyy - 3efyy = o$; $f = +e$; or ces deux valeurs de f sont impossibles en même tems : ainsi la parabole du quatriéme degré n'a aucun point d'inflexion.

Les courbes du second degré n'ont aucun point d'inflexion, car soit proposée la parabole ordinaire $yy = px$, $yy - px = o$. Et que l'on substituë la valeur de $x = \frac{sy - rs}{r}$; on aura $yy - \frac{psy}{r} + ps = o$. Si on la compare avec $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 = o$, on aura toûjours $y^3 = o$, parceque l'équation proposée ne contient pas le troisiéme degré de son inconnuë : or cette Methode exige que les premiers termes des deux équations soient égaux.

§. II.

Cette Methode sert aux questions de Maximis & Minimis.

SOit Fig. 163. AB l'axe de la courbe ACB, dont les appliquées parallelles entr'elles GD, CM, gd vont en croissant depuis A jusqu'en CM, & ensuite en décroissant jusqu'en B; CM est appellée la plus grande des appliquées. L'axe elle-même AB est aussi dans l'ellipse, par exemple la plus grande abscisse qu'on puisse prendre sur l'axe. Fig. 163.

Soit la droite Ff parallele à l'axe AB; prolongez les appliquées GD, gd, CM en f, f, F. Que les lignes fA, fD, FC, fd, fB tirées depuis la droite Ff jusqu'à la courbe, aillent en décroissant depuis fA jusqu'à FC. & ensuite en croissant jusqu'à fB; la ligne FC est appellée la moindre, & les lignes fA, fB sont appellées les plus grandes des lignes droites menées depuis la droite Ff jusqu'à la courbe ACB. Les Problêmes, par lesquels on cherche ces plus grandes & ces plus petites, s'appellent questions de *Maxi-*

FIG. 163. *mis & Minimis.* Il faut remarquer que CM, qui eſt une plus grande appliquée, eſt tirée ſur la concavité de la courbe, & que CF, qui eſt une plus petite, eſt tirée ſur la convexité. On appelle encore queſtion de *Maximis & Minimis* les Problèmes, où l'on chercheroit, en quel point, par exemple, il faut couper une ligne droite, afin que le rectangle formé des ſegmens de cette ligne ſoit plus grand ou plus petit, que tout autre rectangle fait de deux autres ſegmens quelconques de la même ligne, &c.

Suppoſons que CM eſt la plus grande des appliquées à la courbe ACB; ſi du point M comme centre je décris l'arc DHd, qui coupe la courbe aux points D, d; il y aura là deux appliquées égales DG, dg, que je nomme x: mais les abſciſſes AG, Ag, que je nomme y, ſont certainement inégales. Ainſi l'équation, qui exprimera le rapport des points D, d avec la droite AB, contiendra deux valeurs inégales de y. Maintenant à meſure que je diminuerai le rayon du cercle décrit du centre M; les points D, d; G, g s'approcheront; & quand je décrirai un cercle, dont le rayon ſera MC; ce cercle touchera la courbe en C, les points D, d ſe reüniront en C, & les points G, g en M; & l'équation qui exprimera le rapport du point C de la courbe au point M de la droite AB, contiendra deux racines égales de x & de y, & l'on pourra ſans y rien changer la comparer avec l'équation $yy - 2cy + cc = o$, ou avec telle autre d'un degré convenable.

De même ſi du point F on décrit pluſieurs cercles, dont les rayons ſoient plus grands que FC, ils couperont la courbe en deux points, & le cercle, dont le rayon ſera FC, la touchera en C.

* *Tom. I. Lettr.* 45. C'eſt encore ici le Problème des tangentes ſuivant * Mr DESCARTES, qui aſſure que les tangentes ſont des plus grandes & des plus courtes ſous certaines conditions. La tangente PC Fig. 156. eſt la ſecante la plus courte qu'on puiſſe tirer du point C, de ſorte qu'elle coupe la courbe en deux points reünis en un ſeul; car on ſuppoſe qu'une touchante coupe la courbe en deux points infiniment proches.

La ligne droite PC, Figure 158. eſt auſſi la plus courte qu'on puiſſe tirer de la droite AP ſur la courbe ACF, de ſorte qu'elle ſoit en même tems tangente & ſecante de la courbe. La droite PC, Fig. 151. eſt encore la plus courte, qu'on puiſſe tirer de la ligne AG ſur le point C de la courbe AC de ſorte que PC ſoit perpendiculaire à la courbe. Ou bien, parceque ces lignes PC ſont les ſeules qu'on puiſſe tirer avec toutes ces conditions, on peut dire, qu'elles ſont en même tems les plus grandes & les moindres.

De ce que nous venons de dire, il ſuit, qu'il ne faut point faire de changement dans les équations des courbes, pour en tirer les plus grandes & les moindres. En effet 1° comparez les Figures 151. 163. vous verrez que les lignes CP, CM, de Fig. 151. deviennent la ſeule CM de Fig. 163. & que les deux AP, AM, de Fig. 151. ſont la ſeule AM, de Fig. 163.

Ainſi étant, Fig. 151. CP, s, CM, x; AM, y; AP, v; $PM, v-y$, l'on a Fig. 163. $CP, s=CM, x$; $AM, y=AP, v$. Et l'équation $ff = xx+vv-2vy+yy$, dont on s'eſt ſervi, Art. 1. 3. 4. ſe reduit à $xx=xx+yy-2yy+yy$, pour Fig. 163. $o=o$. Or c'eſt avec l'équation $ff=xx+vv-2vy+yy$, qu'on a fait un changement dans les équations des courbes : on n'en peut donc point faire dans la Fig. 163.

Comparez 2° les Figures 156. 163. vous obſerverez qu'au point C, Fig. 163. où eſt la plus grande appliquée CM, la tangente PC eſt parallele à l'axe AG; & AK eſt égale à CM. C'eſt pourquoi étant, Fig. 156. PA, s; AK, r; AG, y; GC, x; $PG, s+y$; & l'équation que donnent les triangles ſemblables PAK, PGC, & dont on s'eſt ſervi Art. 4. Art. 5. §. 1. étant $sx=sr+ry$; cette équation pour Fig. 163. où $AK, r=CD, x$, ſe reduit à $sx=sx+ry$; $ry=o$. Et comme c'eſt avec l'équation $sx=sr+ry$, qu'on a fait des changemens dans les équations des courbes pour les Problèmes, à qui elle convenoient; il ſuit, qu'on n'en peut point faire dans la Fig. 163. Voici des Exemples.

1. Il faut Fig. 163. aſſigner la plus grande appliquée CM à l'ellipſe ACB. Si l'on nomme l'axe AB, q; le parametre r; chaque appliquée GD, x; chaque coupée AG, y; l'équation à l'ellipſe ſera $qxx=qry-ryy$; $yy-qy+\frac{q}{r}xx=o$. Qu'il faut comparer avec $yy-2ey+ee=o$. Fig. 163.

Les ſeconds termes ſuffiront $-2ey=-qy$; $e=\frac{1}{2}q$; $AM, y=\frac{1}{2}q$. C'eſt donc l'abſciſſe $AM, y=\frac{1}{2}q$, qui détermine le point M, où la plus grande appliquée CM ſe trouve : & ce point eſt le centre. Subſtituons cette valeur de y dans $yy-qy+\frac{q}{r}xx=o$, il vient $x=\sqrt{\frac{1}{4}qr}=\frac{1}{2}\sqrt{qr}$. Valeur de la plus grande appliquée CM, ou de la moitié du petit axe, car comme on l'apprend dans les Traitez des Sections coniques, le petit axe eſt $\sqrt{qr}$, c'eſt-à-dire la moyenne proportionelle entre le grand axe, & le parametre du grand axe.

Pour le cercle, dont l'équation eſt $yy-qy+xx+o$, on trouvera auſſi $y=\frac{1}{2}q$, & la ſubſtitution donnera $x=\frac{1}{2}q$.

Si l'on demandoit la plus grande coupée de l'ellipſe, je rangerois ainſi les termes $xx\ {}^{*}\ -ry=o$, & je comparerois cette équation avec $xx-2ex+ee=o$. Les ſeconds termes ſont $-2ex=o$, $x=o$. Et ſubſtituant cette valeur dans l'équation à l'ellipſe, elle ſe reduit à $-ry+\frac{r}{q}yy=o$; d'où l'on tire 1° $y=o$, 2° $y=q$. Ainſi $x=o$ nous apprend 1° qu'au point A, où $x=o$, nous avons la plus petite coupée $y=o$; 2° qu'au point B, où encore $x=o$, nous avons la plus grande coupée AB, $y=q$. On trouvera la même pour le cercle.

Vous remarquerez, que lorſque l'inconnuë, qui regle les termes dans l'équation, eſt la coupée y, comme dans le premier cas : elle détermine

le point, où ſe trouve la plus grande ou la moindre ordonnée & que le contraire arrive dans le ſecond cas.

2. Que l'équation de la courbe AC ſoit telle que le cube de l'abſciſſe quelconque AG, y, avec le cube de l'appliquée correſpondante GD, x ſoient égaux au parallelepipede ſous $AG \times GD \times a$ ligne donnée. C'eſt donc $y^3 + x^3 = axy$, $y^3 - axy + x^3 = 0$.

Il faut trouver la plus grande appliquée CM. Comparons l'équation avec $y^3 \begin{matrix} -2ey^2 + e^2y \\ +fy^2 - 2efy \end{matrix} + e^2f = 0$. Les ſeconds termes $-2ey^2 + fy^2 = 0$ donnent $f = 2e$. Les troiſiémes ſont $-axy = +e^2y - 2efy$; $-ax = e^2 - 2ef$, ſubſtituons la valeur trouvée de f, nous ferons $-ax = e^2 - 4e^2 = -3e^2$; $x = \frac{3e^2}{a}$. Les derniers ſont $x^3 = e^2f = 2e^3$. Cubons la premiere valeur de $x = \frac{3e^2}{a}$, il viendra $x^3 = \frac{27e^6}{a^3} = 2e^3$; $\frac{27e^3}{a^3} = 2$; dont les racines cubiques ſont $\frac{3e}{a} = \sqrt[3]{2} \cdot e = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2} = y$. La plus grande appliquée CM à nôtre courbe ſera celle qui répond à l'abſciſſe AM, $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$. Mettons pour y ſa valeur & pour y^3 ſa valeur $\frac{2}{27}a^3$. Dans $y^3 - axy + x^3 = 0$; l'on fera $x^3 - \frac{1}{3}a^2x\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3 = 0$, dont la reſolution, telle qu'on la fera, Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. donnera la longueur de CM, x.

Si l'on vouloit la plus grande abſciſſe Ag, l'on ordonneroit ainſi les termes $x^3 - ayx + y^3 = 0$, & l'on trouveroit $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$. Et pour avoir y, on reſoudra l'équation $y^3 - \frac{1}{3}a^2y\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3 = 0$.

3. Il faut trouver FC la moindre ligne droite tirée depuis la ligne Ff parallele à l'axe AB, juſqu'à l'ellipſe ACB. Nommons la diſtance fA, FM, &c. des paralleles a; les appliquées exterieures fD, FC, z, & le reſte comme n. 1. Nous avons $DG = fG - fD$, $a - z = x$.

Mettons pour xx, le quarré $aa - 2az + zz$ dans l'équation à l'ellipſe $yy - qy + \frac{q}{r}xx = 0$; il ſe fait $yy - qy + \frac{q}{r}zz - \frac{2aq}{r}z + \frac{aaq}{r} = 0$, qui ſera comparée avec $yy - 2ey + ee = 0$. Les ſeconds termes $-qy = -2ey$ donnent $e = \frac{1}{2}q = y$. Ainſi la plus courte appliquée CF, eſt celle qui étant prolongée ſe termine au centre M, où l'on a AM, $y = \frac{1}{2}q$. Subſtituons cette valeur de y dans l'équation $yy - qy + \frac{q}{r}zz - \frac{2aq}{r}z + \frac{aaq}{r} = 0$, nous trouverons $z = a - \sqrt{\frac{1}{4}qr} = FC$.

Il eſt aiſé de voir que pour le cercle on aura AM, $y = \frac{1}{2}q$; $z = a - \frac{1}{2}q$.

Si à preſent on veut trouver les plus grandes appliquées exterieures fA, fB à l'ellipſe, on ordonnera ainſi l'équation $zz - 2az + aa - ry + \frac{r}{q}yy = 0$. dont le ſecond terme $-2az$ comparé avec le ſecond terme $-2ez$ de l'équation $zz - 2ez + ee = 0$, donne $z = a$. Ainſi les plus grandes appliquées exterieures ſont fB, fA. Ce qui ſe confirme en mettant a pour z dans l'équation propoſée qui ſe change en $aa - 2aa + aa - ry + \frac{r}{q}yy = 0$, $yy - qy = 0$, dont les deux racines ſont $y = 0$; $y - q = 0$, ou $y = q$. Or y eſt zero au point A, & q au point B.

4. L'équation à la parabole $xx * - py = o$, & $xx - 2ex + ee$ donnent $-2ex = o$, $x = o$; ſubſtituez dans $xx - py = o$, il vient $y = o$. La moindre x & la moindre y ſont au même ſommet de la parabole.

En ordonnant ainſi les termes pour l'hyperbole $yy + qy - \frac{q}{r}xx = o$, les ſeconds termes ſont $+qy = -2ey$, $-y = \frac{1}{2}q$; & la ſubſtitution donne $x = \sqrt{-\frac{1}{4}qr}$ imaginaire. Mais en ordonnant les termes de cette façon $xx * - ry = o$, les ſeconds termes ſont $-2ex = o$, $x = o$; $-\frac{r}{q}yy$ & la ſubſtitution fait $-ry - \frac{r}{q}yy = o$, d'où vous tirez $y = o$, $y = q$. Ainſi à l'un des ſommets vous avez enſemble les moindres x, y; à l'autre vous avez $y = q$ le diametre, $x = o$ une moindre.

5. Diviſer la ligne AD au point F Figure 165. de ſorte que le rectangle des ſegmens $AF \times FD$ ſoit le plus grand de tous les rectangles, qui peuvent ſe faire ſous deux autres ſegmens quelconques de la ligne AB. Fig. 165.

Nommons la ligne AD, a; le ſegment AF, y; le ſegment FD, $a - y$; le plus grand rectangle x. Par l'hypotheſe nous avons $ay - yy = x$, $yy - ay + x = o$. que nous comparerons avec $yy - 2ey + ee = o$. Les ſeconds termes $-ay = -2ey$ donnent $e = \frac{1}{2}a = y = AF$, qui eſt par conſequent la moitié de AD. Mettons cette valeur de y dans $yy - ay + x = o$, il vient $x = \frac{1}{4}aa$. Ce qui prouve que le point F eſt au milieu de AD, & que le plus grand rectangle cherché eſt le quarré de la moitié de AD.

6. On demande maintenant que le parallelepipede ſous le quarré du premier ſegment AF & ſous l'autre ſegment FD ſoit le plus grand de tous les parallelepipedes, qui peuvent ſe former d'une ſemblable maniere en quelqu'autre point, que AD ſoit diviſée.

La ſuppoſition donne $ayy - y^3 = x$; $y^3 - ayy * + x = o$, que $-2eyy + eey$ vous comparerez avec y^3 $+ eef = o$. Des troiſiémes $+ fyy - 2efy$ termes $+eey - 2efy = o$ il vient $f = \frac{1}{2}e$. Dans les derniers $x = eef$ mettez pour f ſa valeur, vous ferez $x = \frac{1}{2}e^3 = \frac{1}{2}y^3$. Subſtituez cette valeur de x à ſa place dans $y^3 - ayy + x = o$ pour avoir $y^3 - ayy + \frac{1}{2}y^3 = o$; $\frac{3}{2}y^3 - ayy = o$, $\frac{3}{2}y = a$, $y = \frac{2}{3}a$. Ce qui marque en quel point il faut couper la donnée AD, & le parallelepipede cherché x eſt $\frac{1}{2}y^3 = \frac{4}{27}a^3$.

7. Il faut couper la ligne AD Fig. 165. en trois parties aux points B, C, de telle ſorte que le triangle BEC fait de ces trois parties ſoit le plus grand qui ſe puiſſe faire des trois parties quelconques de la même ligne. Fig. 165.

Suppoſez la choſe faite & nommez la donnée AD, a; le ſegment AB, $x = BE$, le ſegment BC, y; le ſegment $CD = a - x - y = CE$, s;

FIG. 115. tout le triangle ſoit nommé v, & du ſommet E abbaiſſez la perpendiculaire EF ſur la baſe BC, ſoit $EF = r$; le petit ſegment BF, z; l'autre ſegment $FC = y - z$.

La Géometrie ordinaire nous apprend que le triangle BEC eſt égal au produit de $EF \times \frac{1}{2} BC$, donc $v = \frac{1}{2} ry$; $r = \frac{2v}{y}$.

$\overline{EF}^2$, $rr = \overline{BE}^2 - \overline{BF}^2$, $xx - zz = \overline{EC}^2 - \overline{FC}^2$, $aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + 2yz - zz$. Des deux dernieres équations il reſte $z = \frac{-aa + 2ax + 2ay - 2xy}{2y}$.

Subſtituez cette valeur de z dans $rr = xx - zz$, pour avoir $rr = xx \frac{-a^4 + 4a^3x + 4a^3y - 12aaxy - 4aaxx + 8axxy - 4aayy + 8axyy - 4xxyy}{4yy} = \frac{4vv}{yy}$. Multipliez cette derniere équation par $4yy$, diviſez-la par $8ax - 4aa$, & ordonnez ainſi les termes

$$yy \left| \begin{array}{ll} & -a^4 \\ +4a^3y & +4a^3x \\ -12aaxy & -4aaxx \\ +8axxy & -16vv \end{array} \right| = 0 \text{ qu'il faut comparer avec } yy - 2ey + ee = 0.$$

Les ſeconds termes ſont $\frac{+4a^3y - 12aaxy + 8axxy}{8ax - 4aa} = -2ey$; pour e mettez y, rangez les termes, vous trouverez $8axx - 12aax + 16ayx = 8aay - 4a^3$; $xx - \frac{3}{2}ax + 2yx = ay - \frac{1}{2}aa$, dont les racines ſont $x - \frac{3}{4}a + y = \frac{1}{4}a - y$; $x = a - 2y$.

Subſtituez cette valeur de x 1° dans $s = a - x - y$, cela fait $s = y$, $CD = CB$.

Subſtituez la 2° dans l'équation $\begin{array}{llll} & & & -a^4. \\ 8axyy & +4a^3y & +4a^3x & \\ & -12aaxy & -4aaxx & = 0. \\ -4aayy & +8axxy & -16vv & \end{array}$

Elle ſe reduira à $16ay^3 - 20aayy + 8a^3y - a^4 - 16vv$, que vous diviſerez par $16a$, & il viendra $y^3 - \frac{5}{4}ayy + \frac{1}{2}aay - \frac{a^3}{16} - \frac{vv}{a} = 0$.

Dans cette derniere équation vous ſuppoſerez encore deux racines égales, afin de la comparer avec $y^3 \left| \begin{array}{ll} & -2eyy + eey \\ +fyy & -2efy \end{array} \right| + eef = 0$.

Les ſeconds termes $-\frac{5}{4}ayy = -2eyy + fyy$ donnent $f = 2e - \frac{5}{4}a$.

Dans les troiſiémes $+\frac{1}{2}aay = eey - 2efy$, ou $\frac{1}{2}aa = ee - 2ef$, mettez pour f ſa valeur trouvée, & vous aurez $\frac{1}{2}aa = -3ee + \frac{5}{2}ae$; $yy - \frac{5}{6}ay = -\frac{1}{6}aa$, dont une des racines eſt $-y + \frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a$; $y = \frac{1}{3}a$.

Nous

Nous avons donc $y = \frac{1}{3}a = s$, qui ſera auſſi $\frac{1}{3}a$; & $x = a - 2y = \frac{1}{3}a$. C'eſt pourquoi le triangle équilateral BEC eſt le plus grand triangle cherché. Mettez ces valeurs de x & de y dans $z = \frac{-aa + 2ax + 2ay - xy}{2y}$, vous trouverez $z = \frac{1}{6}a = BF$. Ainſi le point F eſt au milieu de BC & de AD. Vous aurez la valeur de la perpendiculaire EF, r; ſi vous mettez les valeurs de x & de z dans $rr = xx - zz = \frac{1}{12}aa$; donc $r = \sqrt{\frac{1}{12}aa}$. De même vous trouverez la valeur du triangle $BEC = v$, ſi vous mettez les valeurs de r & de y dans $v = \frac{1}{2}ry$, & cette valeur ſera $\frac{1}{12}aa\sqrt{\frac{1}{3}}$. Fig. 166.

On a extrait la racine $-y + \frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a$ de l'équation $yy - \frac{1}{6}ay = -\frac{1}{6}aa$; & l'on ne s'eſt pas ſervi de l'autre racine $y - \frac{5}{12}a = \frac{1}{12}a$; $y = \frac{1}{2}a$, parceque cela ne donneroit pas la diviſion de AD en trois parties comme on le demande, mais ſerviroit plûtôt à trouver le plus petit triangle. Ce qui ſe prouve ainſi.

Mettons $\frac{1}{2}a$ pour y dans $z = \frac{-aa + 2ax + 2ay - 2xy}{2y}$, il viendra $z = x$.

Et l'équation $r = \sqrt{xx - zz}$ ſe change en $r = \sqrt{xx - xx} = 0$. C'eſt-à-dire que la perpendiculaire $EF = r$ eſt nulle, ou infiniment petite.

Il ſuit auſſi que $v = \frac{1}{2}ry$ devient $v = 0$, & que le triangle cherché v eſt nul ou infiniment petit.

Subſtituons enfin zero pour x, $\frac{1}{2}a$ pour y dans $s = a - x - y$, ce ſera $s = \frac{1}{2}a = y$. De ſorte que le triangle le plus petit aura $y = \frac{1}{2}a$ pour un côté, $s = \frac{1}{2}a$ pour le ſecond côté, x nul ou infiniment petit pour le troiſiéme, ou bien le plus petit triangle cherché n'eſt pas poſſible.

8. Vous pouvez appliquer aux nombres ce qui vient de ſe faire pour les lignes.

Qu'il faille diviſer un nombre $16 = a$ en deux parties, de telle ſorte que le produit x de ces deux parties, dont l'une ſoit nommée y, l'autre $a - y$, ſoit le plus grand produit, qui puiſſe ſe faire de la multiplication de deux autres parties quelconques de ce même nombre. Vous ferez ce que vous avez fait n. 5. & vous trouverez $y = \frac{1}{2}a = 8$, &c.

9. On demande entre tous les parallelepipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtez la droite donnée b; celui, qui a la moindre ſurface y. Nommons le ſecond côté x, le troiſiéme z.

Par la ſuppoſition le parallelepipede bxz eſt égal au cube a^3; donc $z = \frac{a^3}{bx}$. De plus tout parallelepipede eſt compoſé de ſix plans, dont les deux oppoſez ſont toûjours égaux. Cherchons à en exprimer trois, qui ſoient oppoſez à trois autres égaux; l'un de ces trois eſt le produit bx du côté b par le côté x; le ſecond eſt le produit $\frac{a^3}{x}$ du côté b par le côté $z = \frac{a^3}{bx}$; le troiſiéme eſt le produit $\frac{a^3}{b}$ du côté x par le côté $z = \frac{a^3}{bx}$. Ces trois plans doublez feront les ſix qui ſont égaux à la ſurface cherchée; & l'équation eſt $2bx + \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^3}{b} = y$, ou $2bbxx + 2a^3b + 2a^3x = bxy$. $xx +$

FIG. 163. $\frac{a^3x}{bb} - \frac{yx}{2b} + \frac{a^3}{b} = o$. que je compare avec $xx - 2ex + ee = o$.

Les derniers termes $\frac{a^3}{b} = ee$, donnent $e = x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$, les ſeconds $\frac{a^3x}{bb} - \frac{yx}{2b} = -2ex$ font $\frac{y}{2b} = \frac{a^3}{bb} + 2e$, & mettant pour e ſa valeur, $\frac{y}{2b} = \frac{a^3}{bb} + 2\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; $y = \frac{2a^3}{b} + 4b\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Mais l'on a $z = \frac{a^3}{bx}$, donc $z = \frac{a^3}{b\sqrt{\frac{a^3}{b}}}$, & $z = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Ainſi $z = x$, & $bxz = a^3$.

10. Il faut obſerver, que dans les cinq derniers Exemples & leurs ſemblables, on trouve la même ſolution ſoit qu'on cherche un plus grand, ſoit qu'on cherche un moindre. Ainſi pour diſtinguer lequel c'eſt des deux qu'on a trouvé, on doit regarder l'équation qu'on a reſoluë, comme exprimant la nature d'une courbe que l'on décrira. Si dans cette conſtruction l'appliquée x, à qui la valeur trouvée de x convient, tombe ſur la concavité de la courbe, on a trouvé un plus grand; ſi elle tombe ſur la convexité, on a trouvé un moindre. Quelques Exemples éclairciront cette Regle.

1°. Il faut déterminer ſi n. 5. on a trouvé un plus grand, ou un plus petit rectangle x. L'équation eſt $ay - yy = x$, & parcequ'on a trouvé $x = \frac{1}{4}aa$, c'eſt un quarré, & l'équation peut ſe changer en $ay - yy = xx$ qui eſt un lieu au cercle, que je peux conſtruire ainſi.

Fig. 163. ſoit AB, a; dont M eſt le milieu: du centre M, de l'intervale MA je décris le demi-cercle AHB; ſes abſciſſes AG, AM, Ag ſont y; ſes appliquées GD, MH, gd, x. Ce cercle eſt le lieu de l'équation $ay - yy = xx$; car à tous les points D l'on a DG, x; AG, y; $GB = AB - AG, a - y$; & par la nature du cercle $AG \times GB = \overline{GD}^2$, $ay - yy = xx$.

Enſuite je cherche l'appliquée, à qui la valeur de $xx = \frac{1}{4}aa$, $x = \frac{1}{2}a$ trouvée n. 5. convient; & je trouve que c'eſt MH appliquée au centre M, dont le quarré $\overline{MH}^2$ eſt le plus grand ou le plus petit rectangle cherché. Mais parceque MH eſt appliquée à la concavité du cercle AHB, je détermine que c'eſt un plus grand rectangle, comme MH eſt la plus grande appliquée.

2°. Il faut fixer, ſi n. 9. on a trouvé une plus grande, ou une moindre ſurface. L'équation eſt $xx + \frac{a^3x}{bb} - \frac{xy}{2b} + \frac{a^3}{b} = o$. Dont vous ferez évanoüir les ſeconds termes, pour la conſtruire. Soit donc $x + \frac{a^3}{2bb} - \frac{y}{4b} = s$; $s - \frac{a^3}{2bb} + \frac{y}{4b} = x$. Subſtituez cette valeur de x à ſa place, & le quarré de cette valeur à la place de xx; la premiere reduite ſera, $ss - \frac{a^6}{4b^4} + \frac{a^3y}{4b^3} - \frac{yy}{16bb} + \frac{a^3}{b} = o$; $\frac{yy}{16bb} - \frac{a^3y}{4b^3} = ss - \frac{a^6}{4b^4} + \frac{a^3}{b}$. Multipliez par $16bb$, vous produirez $yy - \frac{4a^3y}{b} = 16bbss - \frac{4a^6}{bb} + 16a^3b$.

Faites encore $y - \frac{2a^3}{b} = v$, $v + \frac{2a^3}{b} = y$; & par la ſubſtitution vous aurez la ſeconde reduite $vv - 16a^3b = 16bbzz$, lieu à l'hyperbole par ſes diametres, que vous conſtruirez ainſi.

Sur l'infinie AB, Fig. 164. mettez au point A le commencement des y; coupez $AC = \frac{2a^3}{b}$, & les AB étant y, les $CB = AB - AC$ ſeront $y - \frac{2a^3}{b} = v$. Et l'origine des v ſera au point C centre de l'hyperbole. Enſuite prenez $CK = CL = 4a\sqrt{ab}$, LK eſt le diametre déterminé, & K le ſommet de l'hyperbole, dont le diametre LK eſt $8a\sqrt{ab}$, le parametre $\frac{a}{2bb}\sqrt{ab}$, les appliquées perpendiculaires ſur AB : ainſi l'on peut décrire l'hyperbole KH. Fig. 164.

Maintenant faites $AF = 4b$, au point F élevez la perpendiculaire $EF = 1$; & par les points E, A tirez l'infinie EAD, à cauſe des triangles AFE, ABD équiangles, AF, $4b$: FE, 1:: AB, y: BD, $\frac{y}{4b}$. Coupez encore $DG = \frac{a^3}{2bb}$, menez Gg parallele à DE, & nommez GH, x. Vous aurez $BH = DG + GH - DB = \frac{a^3}{2bb} + x - \frac{y}{2b} = s$. Je dis que l'hyperbole KH eſt le lieu de l'équation propoſée.

Car LB eſt $CB + CL$, $v + 4a\sqrt{ab}$; KB eſt $CB - CK$, $v - 4a\sqrt{ab}$. Or par la nature de l'hyperbole, comme le diametre $8a\sqrt{ab}$ eſt au parametre $\frac{a}{2bb}\sqrt{ab}$: de même le rectangle $LB \times BK$, $vv - 16a^3b$ eſt au quarré $\overline{BH}^2$, zz. donc $8azz\sqrt{ab} = \frac{a}{2bb}vv\sqrt{ab} - \frac{8a^4}{b}\sqrt{ab}$, multipliez par $2bb$, diviſez par $a\sqrt{ab}$, vous ferez $16bbzz = vv - 16a^3b$. Subſtituez par zz & vv leurs valeurs, & vous referez l'équation propoſée $xx + \frac{a^3x}{bb} - \frac{yx}{2b} + \frac{a^3}{b} = 0$.

Après cela par le point A menez l'infinie Aa parallele aux appliquées interieures HB de l'hyperbole HK, & concevez une infinité d'appliquées exterieures AK, aN tirées depuis la droite Aa juſqu'à la convexité de l'hyperbole; & que toutes ces appliquées ſoient paralleles à la ligne AK, elles repreſenteront toutes les y, qui peuvent ſe prendre ſur AB, & aN par exemple répondra à AB, de ſorte que ce que nous avons démontré de AB convient à aN qui lui eſt égale. De plus AK, y eſt ici $AC + CK$, $= \frac{2a^3}{b} + 4a\sqrt{ab}$, $y = \frac{2a^3}{b} + 4b\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ comme on l'a trouvé n. 9.

Donc l'appliquée exterieure AK a les conditions neceſſaires pour repreſenter la ſuperficie cherchée y de n. 9. & parceque AK eſt terminée à la convexité de l'hyperbole KH, elle eſt une moindre quantité, ou la moindre ſuperficie.

3° On veut ſavoir ſi n. 7. on a trouvé un plus grand, ou un moindre triangle $v = \frac{1}{6}aa\sqrt{\frac{1}{12}}$. Parceque $x = y$, je mets x pour y dans

l'équation $8axyy + 4a^3y - a^4 - 4aayy - 12aaxy + 4a^3x + 8axxy - 4aaxx - 16vv = 0$ & elle se reduit à

$16vv = 16ax^3 - 20a^2xx + 8a^3x - a^4$; $vv = ax^3 - \frac{5}{4}a^2xx + \frac{1}{2}a^3x - \frac{1}{16}a^4$.

Et suivant la Methode de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. je décris une courbe, dont les x sont les abscisses, & les v les appliquées : & je trouve que l'appliquée $v = \frac{1}{6}aa\sqrt{\frac{1}{12}}$ qui répond à $x = \frac{1}{3}a$, tombe sur la concavité de la courbe. D'où je conclus, que le triangle cherché est un plus grand.

On découvrira aussi par cette courbe, que v est zero, lorsque x est $\frac{1}{2}a$, car alors les deux branches de la courbe coupent l'axe, en un même point, où elles font ce qu'on appelle un nœud : d'où l'on conclut que x étant $\frac{1}{2}a$, le triangle cherché est nul, ou infiniment petit.

ARTICLE VI.

De la construction des tangentes.

M. DESCARTES.

Exemple de la construction de ce Problème en la Conchoïde. FIG. 155.

JE n'ajoûte point les constructions, par lesquelles on peut décrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, ensuite du calcul que je viens d'expliquer, à cause qu'il est toûjours aisé de les trouver : bien que souvent on ait besoin d'un peu d'adresse pour les rendre courtes & simples.

Comme par exemple si DC, Fig. 155. est la premiere conchoïde des Anciens, dont A soit le pole, & BH la Regle : en sorte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, & sont comprises entre la courbe CD, & la droite BH, comme DB, CE, soient égales : & qu'on veüille trouver la ligne CG qui la coupe au point C à angles droits. On pourroit en cherchant dans la ligne BH, le point par où cette ligne CG doit passer selon la Methode ici expliquée, s'engager dans un calcul autant ou plus long qu'aucun des

precedens. Et toutesfois la conſtruction, qui devroit après en être deduite, eſt fort ſimple. Car il ne faut que prendre CF en la ligne droite CA, & la faire égale à CH, qui eſt perpendiculaire ſur HB: puis du point F tirer FG, parallele à BA, & égale à EA. Au moyen dequoi on a le point G, par lequel doit paſſer CG la ligne cherchée.

La conſtruction des tangentes, le point C étant donné, dépend de la valeur trouvée de AP, Fig. 151. comme on a vû Art. 3. où le point P étant donné ſur l'axe, Fig. 156. ou ailleurs, Fig. 157. cette conſtruction dépend de la valeur connuë de PG, Fig. 156. & de AG, Fig. 157.

On a déterminé par le calcul Art. 3. n. 4. le point P, Fig. 155. d'où l'on doit tirer PC ſur le point donné C de la conchoïde à angles droits; de ſorte que la perpendiculaire, que l'on meneroit ſur PC par le point C, ſeroit tangente de la Conchoïde au point C. Et l'on a trouvé $BP = v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$, étant BD, $a = CE$; BA, b; MB, $y = CH$.

Il reſte à faire voir ici, que ſi, comme M. DESCARTES l'aſſure, on coupe ſur CA le ſegment CF égal à CH, y; & que du point F on tire FG parallele à BA & égale à EA; la droite CGP menée par les points C, G, coupe à angles droits la conchoïde DC, c'eſt-à-dire, que la droite CGP coupe l'axe AB au point P, de ſorte que BP ſoit $v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. Par le point E menez EI parallele à AB, & par le point I, IK parallele à EA.

A cauſe des paralleles AB, CH, les triangles EBA, EHC ſont équiangles; & donnent cette analogie $CH, y : CE, a :: AB, b ; EA, \frac{ab}{y} = IK = FG$ ſupp. les lignes FG, EI, qui ſont paralleles à AB, ſont paralleles entr'elles; les triangles CFG, CEI ſont équiangles, & l'on a cette proportion $CF, y : FG, \frac{ab}{y} :: CE, a : EI, \frac{aab}{yy} = AK$.

Les triangles CFG, IKP équiangles à cauſe des paralleles EA, IK, fourniſſent cette proportion, $CF, y : FG, \frac{ab}{y} :: IK, \frac{ab}{y} : KP, \frac{aabb}{y^3}$.

Ainſi la ligne $BP = BA + AK + KP$ eſt $b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3} = v$.

ARTICLE VII.

Autres manieres de tirer les Tangentes des Courbes.

§. I.

CEtte Methode obſerve, que la ligne PF, Fig. 156. qui coupe une courbe en deux endroits differens E, F, détermine deux appliquées inégales ED, FH, & deux coupées auſſi inégales AD, AH; que la même Fig. 156.

FIG. 156. PF, à meſure qu'on l'approchera de C déterminera toûjours deux autres appliquées & deux autres coupées inégales ; mais de telle ſorte que les points E, F ; D, H s'approcheront toûjours plus des points C, G ; les appliquées ED, FH, de l'appliquée GC, & que HD difference des coupées deviendra toûjours moindre : qu'enfin lorſque la même PF ſera la tangente PC, les points E, F tomberont en C, les points D, H en G, les appliquées ED, HF ſe confondront avec CG, & la difference DH des lignes PD, PH ſera nulle ou égale à zero. C'eſt pourquoi dans la derniere équation, lorſque toutes les diviſions & les autres operations auront été faites, on rejettera encore les termes, où la valeur de DH ſe trouvera, comme nuls, parcequ'ils ſont multipliez par zero.

Maintenant nommons PD, s ; DH, v ; AD, x ; DE, y ; $PH = PD + DH$, $s + v$; $AH = AD + DH$, $x + v$. Et dans les triangles PDE, PHF, 29. 1. Eucl. équiangles à cauſes des paralleles ED, FH, nous avons PD, s : DE, y :: PH, $s + v$: HF, $\frac{sy + vy}{s}$.

1. Suppoſons que la courbe ACF eſt une parabole ordinaire, dont le parametre eſt p. Par la nature de cette courbe on a au point E, $p = \frac{yy}{x}$; & au point F, $p = \frac{fyy + 2fvyy + vvyy}{ffx + ffv} = \frac{yy}{x}$; $ff = 2fx + vx$; rejettons le terme, où v ſe trouve, afin de faire $ff = 2fx$, $f = 2x$. Or lorſque PF devient la tangente PC, la droite PD devient PG, donc PG, $f = 2x$. Ce qui détermine le point G, lorſque le point P eſt donné ; & l'appliquée GC détermine le point C, & PC eſt la tangente, en remarquant qu'à preſent AG eſt x. Mais ſi c'étoit le point C qui fût donné, nous couperions $PA = AG$ qui eſt maintenant x, & PG ſeroit $2x = f$.

2. Que la courbe AC ſoit une hyperbole, dont le diametre déterminé eſt a, le parametre p. Par la nature de l'hyperbole vous avez au point E, $ayy = apx + pxx$; $\frac{a}{p} = \frac{ax + xx}{yy}$. Au point F, vous avez auſſi $\frac{affyy + 2afvyy + avvyy}{ffyy + 2fvyy + vvyy} = apx + pxx + 2pvx + apv + pvv$ d'où ſe forme $\frac{a}{p} = \frac{affx + affxx + 2ffvx + affv + ffvv}{ffyy + 2fvyy + vvyy} = \frac{ax + xx}{yy}$; d'où ſe formera encore $f = \frac{2ax + 2xx}{2x + a}$, qui eſt maintenant PG, parceque AG, eſt x. C'eſt pourquoi ſi le point C eſt donné, AG, x ſera connuë, & l'on déterminera aiſément PG. Que ſi c'étoit le point P, qui fût donné, vous connoîtriez PA, que vous nommeriez b, & vous auriez $AG = PG - AP$, $x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} - b$; $x = \frac{ab}{a - 2b} = AG$. Ce qui fait connoître le point G, & enſuite le point C, en appliquant CG au point G.

3. La courbe AC eſt une premiere parabole cubique, au point E on aura donc $aa = \frac{y^3}{x}$ & au point F, $aa = \frac{s^3y^3 + 3ffvy^3 + 3fvvy^3 + v^3y^3}{s^3x + s^3v} = \frac{y^3}{x}$ d'où vous formerez $f = 3x$, qui eſt à preſent PG.

On peut dans la ſuite du calcul, pour en diminuer la difficulté, rejetter les termes où vv, v^3, &c. ſe trouvent ; parcequ'il eſt ſur, qu'il reſteroit toûjours un v dans ces termes après toutes les diviſions.

4. Cette Methode ſert à trouver les *maxima* & *minima*. Après avoir ſuppoſé ce qu'on a expliqué Art. 5. au commencement de §. 2. Fig. 163. & après avoir remarqué que la difference Gg des abſciſſes AG, Ag eſt nulle, lorſque les deux appliquées égales DG, dg ſe confondent avec CM: je nomme AG, x; Gg, v; Ag, $x+v$; la donnée AB, a; $GB = a - x$; $gB = a - x - v$; DG, $y = dg$. Fig. 163.

Si la courbe ACB eſt un cercle, j'ai au point D, $yy = ax - xx$: & au point d, $yy = ax - xx - 2vx + av - vv = ax - xx$, $x = \frac{1}{2}a$. C'eſt AM qui eſt maintenant x, ainſi AM eſt le rayon, & l'appliquée MC tirée par le centre M eſt la plus grande appliquée.

Si la courbe ACB eſt une ellipſe, par ſa nature vous avez au point D, $\frac{a}{p}yy = ax - xx$; vous aurez au point d, $\frac{a}{p}yy = ax - xx - 2vx + av - vv = ax - xx$, & le reſte comme dans le cercle.

§. II.

Une autre Methode multiplie de la maniere, que les Exemples expliqueront, une équation, qui a deux racines égales, par une progreſſion arithmetique quelconque; celle qui en a trois égales, par deux progreſſions arithmetiques quelconques, &c. & la nouvelle équation qui en reſulte, contient une des deux, ou des trois racines égales; & cette racine ſe trouve en égalant entr'eux les termes de la nouvelle équation. Parmi les differentes progreſſions arithmetiques, on en choiſit une, où zero ſe trouve, afin qu'il y ait plus de facilité à reſoudre la nouvelle équation, laquelle aura un terme de moins que la propoſée, & lorſqu'il y a quelque lettre dans l'équation propoſée qui embarraſſe dans le deſſein qu'on a, de découvrir la valeur de certaine autre lettre, on prend une progreſſion dans laquelle zero ſoit placé ſous le terme, qui contient la lettre, qui embarraſſe. Après avoir appliqué une ou deux progreſſions en même tems, pour connoître une quantité de l'équation propoſée; on peut encore en appliquer une ou deux autres differentes des premieres, ſous la même propoſée; pour découvrir la valeur d'une autre quantité; & ainſi de ſuite. Les Exemples éclairciront cette Methode. La progreſſion arithmetique dont zero eſt un terme, va en croiſſant & en décroiſſant de cette maniere $+4 + 3 + 2 + 1 . 0 . - 1 - 2 - 3 - 4$. de ſorte que les grandeurs poſitives precedent zero, & vont en diminuant; les negatives ſuivent zero & vont en augmentant. ou au contraire.

1. Soit propoſée l'équation à l'ellipſe $\frac{q}{r}xx - qy + yy = 0$, dont q eſt le diametre r le parametre, y la coupée, x l'ordonnée.

$$\begin{array}{r} \frac{q}{r}xx - qy + yy = 0 \\ 0 \quad - 1 \quad - 2 \ . \\ \hline * + qy - 2yy = 0 \end{array}$$

On cherche ſa plus grande ordonnée, & par conſequent l'équation pro-

FIG. 156. poſée a deux racines égales. Si je veux connoître la valeur de x, j'applique la progreſſion arithmetique $0 - 1 - 2$, afin que zero ſoit ſous $\frac{q}{r}xx$; je multiplie la propoſée par la progreſſion, chaque terme par chaque terme ſeulement qui lui répond: le produit eſt $qy - 2yy = 0$. $y = \frac{1}{2}q$. Comme Art. 5. §. 2. n. 1.

Multipliez la même équation par une autre progreſſion $+1 \quad 0 - 1$; le produit eſt $\frac{q}{r}xx - yy = 0$; $yy = \frac{q}{r}xx$. Subſtituez cette valeur de $\frac{q}{r}xx$ à ſa place dans la propoſée, vous aurez $yy - qy + yy = 0$; $2yy - qy$; $y = \frac{1}{2}q$. Comme auparavant.

$$\begin{array}{r} \frac{q}{r}xx - qy + yy = 0 \\ +1 \quad 0 \quad -1. \\ \hline +\frac{q}{r}xx * - yy = 0. \end{array}$$

Multipliez la même propoſée par la progreſſion $+3 + 2 + 1$. le produit eſt $\frac{3q}{r}xx - 2qy + yy = 0$, diviſez par 3,

$$\begin{array}{r} \frac{q}{r}xx - qy + yy = 0 \\ +3 \quad +2 \quad +1 \\ \hline \frac{3q}{r}xx - 2qy + yy = 0. \end{array}$$

vous aurez $\frac{q}{r}xx - \frac{2}{3}qy + \frac{1}{3}yy = 0$; $\frac{q}{r}xx = \frac{2}{3}qy - \frac{1}{3}yy$. Mettez cette valeur de $\frac{q}{r}xx$ à ſa place dans la propoſée; il vient $\frac{2}{3}qy - \frac{1}{3}yy - qy + yy = 0$; $-\frac{1}{3}qy + \frac{2}{3}yy = 0$; $\frac{2}{3}y = \frac{1}{3}q$, $y = \frac{1}{2}q$.

Il eſt certain, que quelques progreſſions arithmetiques demandent un plus grand calcul que d'autres.

Quand même les lettres de l'équation propoſée ſeroient autrement diſpoſées, l'operation réuſſiroit:

$$\begin{array}{r} xx - ry + \frac{r}{q}yy = 0 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \\ \hline +ry - \frac{2r}{q}yy = 0. \end{array}$$

au lieu de $\frac{q}{r}xx - qy + yy = 0$, propoſez $xx - ry + \frac{r}{q}yy = 0$, qui eſt la même que la precedente, après qu'elle a été multipliée par r, & diviſée par q. Multipliez cette nouvelle équation par la progreſſion $0 - 1 - 2$, le produit eſt $+ry - \frac{2r}{q}yy = 0$; $y = \frac{1}{2}q$.

2. Soit propoſée l'équation de Art. 5. §. 1. n. 4. $y^3 - 2ayy - \frac{as}{r}yy - aay - asy + 2a^3 = 0$.

$$\begin{array}{r} y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = 0. \\ \quad - \frac{as}{r}yy - asy \\ \hline +1 \quad 0 \quad - \quad -2 \\ \hline 3y^3 \quad * \quad * \quad +4a^3 = 0 \end{array}$$

Parcequ'il s'agit de trouver un point d'inflexion, il y a trois racines égales, & vous en multiplierez chaque terme, par le terme de deux progreſſions arithmetiques qui ſont ſous lui, par exemple ici y^3 ſera multiplié par $+1$ de la premiere progreſſion, & par $+2$ de la ſeconde, après que 1 & 2 ſe ſont multipliez. Le produit eſt $2y^3 + 4a^3 = 0$; $y^3 + 2a^3 = 0$; $-y^3 = 2a^3$; $-y = \sqrt[3]{2a^3}$. Comme dans l'endroit cité.

FIG. 156.

$$y^3 x * - \frac{aasy}{r} + aas = 0.$$

3. Soit propoſée l'équation de Art. 5. §. 1. n. 2. $y^3 * - \frac{aasy}{r} + aas = 0$. parcequ'il faut trouver un point d'inflexion, je me ſers de deux progreſſions arithmetiques, dont je mets un des termes ſous le ſecond terme de la propoſée, quoiqu'il ſoit nul, & parceque c'eſt s que je veux d'abord connoître, je mets zero ſous le terme, où r ſe trouve, le produit $2y^3 + 2aas = 0$, $s = \frac{-y^3}{aa}$.

2	1	0	— 1	
+ 1	0	— 1	— 2	
$+ 2y^3$	*	*	$+ 2aas = 0$	

$$y^3 * - \frac{aasy}{r} + aas = 0.$$

Enſuite pour connoître r je me ſers de deux autres progreſſions arithmetiques de la maniere, que vous voyez.

0	— 1	— 2	— 3
1	0	— 1	— 2
*	*	$- \frac{2aasy}{r} + 6aas = 0.$	

Le produit eſt $= \frac{2aasy}{r} + 6aas = 0$, $+ 2aay = 6aar$; $r = \frac{1}{3}y$. Après cela on ſubſtituë la valeur de s & r dans $y^3 * = \frac{aasy}{r} + aas = 0$, & l'on fait $y^3 + 3y^3 - y^3 = 0$; $3y^3 = 0$; $y = \frac{0}{3}$, comme dans l'endroit cité.

PARTIE QUATRIE'ME.

De quelques Figures de verres, qui ſervent à la reflexion & à la refraction de la lumiere.

M. DESCARTES explique en premier lieu la nature & les effets de quatre genres d'ovales, qu'il a inventées; en ſecond lieu il vient à la figure qu'il faut donner aux verres, qui réüniſſent à un point donné les rayons, qui viennent d'un autre point donné.

Les choſes qu'il nous faut expliquer, ſont celles-ci. 1° La reflexion & la refraction de la lumiere en peu de mots. 2° La deſcription des quatre ſortes d'ovales. 3° Leurs proprietez par rapport à la reflexion & à la refraction de la lumiere, & la démonſtration de ces proprietez. 4° Quelles proprietez le cercle, la parabole, l'ellipſe, & l'hyperbole ont par rapport à la reflexion & à la refraction de la lumiere. 5° La Figure qu'il faut donner aux verres, afin qu'ils réüniſſent à un point donné les rayons, qui viennent d'un autre point donné. Ce ſera la matiere de cinq Sections.

SECTION I.

De la reflexion & de la refraction de la lumiere.

LOrſque le rayon de lumiere AC tombe obliquement ſur un corps opaque & poli DCE, Fig. 166. & GCH, Fig. 167. 168. il ne continuë pas ſon chemin par la ligne CK; mais il revient, & ſe reflechit par la ligne CB. Menez par le point C, Fig. 167. 168. la tangente DCE. Au point C dans les trois Figures élevez CF perpendiculaire à DCE. Dans toutes, AC eſt le rayon d'incidence, CB le rayon de reflexion ou le rayon reflechi, C le point d'incidence & de reflexion, ACD l'angle d'incidence, BCE l'angle de reflexion, ACF l'angle d'inclinaiſon qui eſt compris par le rayon d'incidence AC & par la perpendiculaire CF, FCB l'angle reflechi compris par le rayon reflechi CB & par la perpendiculaire CF. On démontre dans la Catoptrique, que toûjours l'angle d'incidence ACD eſt égal à l'angle de reflexion BCE: de ſorte que ſi le rayon d'incidence FC eſt perpendiculaire ſur les plans reflechiſſans DCE des trois Figures, il s'en retourne par le même chemin CF, qui ſera encore le rayon de reflexion; & alors les angles FCD, FCE, qui peuvent être également appellez angles d'incidence ou de reflexion, étant droits, ſont égaux, & il n'y a point d'angle d'inclinaiſon. Au reſte on meſure les angles d'incidence, de reflexion, d'inclinaiſon ſur les lignes & ſur les ſurfaces courbes, GCH, Fig. 167. 168. comme ſi le rayon d'incidence tomboit ſur la ligne droite ou ſur le plan DCE, Fig. 167. 168. qui touche la courbe au point d'incidence C. Voyez Part. 3. Sect. 2. au commencement.

FIG. 166. 167. 168.

Lorſque un rayon de lumiere AC tombe obliquement ſur un corps tranſparent & poli DCE, Fig. 169. & GCH, Fig. 170. 171. qui lui donne un paſſage plus ou moins libre, que le corps tranſparent DAF d'où il vient; alors il ne continuë pas ſon chemin par la ligne CK; mais il ſe rompt, & traverſe le corps DCI, en ſuivant la ligne CB, ou la ligne CI, & c'eſt ce qu'on appelle refraction. Par le point C, Fig. 170. 171. menez la tangente DCE, (car on meſure auſſi la refraction faite ſur une ſurface courbe, comme ſi elle ſe faiſoit ſur la ligne ou la ſurface plane, qui touche la courbe.) Et au point C des trois Figures élevez FCL perpendiculaire à la droite DCE. AC eſt le rayon d'incidence, CK le rayon d'incidence prolongé, C le point d'incidence ou de refraction, CB ou CI le rayon rompu, FC la perpendiculaire d'incidence, CL, qui eſt FC prolongée, la perpendiculaire de refraction; ACF eſt l'angle d'inclinaiſon, qu'on appelle auſſi quelquefois angle d'incidence, ACD l'angle d'incidence, KCB ou KCI compris par le rayon d'incidence prolongé CK & par le rayon

FIG. 169. 170. 171.

rompu *CB* ou *CI* eſt l'angle de refraction, l'angle *BCL* ou *ICL* compris par la perpendiculaire de refraction *CL* & par le rayon rompu *CB* ou *CI* eſt l'angle rompu, que l'on nomme auſſi quelquefois l'angle de refraction.

Lorſque le rayon *AC* trouve un paſſage plus aiſé dans le corps où il entre, qu'il ne l'avoit dans le corps d'où il ſort; la refraction ſe fait en s'approchant de la perpendiculaire *CL*, par la ligne *CB* par exemple, qui eſt plus près de la perpendiculaire de refraction *CL*, que n'eſt le rayon d'incidence prolongé *CK*. Mais lorſque le rayon *AC* paſſe moins librement dans le corps où il entre, qu'il n'avoit fait dans celui d'où il ſort; la refraction ſe fait en s'éloignant de la perpendiculaire *CL*, par exemple dans la ligne *CI*, qui en eſt plus éloignée, que le rayon d'incidence prolongé *CK*.

Le rayon qui paſſe de l'air dans l'eau ou dans le verre, ſe rompt en s'approchant de la perpendiculaire; au contraire le rayon qui ſort de l'eau ou du verre pour entrer dans l'air, ſe rompt en s'éloignant de la perpendiculaire. C'eſt ce que l'experience apprend.

Differens angles d'inclinaiſon *ACF* & differens angles d'incidence *ACD*, ont differens angles de refraction & differens angles rompus.

Les angles d'incidence & de refraction correſpondans ne ſont pas égaux entr'eux, & leurs ſinus ne gardent pas une proportion conſtante. Il en eſt de même des angles d'incidence & des angles rompus, des angles d'inclinaiſon & des angles de refraction. Mais l'experience a fait connoître que les ſinus des angles d'inclinaiſon ont une proportion conſtamment la même avec les ſinus des angles rompus correſpondans, ainſi que M. DESCARTES l'aſſure dans ſa Dioptrique, Diſcours 2. Soit Fig. 172. *DAF* de l'air, *DCB* du verre, *DCE* leur ſurface commune; *ACF* un angle d'inclinaiſon dont *AF* eſt le ſinus, *BCL* l'angle rompu correſpondant, dont *BL* eſt le ſinus: *aCf* un autre angle d'inclinaiſon dont *af* eſt le ſinus, *bCl* l'angle rompu correſpondant dont *lb* eſt le ſinus: on a cette analogie *AF: BL:: af: bl.* L'experience a appris que la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de ſon angle rompu eſt à peu près comme *3* à *2*, lorſque le rayon entre de l'air dans le verre; & qu'elle eſt fort près de *4* à *3*, lorſque le rayon entre de l'air dans l'eau. De plus la refraction qui ſe fait dans deux milieux, eſt reciproque, c'eſt-à-dire, que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de ſon angle rompu, comme *2* à *3*, lorſque le rayon ſort du verre pour entrer dans l'air; & comme *3* à *4*, lorſqu'il paſſe de l'eau dans l'air. Il faut obſerver que le rayon d'incidence *FC* perpendiculaire ſur *DCE* dans ces quatre dernieres Figures ne ſe rompt point, mais qu'il continuë ſon chemin par la même ligne *CL*; de plus que l'angle rompu *BCL* ou *ICL* eſt appellé par quelques Auteurs angle de refraction. Fig. 172.

Soit *ABCDA*, Fig. 173. du verre, dont *ABC* eſt une ſurface conve-

FIG. 173. xe, *ADC* une concave, qui ſont toutes deux entourées de l'air. Soit encore *G* le centre de la convexité circulaire *ABC*, *L* le centre de la concavité circulaire *ADC*, *GL* le diametre des deux cercles. Soit enfin *EB* un rayon parallele au diametre *GL*, & qui tombe ſur la convexité *ABC*. Il faut examiner ce qui arrive à ce rayon, lorſqu'il entre dans le verre, ou lorſqu'il en ſort. Comme il entre de l'air dans le verre au point *B*, par ce point je mene la tangente *IBK*, & la ligne *HBG*, qui ſera perpendiculaire à *IK*, & la perpendiculaire d'incidence & de refraction. L'angle *EBH* eſt l'angle d'inclinaiſon du rayon *EB*. Ce rayon tombe obliquement ſur la touchante *IK*, ou ſur la convexité *ABC*, ainſi il ne continuera pas ſon chemin vers *F*: mais il ſe rompra en s'approchant de la perpendiculaire *BG*, & ira dans le verre par la ligne *BN*, ſi le ſinus de l'angle d'inclinaiſon *EBH* eſt au ſinus de l'angle rompu *GBN*, comme *3* à *2*. Maintenant par le point *N* je mene *PNQ* touchante du cercle *ADC* au point *N*, & la ligne *MNL* perpendiculaire ſur *PNQ* ou ſur la concavité *ANC*; cette ligne *MNL* eſt la perpendiculaire d'incidence & de refraction pour le point *N*. L'angle *BNM* eſt l'angle d'inclinaiſon du rayon *BN*. Ce rayon ne ſortira pas du verre dans l'air par la droite *NR*; mais il s'écartera de la perpendiculaire *NL*, & il ira par la ligne *NS*; ſi le ſinus de l'angle d'inclinaiſon *BNM* eſt au ſinus de l'angle rompu *SNL*, comme *2* à *3*.

Reciproquement le rayon *SN* ſe rompra en *NB* s'il entre de l'air *ALD* dans le verre, & *BN* ſe rompra en *BE* s'il ſort du verre dans l'air *HBK*.

On conſidere ici trois ſortes de rayons; les paralleles, les convergents & les divergents. Les convergents ſont ceux, qui s'approchent les uns des autres; comme *AC*, *FC*, *BC*, Fig. 166. s'ils viennent des points *A*, *F*, *B*. Les divergents ſont ceux, qui s'éloignent les uns des autres; comme les mêmes *CA*, *CF*, *CB*, lorſqu'ils viennent du même point *C*.

SECTION II.

La deſcription des quatre Genres d'Ovales.

I. M. DESCARTES.

Explication de quatre nouveaux genres d'ovales.

AU reſte afin que vous ſachiez que la conſideration des lignes courbes ici propoſées n'eſt pas ſans uſage, & qu'elles ont diverſes proprietez, qui ne cedent en rien à celles des Sections coniques, je veux encore ajoûter ici l'explication de certaines Ova-

les, que vous verrez être très-utile pour la Theorie de la Catoptrique & de la Dioptrique. Voici la façon dont je les décris. *qui servent à l'optique.*

Premierement ayant tiré les lignes droites *FA*, *AR*, Fig. 174. qui s'entrecoupent au point *A*, ſans qu'il importe à quels angles, je prends en l'une le point *F* à diſcretion, c'eſt-à-dire plus ou moins éloigné du point *A* ſelon que je veux faire ces ovales plus ou moins grandes, & de ce point *F* comme centre, je décris un cercle, qui paſſe quelque peu au delà du point *A*, comme par le point 5; puis de ce point 5 je tire la ligne droite 5, 6, qui coupe l'autre au point 6, en ſorte que *A* 6 ſoit moindre que *A* 5, ſelon telle proportion donnée qu'on veut, à ſavoir ſelon celle qui meſure les refractions, ſi on s'en veut ſervir pour la Dioptrique. Fig. 174.

Après cela je prends auſſi le point *G* en la ligne *FA*, du côté où eſt le point 5 à diſcretion, c'eſt-à-dire en faiſant, que les lignes *AF*, & *GA* ont entr'elles telle proportion donnée qu'on veut. Puis je fais *RA* égale à *GA* en la ligne *A* 6, & du centre *G* décrivant un cercle, dont le rayon ſoit égal à *R* 6, il coupe l'autre cercle de part & d'autre au point 1, qui eſt l'un de ceux, par où doit paſſer la premiere des Ovales cherchées. Puis dérechef du centre *F* je décris un cercle, qui paſſe un peu au deça ou au delà du point 5, comme par le point 7, & ayant tiré la ligne droite 7 8 parallele à 5 6, du centre *G* je décris un autre cercle, dont le rayon eſt égal à la ligne *R* 8; & ce cercle coupe celui qui paſſe par le point 7 au point 1, qui eſt encore l'un de ceux de la même Ovale.

Pour la ſeconde Ovale il n'y a point de difference, ſinon qu'au lieu de *AR*, Fig. 175. il faut de l'autre côté du poins *A* prendre *AS* égal à *AG*, & que le rayon du cercle décrit du centre *G*, pour couper celui qui eſt décrit du centre *F*, & qui paſſe par le point 5, ſoit égal à la ligne *S* 6; ou qu'il ſoit égal à *S* 8, ſi c'eſt pour couper celui qui paſſe par le point 7; & ainſi des autres. Au moyen de quoi ces cercles s'entrecoupent aux points marquez 2, 2, qui ſont ceux de cette ſeconde Ovale *A* 2 *X*. Fig. 175.

Pour la troiſiéme & la quatriéme Fig. 176. 177. au lieu de la Fig. 176. 177.

ligne AG, il faut prendre AH de l'autre côté du point A, à ſavoir du même qu'eſt le point F. Et il y a ici de plus à obſerver, que cette ligne AH doit être plus grande que AF, laquelle peut même être nulle, en ſorte que le point F ſe rencontre où eſt le point A en la deſcription de toutes ces Ovales.

Après cela les lignes AR & AS étant égales à AH; pour décrire la troiſiéme Ovale $A37$, je fais un cercle du centre H, dont le rayon eſt égal à $S6$, qui coupe au point 3 celui du centre F, qui paſſe par le point 5; & un autre dont le rayon eſt égal à $S8$, qui coupe celui qui paſſe par le point 7, au point auſſi marqué 3; & ainſi des autres. Enfin pour la derniere Ovale je fais des cercles du centre H, dont les rayons ſont égaux aux lignes $R6$, $R8$, & ſemblables, qui coupent les autres courbes aux points marquez 4.

La deſcription que M. DESCARTES donne des quatre genres d'Ovales eſt aiſée à ſuivre, & ſe reduit à ceci.

1° Dans les quatre genres d'ovales les lignes AF, AR, ou AF, AS ſe coupent à tels angles qu'on veut au point A. Le point F peut être le même que le point A, ou en être éloigné autant que l'on veut; plus il en ſera éloigné, plus grandes ſeront les ovales. La ligne $A5$ eſt plus grande que la ligne $A6$ ſelon la raiſon qu'on veut; mais lorſqu'il s'agit de faire des verres pour la refraction de la lumiere, la proportion de $A5$ à $A6$ eſt à peu près comme 3 à 2, telle qu'eſt la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui paſſe de l'air dans le verre. M. DESCARTES la mettra comme d à e.

2° Dans les deux premiers genres d'Ovales, ſi le point A n'eſt pas le même que le point F, il eſt entre F & G; la raiſon de AF à AG eſt telle qu'on veut. Dans les deux derniers genres d'ovales, ſi le point F n'eſt pas le même que le point A, il eſt entre A & H, & la raiſon de AF à AH eſt telle qu'on veut.

3° Dans le premier genre d'Ovales AR eſt égale à AG, & le point R eſt pris du même côté, par rapport au point A, que ſont les points 6, 8. Dans le ſecond genre d'Ovales AS eſt égale à AG, & le point S eſt pris de l'autre côté, par rapport au point A, que celui, où l'on prend les points 6, 8. Dans le troiſiéme AS eſt égale à AH, & le point S eſt pris de l'autre côté, par rapport au point A, que celui, où l'on prend les points 6, 8. Dans le quatriéme AR eſt égale à AH, & le point R eſt pris du même côté, par rapport au point A, que l'on prend les points 6, 8.

4° Dans toutes ces ſortes d'Ovales on décrit differens cercles du point *F* comme centre, qui coupent tous la ligne *AF* au delà du point *A*.

Que le premier cercle la coupe au point 5 ; de ce point l'on tire la ligne 5 6 ſur *AR* ou *AS*. Enſuite pour le premier & dernier genre d'Ovales on ouvre ſon compas de la longueur de *R 6*, pour le ſecond & troiſiéme de la longueur de *S 6* : & du point *G* comme centre pour les deux premiers genres, ou du point *H* pour les deux derniers, avec cette ouverture de compas on décrit un cercle qui coupe le precedent de part & d'autre de la ligne *FA* en deux points, qui appartiennent à l'Ovale qu'on décrit. Ces deux points ſont *1*, *1*, Fig. 174. *2*, *2*, Fig. 175. *3*, *3*, Fig. 176. *4*, *4*, Fig. 177.

On décrit encore un nouveau cercle du centre *F*, qui coupe *AF* en un autre point *7* ; on mene la ligne *7 8* parallele à *5 6*. Enſuite on ouvre ſon compas pour le premier & le quatriéme genre de la longueur de *A 8*, dans le ſecond & troiſiéme de la longueur de *S 8* ; & du point *G* comme centre pour les deux premiers genres, ou du point *H* pour les deux derniers, avec cette ouverture de compas on décrit un cercle, qui coupe le precedent de part & d'autre de la ligne *FA*, en deux points qui appartiennent auſſi à l'Ovale qu'on décrit. Ces deux points ſont *1*, *1*, Fig. 174. *2*, *2*, Fig. 175. *3*, *3*, Fig. 176. *4*, *4*, Fig. 177.

On refait ces mêmes operations autant de fois, qu'on veut avoir de differens points de l'Ovale, qu'on cherche. Les cercles décrits du centre *F* par les points *A*, *V*, *X*, *Y*, *Z*, ne ſont coupez qu'en ces points-là par ceux, qui ſont décris des centres *G* ou *H*. Les cercles décrits du centre *F*, & qui coupe la ligne *FA*, au delà des points *V*, *X*, *Y*, *Z*, ne ſont plus coupez par ceux, qui ſont décrits des centres *G* ou *H*.

II. M. DESCARTES.

On pourroit encore trouver une infinité d'autres moyens pour décrire ces mêmes ovales, comme par exemple, on peut tracer la premiere *AV*, Fig. 178. lorſqu'on ſuppoſe les lignes *FA* & *AG* être égales, ſi on diviſe la toute *FG* au point *L*, en ſorte que *FL* ſoit à *LG*, comme *A 5* à *A 6*, c'eſt-à-dire qu'elles ayent la proportion, qui meſure les refractions. Puis ayant diviſé *AL* en deux parties égales au point *K*, qu'on faſſe tourner une Regle, comme *FE*, autour du point *F*, en preſſant du doigt *C*, la corde *EC*, qui étant attachée au bout de cette Regle vers *E*, ſe replie de *C* vers *K*, puis de *K* dérechef vers *C*, & de *C* vers *G*, où ſon autre bout ſoit

Fig. 178.

attaché, en ſorte que la longueur de cette corde ſoit compoſée de celle des lignes *GA* plus *AL* plus *FE* moins *AF*. Et ce ſera le mouvement du point *C*, qui décrira cette Ovale, à l'imitation de ce qui a été dit en la Dioptrique * de l'ellipſe & de l'hyperbole. Mais je ne veux point m'arrêter plus long-tems ſur ce ſujet.

* Diſcours 8.

On parlera de cette maniere de décrire le premier genre d'Ovales avec une corde, Sect. 3. Art. 1. n. 6.

III. M. DESCARTES.

Or encore que toutes ces Ovales ſemblent être quaſi de même nature, elles ſont neanmoins de quatre divers genres, chacun deſquels contient ſous ſoi une infinité d'autres genres, qui derechef contiennent chacun autant de diverſes eſpeces, que fait le genre des ellipſes, ou celui des hyperboles. Car ſelon que la proportion, qui eſt entre les lignes *A5*, *A6*, ou ſemblables, eſt differente; le genre ſubalterne de ces Ovales eſt different.

Puis ſelon que la proportion, qui eſt entre les lignes *AF* & *AG*, ou *AH* eſt changée, les ovales de chaque genre ſubalterne changent d'eſpece. Et ſelon que *AG* ou *AH* eſt plus ou moins grande, elles ſont diverſes en grandeur. Et ſi les lignes *A5*, *A6* ſont égales, au lieu des Ovales du premier genre ou du troiſiéme, on ne décrit que des lignes droites; mais au lieu de celles du ſecond, on a toutes les hyperboles poſſibles, & au lieu de celles du dernier, toutes les ellipſes.

Après qu'on aura expliqué Sect. 3. les proprietez des quatre ſortes d'Ovales, que M. DESCARTES propoſe ici, on concevra que ce ſont quatre genres differens. Enſuite ſi la raiſon de la ligne *A5* à la ligne *A6* change, les Ovales du même genre, comme celle du premier ſont de differente eſpece, & forment de nouveaux genres ſubalternes aux premiers. En effet ſi la raiſon de *A5* à *A6* n'eſt plus à peu près comme *3* à *2*, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere qui de l'air paſſe dans le verre : les rayons qui Fig. 174. viennent du point *F*, & qui tombent ſur la convexité du verre *1A1*, ne ſe réüniront plus au point *G*. De plus ſi la raiſon des lignes *AF*, *AG* change, Fig. 174. 175. ou celle de *AF*, *AH*, Fig. 176. 177. les Ovales du

du même genre changent encore d'eſpece : parceque dans l'ovale *Aiv*, Fig. 174. par exemple, *A* eſt un ſommet, *F*, *G* les foyers de cette Ovale. Or, comme Mr DESCARTES l'a expliqué dans ſa Dioptrique, Diſcours huitiéme, la differente diſtance des ſommets de l'ellipſe & de l'hyperbole à leurs foyers, établit des eſpeces differentes, la même choſe arrive donc aux Ovales dont nous parlons. Mais s'il n'y a que la grandeur des lignes *AG*, *AH*, qui change, pourveu que ces lignes gardent toûjours la même raiſon avec *AF*, & que la raiſon de *A5* à *A6* demeure auſſi la même : alors les Ovales changent de grandeur ſans changer d'eſpece ; ſelon ce que M. DESCARTES a dit touchant les ellipſes & les hyperboles au même endroit. Enfin ſi la ligne *A5* eſt égale à *A6*, au lieu des Ovales du premier genre & du troiſiéme, on décrit des lignes droites ; au lieu des Ovales du ſecond genre, on a des hyperboles, & au lieu des Ovales du quatriéme genre, on fait des ellipſes, ſuivant le ſentiment de M. DESCARTES. Nous verrons qu'il peut ſe former auſſi des lignes droites dans ces deux autres genres.

Le changement qui peut arriver aux angles *RAF*, *SAF*, n'en apporte aucun aux differens genres d'Ovales, ſi ce n'eſt qu'ils ſont plus ou moins larges. Tout ce que nous venons de dire, ſera éclairci, Sect. 3. dans ſes quatre Articles.

SECTION III.

Les proprietez de ces Ovales par rapport à la reflexion & à la refraction de la lumiere, & la démonſtration de ces proprietez.

M. DESCARTES.

OUtre cela en chacune de ces Ovales il faut conſiderer deux parties, qui ont diverſes proprietez ; à ſavoir en la premiere Figure 174. la partie, qui eſt vers *A*, fait que les rayons, qui étant dans l'air viennent du point *F*, ſe retournent tous vers le point *G*, lorſqu'ils rencontrent la ſuperficie convexe d'un verre, dont la ſuperficie eſt *1A1*, & dans lequel les refractions ſe font telles, que ſuivant ce qui a été dit en la Dioptrique, elles peuvent toutes être meſurées par la proportion, qui eſt entre les lignes *A5* & *A6*, ou ſemblables, par l'aide deſquelles on a décrit cette Ovale. FIG. 174. *Les proprietez de ces Ovales, touchant les reflexions, & les refractions.*

Mais la partie qui eſt vers *V* fait que les rayons qui viennent du point *G*, ſe reflechiroient tous vers *F*, s'ils y rencontroient la ſuper-

ficie concave d'un miroir, dont la Figure fût $1V_1$, & qui fût de telle matiere, qu'il diminuât la force de ces rayons, ſelon la proportion, qui eſt entre les lignes $A5$ & $A6$: car de ce qui a été démontré en la Dioptrique, il eſt évident, que cela poſé, les angles de la reflexion ſeroient inégaux, auſſi bien que ſont ceux de la refraction, & pourroient être meſurez en même ſorte.

Fig. 175. En la ſeconde Ovale, Fig. 175. la partie $2A_2$ ſert encore pour les reflexions, dont on ſuppoſe les angles être inégaux. Car étant en la ſuperficie d'un miroir compoſé de même matiere que le precedent, elle feroit tellement reflêchir tous les rayons, qui viendroient du point G, qu'ils ſembleroient après être refléchis venir du point F. Et il eſt à remarquer, qu'ayant fait la ligne AG beaucoup plus grande que AF, ce miroir ſeroit convexe au milieu vers A, & concave aux extrêmitez: car telle eſt la Figure de cette ligne, qui en cela repreſente plûtôt un cœur qu'une Ovale.

Mais ſon autre partie $2X_2$ ſert pour les refractions, & fait que les rayons, qui étant dans l'air, tendent vers F, ſe détournent vers G; en traverſant la ſuperficie d'un verre, qui en ait la Figure.

Fig. 176. La troiſiéme Ovale, Fig. 176. ſert toute aux refractions, & fait que les rayons, qui étant dans l'air, tendent vers F, ſe vont rendre vers H dans le verre, après qu'ils ont traverſé ſa ſuperficie, dont la Figure eſt A_3Y_3, qui eſt convexe par tout, excepté vers A, où elle eſt un peu concave, en ſorte qu'elle a la figure d'un cœur, auſſi-bien que la precedente. Et la difference qui eſt entre les deux parties de cette Ovale, conſiſte en ce que le point F eſt plus proche de l'une, que n'eſt le point H, & qu'il eſt plus éloigné de l'autre, que ce même point H.

Fig. 177. En même façon la derniere ovale, Fig. 177. ſert toute aux reflexions, & fait que ſi les rayons, qui viennent du point H, rencontroient la ſuperficie concave d'un miroir de même matiere que les precedens, & dont la Figure fût A_4Z_4, ils ſe reflechiroient tous vers F.

De façon qu'on peut nommer les points F, & G, ou H les points brûlans de ces ovales, à l'exemple de ceux des ellipſes & des

hyperboles, qui ont été ainſi nommez en la Dioptrique.

J'omets quantité d'autres refractions & reflexions, qui ſont reglées par ces mêmes ovales, car n'étant que les converſes, ou les contraires de celles-ci, elles en peuvent facilement être deduites. Mais il ne faut pas que j'omette la démonſtration de ce que j'ai dit. Et à cet effet prenons par exemple le point C à diſcretion en la premiere partie de la premiere de ces ovales Fig. 179. qui eſt la même que Fig. 150. Puis tirons la ligne droite CP, qui coupera la courbe au point C à angles droits, ce qui eſt facile par le * Problême precedent; car prenant b pour AG, c pour AF, $c+z$ pour FC; & ſuppoſant que la proportion qui eſt entre d & e, que je prendrai ici toûjours pour celle qui meſure les refractions du verre propoſé, deſigne auſſi celle qui eſt entre les lignes $A5$, $A6$, Fig. 174. & ſemblables qui ont ſervi pour décrire cette Ovale, ce qui donne $b-\frac{e}{d}z$ pour GC: on trouve que la ligne AP eſt $\frac{bcdd-bde+bddz+eez}{bde+cdd+ddz-eez}$ ainſi qu'il a été montré ci-deſſus. ** De plus du point P ayant tiré PQ à angles droits ſur la droite FC, & PN auſſi à angles droits ſur GC, conſiderons que ſi PQ eſt à PN, comme d eſt à e, c'eſt-à-dire comme les lignes, qui meſurent les refractions du verre convexe AC, le rayon qui vient du point F au point C doit tellement s'y courber en entrant dans ce verre, qu'il s'aille rendre après vers G: ainſi qu'il eſt très-évident, de ce qui a été dit dans la Dioptrique. Puis enfin voyons par le calcul, s'il eſt vrai que PQ ſoit à PN, comme d eſt à e.

Demonſtration des proprietez de ces Ovales touchant les reflexions & refractions. FIG. 179. 174. * *Part.* 3. *Sect.* 2. *Art.* 3. *n.* 3. ** *Part.* 1. *Sect.* 2. *Art.* 3. *n.* 3.

Les triangles rectangles PQF, & CMF ſont ſemblables; d'où il ſuit que CF eſt à CM, comme FP eſt à PQ; & par conſequent que FP étant multipliée par CM, & diviſée par CF, eſt égale à PQ. Tout de même les triangles rectangles PNG & CMG ſont ſemblables; d'où il ſuit que GP multipliée par GM & diviſée par CG eſt égale à PN. Puis à cauſe que les multiplications ou diviſions, qui ſe font de deux quantitez par une même, ne change point la proportion qui eſt entr'elles; ſi FP multipliée par CM & diviſée par FC, eſt à GP multipliée auſſi par CM & diviſée par CG, comme d eſt à e, en diviſant l'une & l'autre de ces deux

ſommes par CM, puis les multipliant toutes deux par CF, & derechef par CG; il reſte FP multipliée par CG, qui doit être à GP multipliée par CF, comme d eſt à e.

Or par la conſtruction FP eſt $c \frac{+bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$, ou bien $FP = \frac{bcdd+ccdd+bddz+cddz}{bde+cdd+ddz-eez}$; & GC eſt $b - \frac{c}{d}z$; ſi bien que multipliant FP par CG, il vient $\frac{bbcdd+bccdd+bbddz+bcddz}{-bcdez-ccdez-bdezz+cdezz} \frac{-bde+cdd}{+ddz-eez} \frac{-bdd+bcde-bddz}{-ceez}$. Puis GP eſt $b \frac{bde+cdd}{bde+cdd+ddz-eez}$, ou bien $GP = \frac{bbde+bcde-beez-ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$; & CF eſt $c+z$; ſi bien que multipliant GP par CF, il vient $\frac{bbcde+bccde-bceez-}{bde+}$ $\frac{cceez+bbdez+bcdez-beezz-ceezz}{cdd+ddz-eez}$.

Et pourceque la premiere de ces ſommes diviſée par d, eſt la même que la ſeconde diviſée par e, il eſt manifeſte que FP multipliée par CG eſt à GP multipliée par CF; c'eſt-à-dire que PQ eſt à PN, comme d eſt à e, qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer.

Et ſachez que cette même démonſtration s'étend à tout ce qui a été dit des autres refractions, ou reflexions qui ſe font dans les Ovales propoſées; ſans qu'il y faille changer aucune choſe, que les ſignes + & − du calcul. C'eſt pourquoi chacun les peut aiſément examiner de ſoi-même, ſans qu'il ſoit beſoin que je m'y arrête.

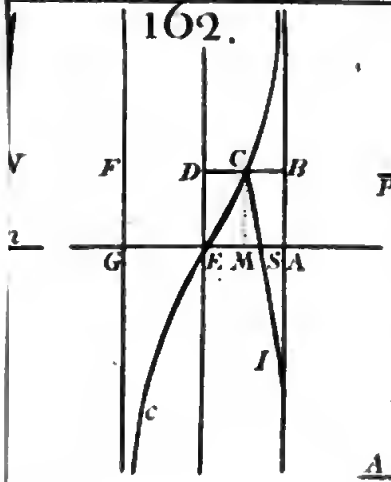
ARTICLE I.

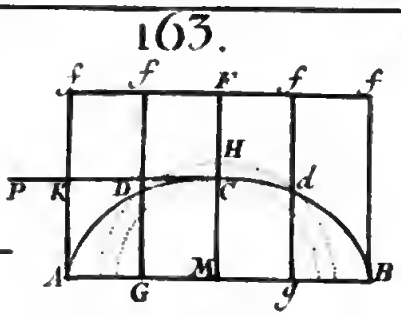
Les proprietez du premier genre d'Ovales.

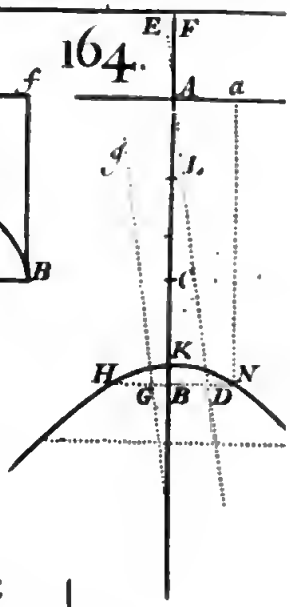
I.

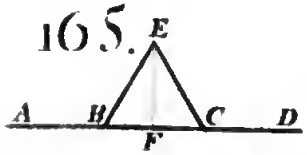
Fig. 150. 179 174. IL faut faire voir d'abord, que l'Ovale de Figure 179. ou 150. dans laquelle M. DESCARTES fait la démonſtration, qui convient au premier genre d'Ovales, eſt la même que celle de Fig. 174.

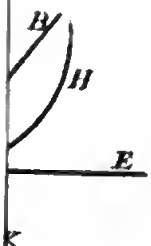
Voyez la Figure 150. Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 4. dont la nature eſt, que l'excez dont FC ſurpaſſe FA, ſoit à l'excez dont GA ſurpaſſe GC, comme d eſt à e. Il faut obſerver que d & e expriment ici la proportion, qui eſt dans la refraction des rayons, qui viennent de l'air dans le verre, entre le ſinus de l'angle d'inclinaiſon & le ſinus de l'angle rompu, vous trouverez là $AF = c$; $AG = b$; l'excez dont CF ſurpaſſe $FA = z$; l'excez dont GA ſurpaſſe $GC = b - \frac{c}{d}z$; $CM = x$; $AM = y$; $FM = c + y$; $GM = b - y$. Au point C pris à volonté l'on tire PC perpendiculaire ſur la courbe; pour cela il faut connoître AP, *v.* M. DESCARTES ſe contente en cet endroit-là de former l'équation zz

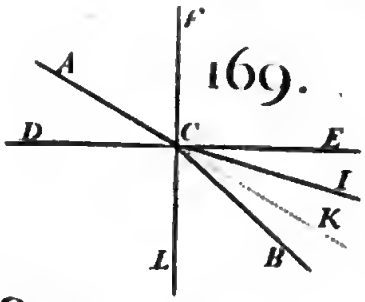


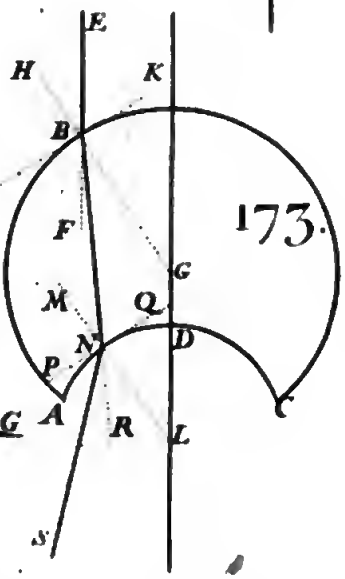


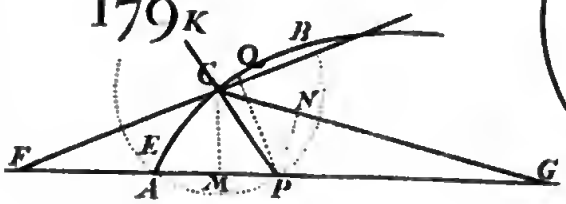












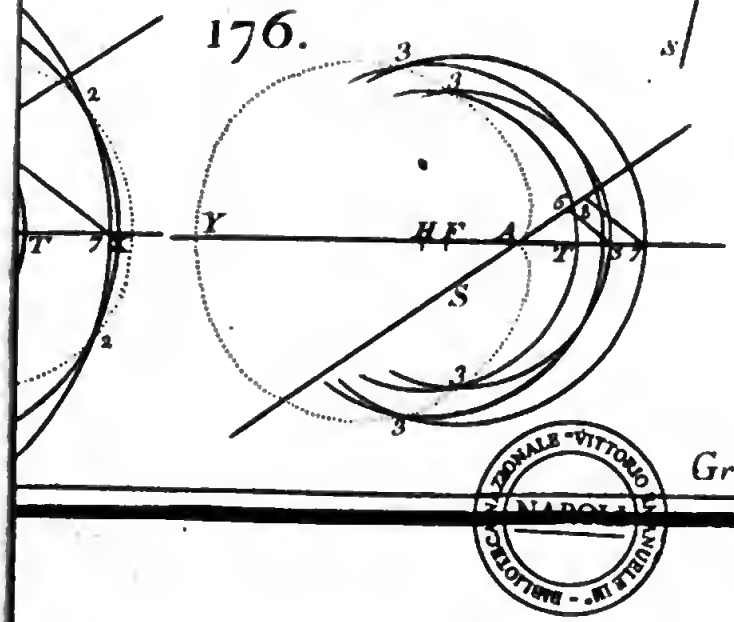


Fig. 177. v. pl. 15.

Gravé par Daudet.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

$$\frac{+2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddfi+bddvv-cddii+cddvv}{bdd+cee+eev-ddv}=0.$$

De cette équation il faut enſuite Art. 3. n. 3. cette valeur de AP, $v=\frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$.

Pour la Figure 174. M. DESCARTES vient d'en donner la deſcription Sect. 2. cette deſcription demande que As ſoit à $A6$, comme d eſt à e; & parceque les lignes $s6$, 78 ſont paralleles, les triangles $As6$, $A78$ ſont équiangles, & donnent cette proportion $As:A6::A7:A8$. Ainſi $A7:A8::d:e$. Ce que l'on peut dire par conſequent de toutes les autres ſemblables lignes, qui doivent ſervir à trouver les differens points de la Figure 174. dans laquelle ſuppoſons les droites Fi, Gi tirées; & que RA eſt égale à GA, Gi égale à $R6$, ainſi que la même deſcription le demande.

Maintenant Fi eſt égale à Fs, puiſque ce ſont les rayons d'un même cercle; mais As eſt l'excez de Fs ſur FA: donc As eſt l'excez de Fi ſur FA. De plus GA eſt égale à RA, & $R6$ égale à Gi ou GT, parceque Gi, GT ſont rayons du même cercle; mais $A6$ eſt l'excez de RA ſur $R6$, AT l'excès de GA ſur GT ou Gi: donc AT & $A6$ ſont égales. Après cela comme d eſt à e; de même As excez de Fs ou Fi ſur FA eſt à $A6$ ou AT excez de GA ſur GT ou Gi. L'Ovale Aiv, Fig. 174. a donc la même nature que l'Ovale AEC, Fig. 179. 150. qui eſt telle que l'excez dont FC ſurpaſſe FA eſt à l'excez dont GA ſurpaſſe GC comme d eſt à e. Ces deux courbes ſont donc de même genre, & ſeront une même Ovale; ſi dans les deux, $FA=FA$, $GA=GA$, l'angle $RAF=$ l'angle RAF. Ainſi peu importe dans laquelle des deux Ovales on faſſe la démonſtration.

II.

M. DESCARTES fait donc ſa démonſtration ſur la partie convexe AEC, Fig. 150. ou 179. qui eſt la même, que la partie convexe iAi de Figure 174.

Il ſuppoſe 1° que deux quantitez quelconques a, b, étant multipliées par une troiſiéme grandeur quelconque c; les produits ac, bc ſont entr'eux, comme les quantitez a, b; c'eſt à dire que $ac:bc::a:b$. 2° Que deux quantitez a, b, étant diviſées par une troiſiéme c; les quotients $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ ſont entr'eux comme les quantitez a, b; c'eſt-à-dire que $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}::a:b$. 3° Après avoir tiré PN perpendiculaire ſur CG, & PQ perpendiculaire ſur FC prolongée, s'il eſt neceſſaire; il ſuppoſe encore Fig. 179. que PQ eſt le ſinus de l'angle d'inclinaiſon, PN le ſinus de l'angle rompu, dans la refraction, que le rayon FC qui eſt dans l'air, ſouffre en entrant dans le verre, dont la ſurface convexe a la Figure AEC. Pour le démontrer, ſoit, comme on l'a déja dit PCK perpendiculaire ſur la courbe AEC; & du point C comme centre, de l'intervale CP, ſoit décrit le cercle PB. Fig. 179.

FIG. 179. PC eſt perpendiculaire ſur la courbe AEC ; FC eſt le rayon d'incidence ſelon ce qui a été dit Sect. 1. CG le rayon rompu ; FCK l'angle d'inclinaiſon ; PCG l'angle rompu. Mais FCK eſt égal à PCQ, donc le ſinus de l'angle PCQ ſera le ſinus de l'angle d'inclinaiſon FCK. D'ailleurs il eſt clair par la definition des ſinus, que dans le cercle, dont CP eſt le rayon, la ligne PQ eſt le ſinus de l'angle PCQ, la ligne PN le ſinus de l'angle PCG : donc PQ eſt le ſinus de l'angle d'inclinaiſon, PN le ſinus de l'angle rompu dans la refraction, qui fait que FC ſe détourne en CG.

C'eſt pourquoi M. Deſcartes démontre ici que PQ eſt à PN, comme d à e : d'où il ſuivra que, d & e exprimant la raiſon que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon garde avec le ſinus de l'angle rompu dans la refraction d'un rayon qui paſſe de l'air dans le verre ; le rayon FC qui part du point donné F, & qui eſt dans l'air, ſe rompra en C, de ſorte qu'il ira au point donné G. Voici la démonſtration.

1° Les triangles PQF, CMF ſont équiangles, donc $CF : CM :: FP : PQ$. & $PQ = \frac{CM \times FP}{CF}$. 2° Les triangles PNG, CMG ſont auſſi équiangles : donc $GP : PN :: CG : CM$, $PN = \frac{CM \times GP}{CG}$.

3° Comme nous venons de le dire, quelque raiſon qu'il y ait entre les grandeurs $\frac{CM \times FP}{CF}$, $\frac{CM \times GP}{CG}$, elle ne changera point, de quelques multiplications ou diviſions que je me ſerve, pourveu que les deux quantitez ſoient multipliées & diviſées par une même grandeur. Je diviſe donc $\frac{CM \times FP}{CF}$, & $\frac{CM \times GP}{CG}$ par CM, les quotiens ſont $\frac{FP}{CF}$, & $\frac{GP}{CG}$ je multiplie $\frac{FP}{CF}$ & $\frac{GP}{CG}$ par CF & par CG, les produits ſont $CG \times FP$ & $CF \times GP$. Dans toutes ces operations la raiſon entre les termes n'a pas changé : ſi l'on fait donc voir que la raiſon des deux derniers $CG \times FP$, $CF \times GP$ eſt celle de d à e : on devra conclurre que la raiſon des deux premiers $\frac{CM \times FP}{CF} = PQ$, $\frac{CM \times GP}{CG} = PN$ eſt auſſi comme d à e : & les ſinus PQ de l'angle d'inclinaiſon, PN de l'angle rompu auront la raiſon requiſe dans la refraction preſente. 4° C'eſt ce que M. Deſcartes montre clairement par le calcul qui eſt dans ſa Geometrie, où il multiplie la valeur de FP par CG, & la valeur de GP par CF ; les deux produits ſont tels, que ſi le premier eſt diviſé par d, le ſecond par e, les deux quotients ſont entierement la même quantité $\frac{bbed + beed - beez - ceez + bbdz + bdez - bezz - cezz}{bdc + eda + ddz - eez}$. D'où il ſuit que les deux produits $FP \times CG$, $GP \times CF$ ſont entr'eux comme d à e. Car ſoient les deux quantitez $\frac{abd}{c}$, $\frac{abe}{c}$

telles que la premiere étant diviſée par d, la ſeconde par e, leur quotient commun ſoit $\frac{ab}{c}$; elles ſont entr'elles comme d à e, c'eſt-à dire $\frac{abd}{c} : \frac{abe}{c} :: d : e$, parceque le produit des extrêmes $\frac{abde}{c}$ eſt égal au produit $\frac{abde}{c}$ des moyennes. Fig. 179.

Mais le calcul rendra peut-être cet endroit plus clair. Dans les triangles PQF, CMF vous avez cette proportion $CF, c+z : CM, x :: FP, \frac{bcdd+ccdd+bddz-cddz}{bde+cdd+ddz-cez} : PQ = x \times \frac{bcdd+ccdd+bddz-cddz}{bde+cdd+ddz-cez} \setminus c+z$.

Dans les triangles PNG, CMG vous avez celle-ci $CG, b - \frac{c}{d}z : CM, x :: GP, \frac{bbde+bcde-beez-ceez}{bde+cdd+ddz-cez} : PN = x \times \frac{bbde+bcde-beez}{bde+cdd+ddz} \setminus b - \frac{c}{d}z$.

A preſent diviſez ces valeurs de PQ, PN, chacune par CM, x, comme le dit M. Deſcartes; multipliez-les auſſi, quoique M. Deſcartes ne le diſe pas, par leur denominateur commun $bde+cdd+ddz-cez$: ce qui reſtera de la valeur de PQ, eſt $bcdd+ccdd+bddz-cddz \setminus c+z$, ce qui reſtera de la valeur de PN, eſt $bbde+bcde-beez-ceez \setminus b-\frac{c}{d}z$. Multipliez ces reſtes chacun par $CF, c+z$, & par $CG; b-\frac{c}{d}z$, comme M. Deſcartes l'ordonne : il reſtera de la valeur de PQ, $bbcdd+bccdd+bbddz+bcddz-bcdez-ccdez-bdezz-cdezz$; & de la valeur de PN, $bbcde+bcede+bbdez+bcdez-bceez-cceez-beezz-ceezz$. Or la premiere de ces quantitez eſt à la ſeconde comme d à e, puiſque ſi vous multipliez la premiere par e, & la ſeconde par d, vous trouvez le même produit.

III.

Enfin puiſque PQ ſinus de l'angle PCQ ou de l'angle d'inclinaiſon FCK eſt à PN ſinus de l'angle rompu PCG, comme d eſt à e, qui eſt la raiſon, que doivent avoir ces ſinus dans la refraction, que ſouffre un rayon de lumiere, qui paſſe de l'air dans le verre : il ſuit que ſi le rayon FC eſt dans l'air, & qu'il tombe ſur la convexité AEC d'un verre, qui ait la figure du premier genre des Ovales; ce rayon FC ſe rompra en CG.

Et parceque le point C a été pris à diſcretion, on peut dire la même choſe de tous les points de la partie convexe AEC Figure 179. ou *1A1* Fig. 174. De ſorte que la proprieté de cette partie convexe eſt, que tous les rayons de lumiere qui partiront dans l'air du point donné F, & qui tomberont ſur un verre poli dont la courbure ſoit ſemblable à la convexité AEC, ſe rompront, pour aller tous ſe reünir au point donné G.

Et comme la refraction eſt mutuelle dans les deux mêmes milieux, tous les rayons de lumiere, qui partiront dans le verre du point G, & qui tomberont ſur la partie concave AEC pour ſortir dans l'air, iront mutuellement, après avoir ſouffert une refraction, ſe reünir tous au point F. Et

Fig. 179. dans ce cas GC eſt le rayon d'incidence, CF le rayon rompu, GCP l'angle d'inclinaiſon, FCK l'angle rompu : or la raiſon de PN ſinus de l'angle d'inclinaiſon GCP eſt à PQ ſinus de l'angle PCQ ou de l'angle rompu FCK : comme e eſt à d ; telle qu'elle doit être dans la refraction des rayons qui ſortent du verre pour entrer dans l'air.

IV.

Examinons ce qui arrive dans la partie concave CV, Fig. 180. qui eſt la même que IVI, Fig. 174. M. Deſcartes aſſure que, ſi FC eſt le rayon d'incidence, CV la ſurface concave d'un miroir fait d'une matiere, qui diminue tellement la force du rayon d'incidence FC, que le ſinus de l'angle d'incidence ſoit au ſinus de l'angle reflechi comme d à e, ou comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction : alors le rayon d'incidence FC qui vient d'un point donné F, ſe reflechira au point donné G, & CG ſera le rayon reflechi.

Fig. 180. Tirez CP perpendiculaire ſur la courbe CV, PQ ſur le rayon d'incidence FC, PN ſur le rayon de reflexion CG. Du point C comme centre, de l'intervale CP décrivez le cercle PB ; par la definition du ſinus droit, PQ eſt le ſinus de l'angle FCP, PN le ſinus de l'angle PCG, & par la Sect. 1. FCP eſt l'angle d'incidence, PCG l'angle de reflexion.

Vous démontrerez que Fig. 180. PQ eſt à PN comme d à e, de la même maniere que n. 2. on l'a démontré dans la Figure 179. parceque les triangles, qu'il faut conſiderer, ſont les mêmes dans les deux Figures, que toutes les quantitez, qui ſervent au calcul, ſont encore les mêmes ; excepté PM, qui Fig. 179. étoit $AP - AM$, $v - y$; & qui Fig. 180. eſt $AM - AP$, $y - v$. Mais cette difference n'apporte aucun changement, parceque le quarré de $v - y$ & de $y - v$ eſt le même $yy - 2vy + vv$, & que ce n'eſt que de ce quarré dont on a beſoin, pour avoir l'équation de Sect. 2. Art. 1. n. 4. dont on a tiré Art. 3. n. 3. AP, $v = \frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$.

De ce que PQ eſt encore ici à PN comme d à e, ou de ce que le ſinus de l'angle d'incidence FCP eſt au ſinus de l'angle reflechi PCG dans la reflexion, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction ; il ſuit que ſi FC eſt le rayon d'incidence qui eſt dans l'air $VCFGV$, & qu'il tombe ſur la concavité du miroir CV compoſé d'une matiere capable de tellement reflechir les rayons de lumiere que le ſinus de l'angle d'incidence ſoit au ſinus de l'angle reflechi comme d à e : le rayon FC ſe reflechira en CG. Et comme le point C a été pris à volonté, tous les rayons qui partiront du point donné F, ſe reüniront après leur reflexion au point donné G.

Et au contraire, ſi la matiere du miroir concave VC peut faire que le ſinus de l'angle d'incidence ſoit au ſinus de l'angle reflechi, comme e à d :

il

Il ſuit que tous les rayons qui viendront du point donné G ſur la ſuperficie concave CV, ſe reflechiront & ſe reüniront tous au point auſſi donné F. Car dans ce cas, qui eſt celui dont M. Deſcartes parle dans ſa Geometrie, GC eſt le rayon d'incidence, FC le rayon de reflexion; GCP l'angle d'incidence, dont le ſinus eſt PN; PCF l'angle reflechi, dont le ſinus eſt PQ.

Or ſi PQ eſt à PN, comme d eſt à e: reciproquement PN eſt à PQ, comme e à d.

V.

Cherchons une équation qui exprime le rapport des abſciſſes AM, y, & des appliquées CM, x entr'elles dans le premier genre d'ovales, afin de connoître de quel degré il eſt.

Soit Fig. 179. FA, $c = AG = b = 1$. comme il arrive Fig. 178. FC qui étoit Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 4. $c + z$, ſera $1 + z$; GC qui étoit $b - \frac{c}{d}z$ ſera $1 - \frac{2}{3}z$ en ſuppoſant $d = 3$, $e = 2$. Soit encore CM, x; AM, y; FM qui étoit $c + y$, ſera $1 + y$; GM qui étoit $b - y$, fera $1 - y$. Fig. 179.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{FM}^2$, $1 + 2z + zz = xx + 1 + 2y + yy$. Extrayons les racines quarrées $1 + z = \sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$, $z = -1 + \sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$; & $zz = 2 + xx + 2y + yy - 2\sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$.

Dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CG}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{GM}^2$, $1 - \frac{4}{3}z + \frac{4}{9}zz = xx + 1 - 2y + yy$; $-3z + zz = \frac{9}{4}xx - \frac{9}{2}y + \frac{9}{4}yy$. Subſtituons ici la valeur de z & de zz trouvée un peu auparavant, l'équation ſera $\frac{1}{4}xx - \frac{33}{2}y + \frac{5}{4}yy - 5 = -5\sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$; $xx - \frac{26}{5}y + yy - 4 = -4\sqrt{xx + 1 + 2y + yy}$. Quarrons les deux membres, & nous trouverons $y^4 - \frac{52}{5}y^3 + \frac{76}{25}yy + 2xxyy + \frac{48}{5}y - \frac{52}{5}xxy - 24xx + x^4 = 0$. Ainſi le premier genre d'Ovales eſt du quatriéme degré.

VI.

Il nous faut examiner à preſent, de quelle maniere M. DESCARTES a déterminé la deſcription de l'Ovale du premier genre, Fig. 178. en ſuppoſant $AF = AG$, Sect. 2. n. 2. & en ſe ſervant d'une corde. Fig. 178.

Comme le foyer F eſt au dehors, & le foyer G au dedans de l'Ovale; on peut penſer d'abord, qu'elle peut ſe décrire d'une maniere ſemblable à celle, dont l'hyperbole, qui a ſes foyers ainſi diſpoſez, a été décrite dans * la Dioptrique de M. Deſcartes. C'eſt pourquoi mettons deux piquets F, G ſur l'axe FG, autour du pole F faiſons tourner la Regle FE, l'un des bouts de la corde étant attaché à ſon extrémité E, & l'autre au piquet G. Mais ſi la corde eſt plus courte que la Regle, on décrit une hyperbole; ſi elle lui eſt égale, on décrit une ligne droite; comme le dit M. Deſcar- * *Diſcours* 8.

Fig. 178. tes au même endroit : il faut donc que la corde ſoit ici plus longue que la Regle. Il faut conſiderer enſuite, que ſi l'on ne ſe ſert que des deux piquets F, G, & que pour commencer à décrire la courbe ACV, on mette la Regle FE ſur l'axe FG; le poinçon ou le doigt C marquera le point A, & la courbe ſera là fermée : mais enſuite elle ira toûjours en s'élargiſſant. Il faut donc un troiſiéme piquet K, autour duquel la corde ſe replie; de ſorte que après qu'une partie de la courbe ſera décrite, le double CK de la corde augmentant, les reſtes CE, CG diminuant toûjours, la Regle ſoit contrainte de retomber ſur l'axe FG : ce qui fera que la courbe ſera encore, comme elle doit l'être, fermée en V.

Enfin mettant $FA = AG$, le point A pour l'un des ſommets, & ſuppoſant que ACV eſt une Ovale du premier genre, il reſte à déterminer le point K, c'eſt-à-dire la longueur de FK, ou de AK, ou de GK.

Pour cela on choiſira la poſition, où la Regle FE touche l'Ovale ACV, ce qui arrive une fois pendant que la moitié ſuperieure ACV ſe décrit : or dans cette poſition il eſt certain Art. 2. Sect. 2. Part. 3. que l'abſciſſe AM, & l'appliquée CM ont deux valeurs égales, & que l'équation aura deux racines égales au point C. Suppoſé que ce ſoit à ce point, que la Regle FE ſoit touchante.

Nommons comme Part. 3. Sect. 2. Art. 1. n. 4. CM, x; AM, y; CG, $b - \frac{e}{d}z$, & parceque M. Deſcartes ſuppoſe $FA = GA$, nommons les b; ainſi CF, qui étoit $c + z$, ſera $b + z$, FM ſera $b + y$; GM, $b - y$. Enſuite nommons AK, n; $KM = AM - AK$, $y - n$; la longueur de la Regle FE, f; la ligne droite CK, p; & les parties CK de la corde $2p$. On aura $CE = FE - FC$, $f - b - z$; & toute la corde $= CE + CG + 2CK$, $f - b - z + b - \frac{e}{d}z + 2p = f - z - \frac{e}{d}z + 2p$.

On peut encore avoir une autre valeur de toute la corde, en la conſiderant dans la ſituation, où la Regle FE tombe ſur l'axe FGV, le point E ſur le point e, le point C ſur le point A, c'eſt-à-dire lorſque le poinçon C décrit le ſommet A : car alors la corde s'étend de e vers A, de A elle revient vers K, de K elle retourne vers A, & de A elle revient encore vers G.

Ainſi elle eſt égale à $eA + AK + KA + AG$: mais $AG = AF$, donc la corde eſt $eA + AF + 2AK$, ou parceque $eA + AF = eF = FE$, la corde eſt $FE + 2AK$, $f + 2n = f - z - \frac{e}{d}z + 2p$. De ces deux valeurs de toute la corde on tire $p = n + \frac{1}{2}z + \frac{ez}{2d} = CK$.

Maintenant nous avons trois triangles rectangles CMK, CMF, CMG. En premier lieu les triangles CMK, CMF donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2$, $xx = pp + 2ny - nn = zz + 2bz - 2by$. Pour pp ſubſtituons ſa valeur l'équation ſe reduira à $\frac{1}{4}zz - \frac{ezz}{2d} - \frac{eezz}{4dd} + 2bz - nz - \frac{enz}{d} - 2by - 2ny = 0$. Multipliez tout par $4dd$, diviſez par

$3dd - 2de - ee$, il viendra $zz \frac{+8bddz - 4ddnz - 4denz - 8bddy}{3dd - 2de - ee} \frac{}{} = 8ddny = o$. Après quoi ſuivant la Methode de Part. 3. Sect. 2. Art. 3. prenez $z = g$, $z - g = o$, $zz - 2gz + gg = o$; & comparez le ſecond terme de cette équation avec le ſecond de la precedente, pour g mettez z qui lui eſt égale, vous aurez $z = \frac{4bdd - 2ddn - 2den}{2de + ee - 3dd}$. On prend ici la valeur de z, afin de la comparer avec une autre valeur de z, que l'on va trouver; & alors il ne reſtera que n d'inconnuë. Fig. 178.

En ſecond lieu les triangles CKM, CMG donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$; $xx = pp + 2ny - nn = \frac{eezz}{dd} - \frac{2bez}{d} + 2by$. Mettez pour pp ſa valeur, vous ferez $\frac{1}{4}zz + \frac{ezz}{2d} - \frac{eezz}{4dd} + \frac{2bez}{d} + nz + \frac{enz}{d} + 2ny - 2by = o$. Multipliez tout par $4dd$, diviſez tout par $dd + 2de - 3ee$, il y aura $zz \frac{+8bdez + 4ddnz + 4denz + 8ddny - 8bddy}{dd + 2de - 3ee} = o$. Prenez encore $zz - 2gz + gg = o$, & les ſeconds termes, qui doivent être comparez donneront $z = \frac{4bde + 2ddn + 2den}{3ee - dd - 2de}$.

Vous avez donc deux valeurs de z, & en les comparant enſemble vous trouverez $n = \frac{bd - be}{2d + 2e} = AK$.

On peut donc d'abord déterminer le point K, en faiſant, $2d + 2e : b :: d - e : \frac{bd - be}{2d + 2e} = AK$. Enſuite FK eſt $FA + AK$, $b + \frac{bd - be}{2d + 2e}$; $GK = GA - AK$, $b - \frac{bd + be}{2d + 2e}$, ces deux valeurs de FK & GK ſe reduiſent à $3d + e$, $d + 3e$. Ainſi, comme on l'a montré n. 2. $FK : GK :: 3d + e : d + 3e$; c'eſt pourquoi ſi l'on partageoit FG, $2b$ en deux parties, de ſorte que celle qui commenceroit en F fût à l'autre comme $3d + e$ eſt à $d + 3e$, le point de la diviſion ſeroit encore le point cherché K.

De plus FK eſt $\frac{3bd + be}{2d + 2e}$, FG eſt $2b = \frac{4bd + 4be}{2d + 2e}$, ces deux valeurs ſe reduiſent à $3d + e$, $4d + 4e$. Si l'on fait donc $4d + 4e : 3d + e :: FG : FK$, on fixera encore le point K. Après cela il faut diviſer FG en L, de ſorte que $FL : LG : d : e$, Nommez FL, v; LG ſera $FG - FL$, $2b - v$; & la ſuppoſition donne, $FL, v : LG, 2b - v :: d : e$; $v = \frac{2bd}{d + e} = FL$, ce qui fournit cette Analogie, $d + e : d :: FG, 2b : FL = \frac{2bd}{d + e}$, ce qui détermine le point L. Après quoi ſi vous faites reflexion, que ſi de FL, $\frac{2bd}{d + e}$ vous ſouſtrayez FA, b; le reſte AL eſt $\frac{bd - be}{d + e}$, qui eſt double de AK, $\frac{bd - be}{2d + 2e}$: vous comprendrez donc pourquoi M. Deſcartes dans la deſcription qu'il donne de l'Ovale ACV avec une corde, ordonne de diviſer FG en L de ſorte que FL ſoit à LG, comme d eſt à e; de diviſer enſuite AL en deux parties égales au point K, & de faire tourner la corde autour du point K.

On peut auſſi à preſent rendre raiſon, pourquoi M. Deſcartes dit que toute la corde eſt $GA + AL + FE - AF$. Car puiſque Fig. 178. FA & GA ſont ſuppoſées égales, toute la corde eſt $AL + FE$, ou $AL + Fe$; parcequ'on ſuppoſe $Fe = FE$; ou $2AK + Fe$, parceque AL eſt double de AK; ou $2AK + eA + AG$, parceque $eA + AG$ eſt égale à $eA + AF$, ou à eF.

Or on a déja fait voir, que la Regle FE étant dans la poſition Fe, & ſur l'axe FGV, le point C & le ſtilet C ſont ſur A; & qu'alors la corde va de e en A, de A en K, de K en A, de A en G; & que par conſequent elle eſt $eA + 2AK + AG$.

On trouvera de la même façon ce point K, quelque raiſon que AF ait avec AG; comme ſi elle étoit, double, ſoudouble, triple, &c. Mais la raiſon de AL à AK changera à meſure qu'on trouvera differentes valeurs de FL, AL, AK, &c. Si en conſervant la même longueur de la corde, on faiſoit tourner la Regle autour du point A, & que FA fût nulle, on trouveroit pour AK une valeur negative, qui marqueroit, que le point K ſeroit au dehors de l'Ovale du côté de F.

VII.

Fig. 180. 181. 182. 183. 184.

1° Vous avez Fig. 180. 181. 182. 183. 184. differentes Ovales du premier genre. L'Ovale de Fig. 180. ſuppoſe la raiſon de $A5$ à $A6$, & celle de FA à AG, telles qu'elles ſont Fig. 179. 174. 150. de M. Deſcartes. L'Ovale de Fig. 181. ſuppoſe $AF = AG$, & $A5 : A6 :: 3 : 2$. L'Ovale de Fig. 182. ſuppoſe $AF = \frac{1}{2} AG$, & $A5 : A6 :: 2 : 1$. L'Ovale de Fig. 183. ſuppoſe $AF = 2AG$, & $A5 : A6 :: 2 : 1$. L'Ovale de Fig. 184. ſuppoſe le point F ſur le point A, & $A5 : A6 :: 3 : 2$. ou $d : e$. Dans cette derniere eſpece d'Ovales les rayons ne partent que des points A, G; ainſi aucun ne tombe ſur la convexité AC; & l'Ovale n'eſt pas propre à la refraction; mais à la reflexion ſeulement, ou des rayons qui partent du point donné A pour ſe reflechir en G, ou de ceux qui partent du point G pour ſe reflechir au point A, après être tombez ſur la concavité ACV. L'on demande que le miroir ſoit de même matiere que ceux de Fig. 180. Voici l'équation de l'Ovale, Fig. 184.

Puiſque AF eſt nulle, l'excez de FC ſur FA eſt FC, z; GC, v; & l'on aura GC, en faiſant $d : e :: z : GF - GC$, $b - v$; & $v = b - \frac{ez}{d} = GC$. L'on fera $CM = x$; $FM = y$; $GA = b$; $GM = b - y$. Maintenant les triangles rectangles CMF, CMG donnent $\overline{FC}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{CM}^2$, $zz = yy + xx$; & $\overline{GC}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{CM}^2$, $bb - \frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} = bb - 2by + yy + xx$. Mettons dans cette derniere équation la valeur de z & de zz tirée de la premiere équation, & nous ferons $yy - \frac{eeyy}{dd} - 2by + xx - \frac{eexx}{dd} = -\frac{2be}{d}\sqrt{yy + xx}$. Dont les quarrez donneront une équation du quatriéme degré comme n. 5.

Fig. 185.

2° Lorſque $A5 = A6$, Fig. 185. on décrit une ligne droite AV. Car par la deſcription du premier genre d'Ovales, $AR = AG$; par la ſuppoſition $A6 = A5$; donc $R6 = G5$. Donc le cercle 56 décrit du centre F ſera touché au point 5 par le cercle décrit du centre G & du rayon $R6 = G5$. Ainſi tous ces points d'attouchement compoſeront la droite AV.

Que ſi $A6$ eſt plus grande que $A5$, $R6$ ſera plus petite que $G5$, & le cercle décrit du centre G, du rayon $R6$ ne touchera pas même le cercle décrit du centre F, & il ne ſe décrira aucune ligne,

ARTICLE II.

Les proprietez du ſecond genre d'Ovales.

Nous ſuivrons l'ordre qui a été gardé pour le premier genre d'Ovales.

I.

VOyez la maniere de décrire le ſecond genre d'ovales, Fig. 175. dans la Section II. Suppoſez les lignes droites $F2$, $G2$ tirées. $F5$, $F2$ ſont égales; GT, $G2$ ſont auſſi rayons du même cercle, lequel rayon a été pris égal à $S6$. Nommons FA, c; AG, $b = AS$; $A5$, z qui eſt l'excez dont $F5$ ou $F2$ ſurpaſſe FA. Ainſi $F5 = FA + A5$, $c + z = F2$. Nous avons $d : e :: A5, z : A6, \frac{ez}{d}$; & $S6 = SA + A6$, $b + \frac{ez}{d} = G2$; & $A6 = \frac{ez}{d}$ eſt l'excez dont $S6$ ou $G2$ ſurpaſſe SA ou GA. Et la proprieté du ſecond genre d'Ovales, eſt que z excez dont $F2$ ſurpaſſe FA eſt à $\frac{ez}{d}$ excez dont $G2$ ſurpaſſe GA, comme d eſt à e, puiſque $\frac{dez}{d} = ez$. Dans la Figure 175. on ſuppoſe que la raiſon de d à e eſt celle du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui entre de l'air dans le verre. Fig. 175. 186. 187.

Les Figures 186. 187. ſont auſſi du ſecond genre, car elles ont été décrites en ſuppoſant que comme d eſt à e, ainſi l'excez dont FC ſurpaſſe FA eſt à l'excez dont GC ſurpaſſe GA. C'eſt pourquoi ſi l'on nomme FA, c; GA, b; l'excez dont FC ſurpaſſe FA, z; l'on aura FC, $c + z$, & de plus $d : e :: z : \frac{ez}{d}$ excez dont GC ſurpaſſe GA, & GC ſera $GA + \frac{ez}{d} = b + \frac{ez}{d}$. Et les points C, C des Figures 186. 187. répondent aux points 2, 2 de Fig. 175.

Au point C Fig. 186. pris à volonté tirez KCP perpendiculaire à la courbe AC; du même point C abbaiſſez CM perpendiculaire ſur AX. Nommez CM, x; AM, y; AP, v; CP, s. Vous aurez $FM = FA + AM$, $c + y$; $MG = GA - AM$, $b - y$; $MP = AP - AM$, $v - y$; $FP = FA + AP$, $c + v$; $GP = AP - AG$, $v - b$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2$, $xx = zz + 2cz - 2cy - yy$. Dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$, $xx = \frac{eezz}{dd} + \frac{2bez}{d} + 2by - yy$. Donc $2by + 2cy = zz + 2cz - \frac{eezz}{dd} - \frac{2bez}{d}$; $y = \frac{ddzz + 2cddz - eezz - 2bdez}{2bdd + 2cdd}$. Mettez cette valeur de y dans l'équation $zz + 2cz - 2cy - yy = xx$, vous ferez $\frac{bddzz + 2bcddz + ceezz + 2bcdez}{bdd + cdd} - yy = xx$. premiere valeur de xx.

Enſuite dans le triangle rectangle CMP, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ſſ -$

$vv + 2vy - yy = xx$. Substituez encore pour y sa valeur trouvée un peu auparavant, vous aurez une seconde valeur de xx que vous comparerez avec la premiere, & vous arrangerez tous les termes des deux équations du même côté de cette maniere $zz \frac{+2cddvz - 2bdevz - 2bcddz - 2bcdez + ddvv - eevv - bddff + cddff - bddvv - cddvv}{bddd - cee} = 0$.

Comparez encore le second terme de cette équation avec le second terme de l'équation $zz - zfz + ff = 0$; mettez z pour f, & vous trouverez $v = \frac{bcdd + bcde + bddz + ceez}{cdd - bde + ddz - eez}$.

II.

Nous ferons la démonstration sur la partie convexe AC de Fig. 186. qui est la même que la partie convexe Az de Fig. 175.

FIG. 186.

On suppose ici tout ce qui est au commencement de n. 2. Art. 1. On démontrera comme là, 1° que $PQ = \frac{CM \times FP}{CF}$; 2° que $PN = \frac{CM \times GP}{CG}$ dans les triangles équiangles PNG, CMG, qui ont les angles PNG, CMG droits, & les angles PGN, CGM égaux ; 3° que PQ est à PN comme d à e, si $GC \times FP$ est à $CF \times GP$ comme d à e. 4° C'est ce qui se prouve ainsi, FP est $c + v$, GC est $b + \frac{ez}{d}$ on aura donc aisément la valeur de $FP \times CG$; GP est $v - b$, CF est $c + z$, on aura donc également la valeur de $GP \times CF$. Or la valeur de $FP \times CG$ étant divisée par d, & la valeur de $GP \times CF$ étant divisée par e, les deux quotiens sont parfaitement la même quantité $\frac{bbcd + bbdz + bced + bcdz + bcez + bezz + ecez + cezz}{cdd - bde + ddz - eez}$. Donc $d : e :: FP \times CG : GP \times CF :: PQ : PN$.

III.

De là il suit, que si l'on fait un miroir concave AC d'une matiere, qui reflêchisse tellement les rayons de lumiere, que le sinus de l'angle d'inclinaison soit au sinus de l'angle reflêchi, comme e est à d ; & que GC soit un rayon d'incidence sur ce miroir, GCP l'angle d'inclinaison, dont PN est le sinus : il suit, dis-je, que CQ sera le rayon reflêchi, PCQ l'angle reflêchi, dont PQ est le sinus, car on aura $e : d :: PN : PQ$. Ainsi comme la droite CQ n'est autre chose, que la droite FC prolongée ; le rayon GC tombant sur le miroir concave AC, se reflêchira en CQ, de sorte que ce rayon reflêchi semblera venir du point F, c'est ce que M. DESCARTES assure dans sa Geometrie.

Au contraire si la matiere du miroir concave AC reflechissoit tellement les rayons de lumiere, que le sinus de l'angle d'inclinaison fût au sinus de l'angle reflêchi, comme d à e : le rayon QC tombant sur ce miroir, se reflêchiroit en G : mais la surface convexe ne peut point servir à la refrac-

tion telle, qu'on la cherche ici, où l'on veut que le rayon d'incidence *FC* qui eſt dans l'air, & qui vient du point donné *F*, ſe rompe tellement au point *C* en entrant dans le verre, qu'il aille au point donné *G*. En effet *FC* doit par la refraction, qu'il ſouffre au point *C*, s'approcher de la perpendiculaire *CP*, & demeurer dans l'angle *PCQ*; il n'ira donc jamais par la ligne *CG*.

IV.

Venons à la partie *XC*, Fig. 187. qui eſt la même que la partie *X2*, Fig. 175. M. DESCARTES dit qu'elle ſert aux refractions, & que les rayons, qui étant dans l'air comme *LC*, tendent vers *F*, ſe détournent vers *G* en traverſant la ſuperficie convexe *XC*. Fig. 187.

Menez *PCK* perpendiculaire ſur la courbe *XC*, *PQ* ſur le rayon d'incidence *LCF*, *PN* ſur le rayon rompu *CG*. Par la Sect. 1. *LCK* eſt l'angle d'inclinaiſon, égal à l'angle *PCF*; *PCG* eſt l'angle rompu: & par la définition du ſinus droit, *PQ* eſt le ſinus de l'angle *PCF*, ou de ſon égal *LCK* angle d'inclinaiſon; *PN* eſt le ſinus de l'angle rompu *PCG*. Ce qui ſe connoît, après avoir décrit l'arc *PB* du centre *C*, & du rayon *CP*.

Vous démontrerez que Fig. 187. comme Fig. 186. n. 2. $PQ : PN :: d : e$. Car les mêmes triangles ſont encore ici ſemblables, & les quantitez, qui ſervent au calcul, ſont auſſi les mêmes: excepté que *GM*, qui étoit $b - y$, eſt ici $AM - AG$, $y - b$; & *PM*, qui étoit $v - y$, eſt ici $AM - AP$, $y - v$. Mais parceque ces diverſes quantitez ont les mêmes quarrez, il n'y a aucune difference dans le calcul.

C'eſt pourquoi, puiſque comme $d : e :: PQ : PN$; & que la raiſon de *d* à *e* exprime celle que doit avoir le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction d'un rayon, qui de l'air entre dans le verre: le rayon d'incidence *LC*, qui eſt dans l'air, & qui tend vers *F*, aura pour angle d'inclinaiſon *LCK*, dont le ſinus eſt *PQ*, pour rayon rompu *CG*, & pour angle rompu *PCG*, dont le ſinus eſt *PN*, afin que les loix de la refraction ſoient gardées.

Et parceque la refraction eſt reciproque, le rayon *GC*, qui viendroit du point *G* dans le verre *XCA*, ſe romproit en ſortant dans l'air, pour aller en *CL*, comme s'il venoit du point *F* en droite ligne. De plus le rayon *IC* qui eſt dans le verre, & qui tend vers *G*, ſe rompra dans l'air en *CF*: parcequ'alors *PN* ſinus de l'angle *PCG*, ou de l'angle d'inclinaiſon *ICK* eſt à *PQ* ſinus de l'angle rompu *PCF*; comme *e* à *d*; comme il doit arriver lorſque le rayon paſſe du verre dans l'air.

Et reciproquement le rayon *FC* qui eſt dans l'air, ſe rompra en *CI* dans le verre, comme s'il venoit du point *G*.

Maintenant que le miroir concave *XC* ſoit d'une matiere, qui reflêchiſſe les rayons de lumiere, de ſorte que la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinai-

ſon au ſinus de l'angle reflèchi ſoit celle de d à e : le rayon FC, qui ſeroit tout dans l'air, ou tout dans le verre, & qui tomberoit ſur ce miroir XC, ſe reflèchiroit en CG. Car en ce cas FC eſt le rayon d'incidence, CG le rayon reflèchi, FCP l'angle d'incidence, dont le ſinus eſt PQ; GCP l'angle reflèchi, dont PN eſt le ſinus.

V.

En ſuivant n. 5. Art. 1. vous trouverez que l'Ovale AC Fig. 187. eſt du quatriéme degré. Les triangles & les valeurs des quantitez dont on ſe ſert, ſont les mêmes, excepté que CG eſt ici $b + \frac{ez}{d}$; étant $AG = AF = 1$, $d = 3$; $e = 2$. L'équation eſt $y^4 - \frac{12}{5}y^3 + 28yy + 2xxyy - \frac{48}{5}y - \frac{52}{5}xxy + \frac{24}{25}xx + x^4 = 0$.

VI.

On n'a auſſi qu'à ſuivre n. 6. Art. 1. pour trouver une maniere de décrire l'Ovale du ſecond genre. La Regle FE, Fig. 186. tourne auſſi autour du point donné F, la corde eſt attachée à l'extrêmité E de la Regle, & au point donné G; & elle ſe replie autour du point K. La longueur de la Regle eſt arbitraire, la longueur de la corde eſt $EF - AF + 2AK + AG$. Si l'on ſuppoſe $AF = AG$, on déterminera le point K, en faiſant $AK = \frac{bd^3 + bdde - bdce - be^3}{2d^3 - 2dde - 2dce + 2e^3}$.

Fig. 186.

VII.

1°. Dans ce genre d'Ovales, AG eſt b, GC eſt $b + \frac{ez}{d}$; ainſi GC eſt toûjours plus grande que GA; ce qui fait, que le point A rentre : il rentre ſenſiblement, lorſque AG eſt beaucoup plus grande que AF, & encore plus lorſque les points A, F ſont l'un ſur l'autre. Ce qui donne à l'Ovale une figure de cœur, comme Fig. 188. dans laquelle on trouve les mêmes reflexions & les mêmes refractions que Fig. 186. 187.

Fig. 189.

2°. Si la raiſon de AF à AG, Fig. 189. eſt la même que celle de $A5$ à $A6$ ou ſi AF eſt d, AG, e; au lieu d'une Ovale on décrira un cercle. Ce qui ſe démontre de cette façon.

FC ſera $d + z$; GC, $e + \frac{ez}{d}$; CM, x; AM, y; $FM = FA + AM$, $d + y$; $GM = AM - AG$, $y - e$.

Dans les triangles rectangles FCM, $\overline{FC}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{CM}^2$, $dd + 2dz + zz = dd + 2dy + yy + xx$; $z = -d + \sqrt{dd + 2dy + yy + xx}$, $zz = 2dd + 2dy + yy + xx - 2d\sqrt{dd + 2dy + yy + xx}$.

Dans le triangle rectangle GCM, $\overline{GC}^2 = \overline{GM}^2 + \overline{CM}^2$, $\frac{eezz}{dd} + \frac{2eez}{d} = yy - 2ey + xx$. Subſtituez à la place de zz & de z leur valeur, qu'on vient de trouver; il viendra $yy \frac{-2ddey - 2deey}{dd - ee} = -xx$, équation à un cercle, dont le rayon eſt $\frac{dde + dee}{dd - ee}$, comme on le connoîtra par la reduction, dont on ſe ſert dans les lieux Geometriques.

Dans

Dans le cercle on trouvera les mêmes reflexions & les mêmes refractions que n. 3. 4. Bien plus, comme tous les cercles ont les mêmes proprietez, ils auront tous deux points sur leurs diametres, dont les effets seront les mêmes, que ceux des points F, G de Fig. 189. pourveu que ces points ayent le même rapport avec le rayon. Soit donc f le rayon d'un cercle quelconque, & faisons comme $\frac{ddc+dee}{dd-ee}$ rayon du cercle de Fig. 189. est à f rayon d'un autre cercle : ainsi AF, d pris sur le diametre de Fig. 189. est à $\frac{ddf-eef}{dd+ef} = AF$ qui doit être pris sur le rayon du nouveau cercle. Et comme $\frac{ddc+dee}{dd-ee}$ rayon du cercle de Fig. 189. est à f rayon de cet autre cercle : ainsi AG, e pris sur le diametre de Fig. 189. est à $\frac{ddf-eef}{dd+df} = AG$ qui doit être pris sur le diametre du nouveau cercle. C'est pourquoi dans quelque cercle que ce soit, si l'on prend sur son diametre $AF = \frac{ddf-eef}{dd+ee}$, $AG = \frac{ddf-eef}{dd+df}$; les points F & G ainsi déterminez auront les mêmes proprietez par rapport à la reflexion & à la refraction, que les points F, G de Fig. 189.

3°. Lorsque Fig. 190. $A5 = A6$, & que AF n'est pas égale à AG; au lieu d'une Ovale du second genre, on décrit une hyperbole. Fig. 190.

Soit FA, c; $GA = SA, b$; $A5 = A6, z$; on aura $FC = F5 = FA + A5, c+z$; $GC = S6 = SA + A6, b+z$. Soit encore CM, x; AM, y; on aura $FM = FA - AM, c-y$; $GM = GA + AM, b+y$.

Dans les triangles rectangles CMF, CMG, $\overline{FC}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz + 2cy - yy = xx$; & $\overline{GC}^2 - \overline{GM}^2 = \overline{CM}^2$, $2bz + zz - 2by - yy = xx$. Donc $bz - cz = by + cy$; $z = \frac{by+cy}{b-c}$, $y = \frac{bz-cz}{b+c}$. On substituera cette valeur de z & celle de zz dans la premiere équation $2cz + zz + 2cy - yy = xx$; il vient $yy + by - cy = \frac{bbxx-2bcxx+ccxx}{4bc}$, équation à l'hyperbole rapportée à ses diametres, dont l'axe déterminé LA est $b - c = GA - AF = GA - GL$, ainsi $GL = AF$; le parametre est $\frac{4bc}{b-c}$; les foyers G, & F ; les sommets A, L.

Une proprieté de l'hyperbole, c'est que l'axe déterminé LA est égal à $GC - CF$, c'est-à-dire à la difference des lignes GC, FC tirées des foyers à un point quelconque C. En effet $GC - CF = b + z - c - z = b - c = LA$.

Une autre proprieté de l'hyperbole est que Figure 191. un rayon quelconque NC qui tombe sur la concavité CA, & qui tend au foyer G, se reflechit à l'autre foyer F. Ce qui doit arriver, si CP étant perpendiculaire sur la courbe AC, ou sur sa tangente bCd, l'angle NCb d'incidence est égal à l'angle FCd de reflexion ; & ces deux angles seront égaux, si les deux PCN, PCF le sont. Il faut donc prouver que les angles PCN, PCF sont égaux, ou ce qui est le même, que leurs sinus PN, PQ le sont. Fig. 191.

On a trouvé $y = \frac{bz - cz}{b+c}$, il faut mettre cette valeur dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$, pour faire $zz \frac{+4bcz}{b+c} - yy = xx$.

On a, comme auparavant, dans le triangle rectangle CMP, $ff - vv + 2vy - yy = xx$, où l'on mettra auſſi la valeur de y, & ce ſera $\frac{bff + cff - bvv - cvv + 2bvz - 2cvz}{b+c} - yy = xx$. Il faut comparer ces deux valeurs de xx, $zz \frac{+4bcz - 2bvz + 2cvz - bff - cff + bvv + cvv}{b+c} = 0$; dont le ſecond terme ſe comparera avec le ſecond de $zz - 2gz + gg = 0$. & l'on trouvera AP, $v = \frac{2bc + bz + cz}{b-c}$. Enſuite ſuivant Art. 1. n. 2. il ſuffit de démontrer $CG \times FP = CF \times GP$, pour conclurre $PQ = PN$, pour cela multipliez CG, $b+z$ par FP, $v-c$ & GP, $v+b$ par CF, $c+z$, & vous verrez que les deux produits ſont compoſez des mêmes termes avec les mêmes ſignes. C'eſt pourquoi tous les rayons NC qui tombent ſur la ſuperficie convexe AC, & qui tendent au foyer G, ſe réüniſſent au foyer F, & un miroir hyperbolique eſt un miroir ardent par reflexion.

Fig. 192. 4°. Lorſque Fig. 192. $As = A6$, & $AF = AG = AS$: on a $Fs = S6$, & par conſequent $FC = GC$; & les points F, G ſont toûjours également éloignez des points C, qui compoſeront la droite AC, laquelle eſt perpendiculaire ſur FG.

Fig. 193. Mais ſi étant $As = A6$, le point F eſt le même que le point A, Fig. 193. on décrira la droite AI; car c'eſt ſur elle, que ſe couperont les cercles, dont le centre eſt F & le rayon FC, avec les cercles dont le centre eſt G & le rayon $S6$ ou GI: parceque $A6$ ou AI eſt l'excez dont $S6$ ou GI ſurpaſſe AG ou AS.

Fig. 174. 194. 195. 5°. Après cela poſons Fig. 175. As plus petit que $A6$, & que leur raiſon eſt celle de e à d; l'Ovale ſe décrira de l'autre côté de A, & elle renfermera le point F, comme aux Figures 194. 195.

Nommons Figure 175. As, z; FA, c; AG, $b = SA$; nous aurons $Fs = FA + As$, $c + z = F2 = FC$ de Fig. 194. 195. nous aurons encore, Fig. 175. $e : d :: As$, $z : A6$, $\frac{dz}{e}$, & $S6 = SA + A6$, $b + \frac{dz}{e} = G2 = GC$, Fig. 194. 195. Nommons encore Fig. 194. 195. CM, x; AM, y; AP, v; PC, s. Nous aurons FM, $c - y$ ou $y - c$; GM, $b + y$; MP, $v - y$ ou $y - v$; FP, $v - c$; GP, $b + v$. Après avoir tiré les perpendiculaires PN, PQ, & ſuppoſé ce qu'on a dit, Art. 1. n. 2. il reſte à prouver, que $GP \times CF : FP \times GC ::$ ou $PN : PQ :: d : e$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz + 2cy - yy = xx$. Dans le triangle rectangle CMG, $\overline{CG}^2 - \overline{GM}^2 = \overline{CM}^2$, $\frac{2bdz}{e} + \frac{ddzz}{ee} - 2by - yy = xx$. Donc $y = \frac{ddzz + 2bdez}{2eee + 2cee} - \frac{eezz - 2ceez}{2eee}$. Subſtituons cette valeur de y à ſa place dans $2cy + zz + 2cy - yy = xx$, nous ferons $\frac{beezz + 2bdeez + cddzz + 2bcdez}{bee + cee} - yy = xx$.

Dans le triangle rectangle CMP, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ff - vv +$

$2vy - yy = xx$. Substituons encore ici la valeur de y, pour avoir $\frac{bcesf + ceesf - bcevv - ceevv + ddvxz + zbdevz - eevzz - zceevz}{bee + cee} - yy =$ xx, comparons ces deux valeurs de xx, & ordonnons ainsi les termes zz $\frac{+ zbdevz - zceevz - zbceez - zbcdez + bcesf + ceesf - bcevv - ceevv}{ddv - eev - bee - cdd} = o$. Il faut comparer le second terme de cette équation avec le second de $zz - 2gz + gg = o$. Pour en tirer $v = \frac{beez + cddz + bcee + bcde}{bde - cee + ddz - eez}$.

FP est $v - e$, multipliez par GC, $b + \frac{dz}{e}$; vous aurez $FP \times GC$; GP est $v + b$, multipliez par CF, $c + z$, vous aurez $GP \times CF$.

Si l'on divise $FP \times GC$ par e, & $GP \times CF$ par d, le quotient sera le même : ainsi $FP \times GC$ est à $GP \times CF$, ou PQ est à PN, comme e est à d.

La partie convexe AC, Fig. 194. ne sert pas aux refractions qu'on cherche ici, c'est-à-dire que le rayon GC qui est dans l'air & qui tombe sur le verre AC, ne se rompra pas en F; parceque pour s'approcher de la perpendiculaire PCK, il doit se rompre dans l'angle PCN. FIG. 194.

La partie concave AC serviroit aux reflexions, si elle étoit composée d'une matiere qui fit, que le sinus de l'angle d'inclinaison fût au sinus de l'angle reflechi comme e à d. Car alors le rayon d'incidence FC se reflechiroit en CN, comme s'il venoit du point G. Puisque l'angle d'inclinaison seroit FCP dont le sinus est PQ; & l'angle reflechi seroit PCN, dont le sinus est PN. De même tous les rayons NC, qui tendent vers G, se reflechiroient en CF, si la matiere du miroir donnoit la raison du sinus de l'angle d'inclinaison PCN au sinus de l'angle reflechi PCF, comme d à e.

Mais sa partie concave XC, Figure 195. servira aux refractions. Les rayons IC, qui sont dans l'air & tendent au point donné G, se rompront en entrant dans le verre XC, & iront au point donné F. Car PN sinus de l'angle PCG, ou de l'angle d'inclinaison $ICK = PCG$ est à PQ sinus de l'angle rompu PCF; comme d est à e. Au contraire les rayons LC qui seroient dans le verre ICK & tendroient au point F, se romproient dans l'air XCA, & se réüniroient au point G: parceque PQ sinus de l'angle PCF ou de l'angle d'inclinaison $LCK = PCF$ seroit à PN sinus de l'angle rompu PCG, comme e à d.

Si l'on fait AG, b: AF, c:: $A6$: As :: d : e. c'est-à-dire, que AG soit d; FA, e; on décrira un cercle.

ARTICLE III.

Les proprietez du troiſiéme genre d'Ovales.

I.

FIG. 176. 196. 197. VOyez Sect. 2. la maniere de décrire le troiſiéme genre d'Ovales Fig. 176. concevez les lignes droites $F5$, $H3$ tirées. Les lignes $F5$, $F3$ rayons du même cercle ſont égales ; HT, $H3$ auſſi rayons du même cercle ſont égales entr'elles & à $S6$.

Nommons FA, c ; $HA, b = SA$; $A5, z$ qui eſt l'excez dont $F5$ ou $F3$ ſurpaſſe FA ; ainſi $F5 = FA + A5$, $c + z = F3$. De plus $d : e :: A5, z : A6, \frac{ez}{d}$ excez dont $S6$ ſurpaſſe SA ; ainſi $S6 = SA + A6$, $b + \frac{ez}{d} = HT = H3$. Et la proprieté du troiſiéme genre d'Ovales eſt, que z excez dont $F3$ ſurpaſſe FA, ſoit à $\frac{ez}{d}$ excez dont $H3$ ſurpaſſe HA comme d eſt à e, puiſque ez produit des extrêmes eſt égal à $\frac{dez}{d} = ez$ produit des moyennes.

Les Figures 196. 197. ſont auſſi des Ovales du troiſiéme genre : parce-qu'elles ont été décrites, en faiſant que l'excez, dont FC ſurpaſſe FA, ſoit à l'excez, dont HC ſurpaſſe HA, comme d à e. Si l'on nomme donc FA, c ; HA, b ; l'excez dont FC ſurpaſſe FA, z ; on aura $FC = FA + z = c + z$; on aura encore $d : e :: z : \frac{ez}{d}$ excez dont HC ſurpaſſe HA, & HC ſera $HA + \frac{ez}{d} = b + \frac{ez}{d}$.

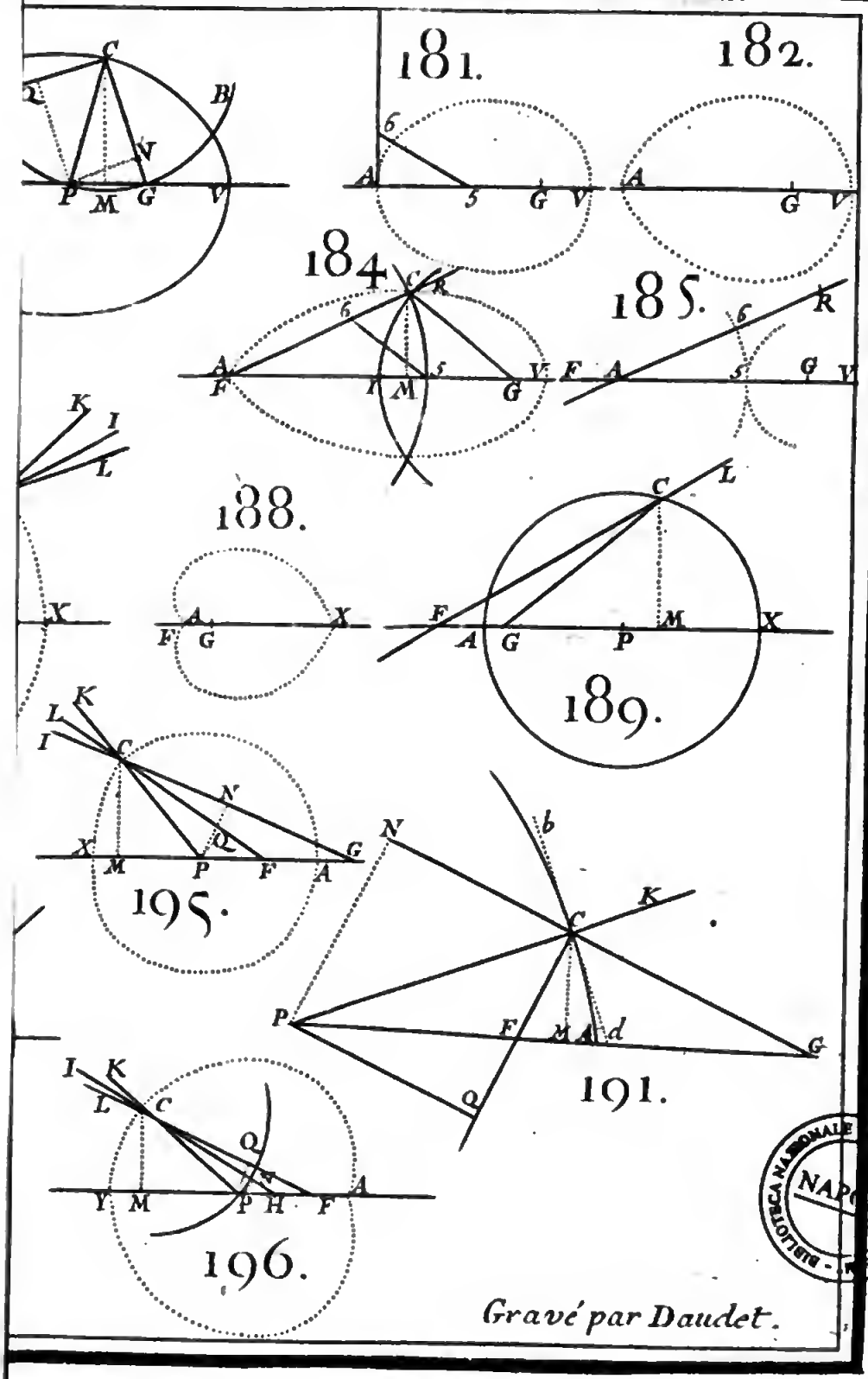
Les points C, c des Fig. 196. 197. répondront aux points 3, 3 de Fig. 176.

Dans ces trois Figures on ſuppoſe que la raiſon de d à e eſt celle du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui de l'air entre dans le verre.

Au point C, Fig. 196. tirez CP perpendiculaire ſur YC ; du même point C abaiſſez la perpendiculaire CM ſur AY. Nommez CM, x ; AM, y ; AP, v ; CP, s ; vous aurez $FM, y - c$; $HM, y - b$; $MP, y - v$; $FP, v - c$; $HP, v - b$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz - yy + 2cy = xx$. Dans le triangle rectangle CMH, $\overline{CH}^2 - \overline{MH}^2 = \overline{CM}^2$, $\frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} - yy + 2by = xx$. Donc $2cz + zz + 2cy = \frac{2bez}{d} + \frac{eezz}{dd} + 2by$; $y = \frac{2eddz + ddzz - 2bdez - eezz}{2bdd - 2cdd}$. Mettez cette valeur de y dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$, vous ferez $\frac{2bcddz + bddzz - 2bedez - eezz}{bdd - cdd} - yy = xx$.

Dans le triangle rectangle CMP, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ss - yy + 2vy - vv = xx$. Subſtituez encore la valeur de y, qui ſe reduit à $\frac{bddss - bdd\,v - cdds + cddvv + 2cddvz + ddvzz - 2bdevz - eevzz}{bdd - cdd} - yy = xx$. La comparaiſon de cette valeur de xx avec la precedente donne



Gravé par Daudet.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

$zz \frac{+2cddvz-2bdevz-2bcddz+2bcdez+bddff-bddvv-cddff+cddvv}{ddv-eev-bdd+cee}$
$= o$. Il faut comparer le ſecond terme de cette équation avec le ſecond de $zz - 2gz + gg = o$, & il vient $v = \frac{bddz-ceez+bcdd-bcde}{cdd-bde+ddz-eez}$. Ces preparations étant faites, voici la démonſtration.

II.

On ſuppoſe ici ce qui a été dit au commencement de n. 2. Art. 1. il reſte à faire voir que PQ eſt à PN, Fig. 196. ou que $HC \times FP$ eſt à $CF \times HP$, comme d à e. FIG. 196.

FP eſt $v - c$, HC eſt $b + \frac{cz}{d}$, multipliez les enſemble; HP eſt $v - b$, CF eſt $c + z$, multipliez les encore.

La premiere ſomme $HC \times FP$ étant diviſée par d, donne le même quotient que la ſeconde ſomme $CF \times HP$ étant diviſée par e: donc $d : e :: HC \times FP : CF \times HP :: PQ : PN$.

III.

Soit le rayon LC qui tombe de l'air ſur la ſurface convexe de verre YC, de ſorte que s'il ne ſe détournoit pas, il iroit en F: l'angle d'inclinaiſon eſt $LCK = PCF$, dont le ſinus eſt PQ. Or dans la refraction de la lumiere, qui entre de l'air dans le verre, il faut un angle rompu, dont le ſinus ſoit à PQ, comme e eſt à d: & PN ſinus de l'angle PCH eſt tel: donc PCH eſt l'angle rompu de l'angle d'inclinaiſon LCK, & CH le rayon rompu du rayon d'incidence LC; ainſi le rayon LC ira en H: de même tous les autres rayons qui ſont dans l'air, & qui tombent ſur YC, & qui étant prolongez iroient en F, ſe réüniront après la refraction en H.

Mutuellement les rayons HC qui ſont dans le verre, & qui partent du point H, ſe rompront en CL en tombant ſur la ſurface convexe de l'air YC, comme s'ils venoient du point F.

De plus ſuppoſons que l'eſpace LIC eſt du verre, & l'eſpace YCA de l'air.

Le rayon IC qui étant dans le verre tend vers H, ſe rompra ſur la ſurface YC de l'air, pour aller en F.

Mutuellement le rayon FC dans l'air ſe rompra en CI dans le verre, comme s'il venoit du point H.

IV.

Dans l'autre partie AC de l'Ovale: Fig. 197. on trouve les mêmes valeurs des quantitez; excepté que MP, qui étoit $y - v$, eſt $v - y$; MH, qui étoit $y - b$, eſt $b - y$; ce qui n'apporte aucune difference au calcul. Les effets ſont auſſi les mêmes; de ſorte que toutes les Ovales du troiſiéme genre ne ſervent qu'à la refraction de la lumiere. FIG. 197.

V.

Suppoſons $AF, c = 1 = FH$; $AH, b = 2$; l'équation eſt $\frac{25}{16}y^4 - \frac{25}{2}y^3 + 23yy + 24y + \frac{25}{2}xxyy - \frac{25}{2}xxy - 6xx + \frac{25}{16}x^4$.

VI.

Si l'on opere comme n. 6. Art. 1. en ſuppoſant que la Regle FE, Fig. 197. dont la longueur eſt arbitraire, tourne autour du point F; que la corde, dont la longueur eſt $EF - AF + 2AK + AH$, eſt attachée aux points E, H, & qu'elle ſe replie autour du point K; & enfin que AH eſt $2AF$. On trouvera $AK = \frac{bd^3 + 4bdde + bdee - 2be^3}{4d^3 - 4dde - 4dee + 4e^3}$.

Fig. 197.

La figure d'un cœur n'eſt jamais plus ſenſible au point A, que lorſque le point F tombe ſur le point A.

Lorſque la diſtance FH, Fig. 198. eſt fort petite, en comparaiſon de la diſtance FA, cette Figure paroît moins.

Fig. 198.

Lorſque Fig. 199. $As = A6$, les cercles décrits des centres F, H ſe touchent & décrivent une ligne droite As: parceque $S6 = Hs$.

Fig. 199.

Mais dès que As ſera plus petite que $A6$, les cercles ne ſe toucheront & ne ſe couperont pas.

ARTICLE IV.

Les proprietez du quatriéme genre d'Ovales.

I.

Voyez Sect. 2. Fig. 177. la maniere de décrire les Ovales du quatriéme genre. Concevez les lignes droites $F4$, $H4$ tirées. Les lignes Fs, $F4$ rayons du même cercle ſont égales; HT, $H4$ auſſi rayons du même cercle ſont égales entr'elles & à $R6$. Nommons FA, c; $HA, b = RA$; As, z qui eſt l'excez dont Fs ou $F4$ ſurpaſſe FA; ainſi $Fs = FA + As$ eſt $c + z$; enſuite $d : e :: As, z : A6, \frac{ez}{d}$, excez dont RA ſurpaſſe $R6$; ainſi $R6 = RA - A6$, $b - \frac{ez}{d} = HT = H4$. Et la proprieté du quatriéme genre eſt que z excez dont $F4$ ſurpaſſe FA ſoit à $\frac{ez}{d}$ excez dont HA ſurpaſſe $H4$, comme d eſt à e.

Fig. 177. 200. 201.

Les Ovales, Fig. 200. 201. ſont auſſi du quatriéme genre, parcequ'elles ont été décrites en ſuppoſant que l'excès dont FC ſurpaſſe FA, eſt à l'excès dont HA ſurpaſſe HC, comme d eſt à e. C'eſt pourquoi ſi l'on nomme FA, c; HA, b; l'excez dont FC ſurpaſſe FA, z; on aura $FC = FA + z = c + z$; on aura auſſi $d : e :: z : \frac{ez}{d}$ excès dont HA ſurpaſſe HC, & HC ſera $HA - \frac{ez}{d} = b - \frac{ez}{d}$. Les points C, C des Figures 200. 201. répondent donc aux points 4, 4 de Figure 177.

On ſuppoſe dans ces trois Figures que la raiſon de d à e eſt la même, que celle du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui paſſe de l'air dans le verre.

Du point C, Fig. 200. il faut tirer CP perpendiculaire ſur AC, du même point C abbaiſſer CM perpendiculaire ſur AZ; nommer CM, x; AM, y; AP, v; CP, s. On aura $FM, y - c$; $HM, b - y$; $MP, v - y$; $FP, v - c$; $HP, b - v$.

Dans le triangle rectangle CMF, $\overline{CF}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{CM}^2$, $2cz + zz + 2cy - yy = xx$. Dans le triangle rectangle CMH, $\overline{CH}^2 - \overline{HM}^2 = \overline{CM}^2$, $-2bez + \frac{eezz}{dd} + 2by - yy = xx$. Donc $y = \frac{ddzz + 2cddz}{2bdd} \frac{-eezz + 2bdez}{-2cdd}$. Il faut ſubſtituer cette valeur de y dans $2cz + zz + 2cy - yy = xx$, pour avoir $\frac{bddzz + 2bcddz - ceezz + 2bcdez}{bdd - cdd} - yy = xx$.

On a encore dans le triangle rectangle PCM, $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CM}^2$, $ss - vv + 2vy - yy = xx$, où il faut encore ſubſtituer la valeur de y, pour faire $\frac{bdds - bddvv - cdds + cddvv + ddvzz + 2cddvz - eevzz + 2bdevz}{bdd - cdd} - yy = xx$. On comparera cette valeur de xx avec la precedente, & il viendra $zz \frac{+2cddvz + 2bdevz - 2bcddz - 2bcdez + bdds - bddvv}{ddv - eev - bdd + cee} \frac{-cdds + cddvv}{}$, $= o$; dont le ſecond terme étant comparé avec le ſecond terme de l'équation $zz - 2fz + ff = o$, donne $v = \frac{bcdd + bcde + bddz}{cdd + bde - eez} \frac{-ceez}{+ddz}$.

II.

Après avoir ſuppoſé ce qui eſt au commencement de n. 2. Art. 1. il faut montrer que PQ eſt à PN, Fig. 200. ou que $HC \times FP$ eſt à $HP \times CF$, comme d eſt à e. Fig. 200.

FP eſt $v - c$, HC eſt $b - \frac{ez}{d}$ multipliez les enſemble; CF eſt $c + z$, HP eſt $b - v$, multipliez les encore.

La valeur de $HC \times FP$ diviſée par d donne le même quotient que $HP \times CF$ diviſée par e: ainſi $d : e :: HC \times FP : HP \times CF :: PQ : PN$.

III.

Si l'on avoit un miroir d'une matiere, qui fît que le ſinus PQ de l'angle d'inclinaiſon PCF fût à PN ſinus de l'angle reflèchi PCH; comme d à e: tous les rayons FC qui viendroient du point F, & tomberoient ſur la concavité AC; ſe reflèchiroient tous au point H.

Si au contraire la matiere de ce miroir faiſoit que le ſinus PN de l'angle d'inclinaiſon HCP fût à PQ ſinus de l'angle reflèchi PCF, comme e à d: tous les rayons d'incidence HC, qui viendroient du point H, ſe reflechiroient en F, après être tombez ſur la concavité AC.

On n'a point ici de refraction telle qu'on la cherche : car le rayon IC qui ſeroit dans l'air & tomberoit ſur la convexité AC du verre ACZ, devroit ſe rompre dans l'angle HCP, pour s'approcher de la perpendiculaire CP ; ainſi les rayons IC qui tendent vers le point donné H, ne ſe réuniroient pas à l'autre point donné F, comme on le demande.

IV.

FIG. 201. Au point C de l'autre partie ZC, Figure 201. on trouvera les mêmes proprietez, qu'au point C de la partie AC, FIG. 200.

V.

En ſuivant n. 5. Art. 1. l'équation de l'Ovale du quatriéme genre, dont $AF = 1 = \frac{1}{2} AH$ eſt $\frac{25}{16} y^4 - \frac{25}{2} y^3 + 43yy - 24y - \frac{15}{2} xxy + \frac{25}{8} xxyy - 6xx + \frac{25}{16} x^4 = 0$.

VI.

FIG. 200. Si vous ſuivez auſſi n. 6. Art. 1. en ſuppoſant la Regle, qui tourne autour du point F, d'une longueur arbitraire ; & la corde, qui eſt attachée au point H & à l'extrêmité E de la Regle, & ſe replie autour du point K, égale à $EA + 2AK + AH$; en ſuppoſant encore $AF = \frac{1}{4} AH$, & le point K entre F & H ; vous aurez $AK = \frac{bd^3 - 10bdde + 9bdee + 4be^3}{8d^3 + 8dde - 8dee - 8e^3}$ valeur negative. Ainſi le point K doit être pris de l'autre côté de A, en dehors de l'Ovale.

VII.

FIG. 202. 1°. Soit $As = A6$, FIG. 202. le point F ſur le point A. Du centre F décrivez par le point s un cercle qui paſſera par les points 6, Z ; mais $AH = AR$, & $A6 = Az$: donc $R6 = HZ$; & le cercle décrit du centre H, & du rayon $R6$, touchera le premier cercle au point Z ; & l'on décrira la ligne droite AZ.

FIG. 203. 2°. Mais étant $As = A6$, & le point F ſeparé du point A, Fig. 203. on décrit une ellipſe.

Nommons AF, c ; AH, $b = AR$; $As = A6$, z ; du centre F décrivons le cercle sC, nous aurons $FC = Fs = FA + As$, $c + z$; du centre H & du rayon $R6$, décrivons le cercle CL, nous aurons $HC = R6 = AR - A6$, $b - z$; ſur le point C de la courbe ACZ ainſi décrite tirez CP perpendiculaire ſur cette courbe, & du point C abaiſſez CM perpendiculaire à ZA. Nommons encore CM, x ; AM, y ; AP, v ; PC, s ; nous aurons $FM = AM - AF$, $y - c$; $HM = AH - AM$, $b - y$; $MP = AP - AM$, $v - y$; $FP = AP - AF$, $v - c$; $HP = AH - AP$, $b - v$.

Main

Maintenant dans les triangles rectangles CMF, CMH; $\overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$, $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$. $\overline{CH}^2 - \overline{HM}^2 = \overline{CM}^2$, $zz - 2bz + 2by - yy = xx$: donc $2cz + 2cy = -2bz + 2by$; $z = \frac{by - cy}{b+c}$; $y = \frac{bz + cz}{b-c}$. Et cette valeur de z étant miſe dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$, il vient $\frac{bbyy - 2bcyy + ccyy}{bb + 2bc + cc} + \frac{2bcy - 2ccy}{b+c} + 2cy - yy = xx$, qui ſe reduit à $\frac{bbxx + 2bcxx + ccxx}{4bc} = by + cy - yy$, lieu à l'ellipſe : dont l'axe, comme on le peut connoître par la reduction propre des lieux Geometriques, eſt $b + c = AH + AF = AZ$, donc $HZ = AF$. Son parametre eſt $\frac{4bc}{b+c}$, ſes ſommets ſont A, Z; ſes foyers F, H.

Une proprieté de l'ellipſe eſt que deux lignes FC, HC tirées des foyers F, H ſur un point quelconque C de la ligne elliptique, ſont enſemble égales à l'axe AZ. C'eſt ce qui ſe voit ici, car FC, $c + z + HC$, $b - z = AZ$, $b + c$.

Une autre proprieté de l'ellipſe eſt qu'un rayon quelconque FC de lumiere, qui part de l'un des foyers F & qui tombe ſur la concavité de l'ellipſe ſe reflechit à l'autre foyer H. Ce qui doit arriver, ſi PC étant perpendiculaire ſur l'ellipſe, ou ſur ſa tangente bCd, l'angle d'incidence FCd eſt égal à l'angle de reflexion HCb; & ces deux angles ſeront égaux, ſi les deux PCF, PCH le ſont. Il reſte donc à prouver que les angles PCF, PCH ſont égaux, ou ce qui revient au même, que les perpendiculaires PQ, PN, qui ſont leurs ſinus, ſont égales.

On vient de trouver $y = \frac{bz + cz}{b-c}$; ſubſtituez cette valeur dans $zz + 2cz + 2cy - yy = xx$; vous ferez $\frac{bzz - czz + 4bcz}{b-c} - yy = xx$. Le triangle rectangle PCM, vous donne à l'ordinaire $ff - vv + 2vy - yy = xx$, & la ſubſtitution de la même valeur de y, $\frac{bff - cff - bvv + cvv + 2bvz + 2cvz}{b-c} - yy = xx$. La comparaiſon de ces deux valeurs de xx produit l'équation $zz \frac{+4bcz - 2bvz - 2cvz - bff + cff + bvv - cvv}{b-c} = o$. Dont vous comparerez le ſecond terme avec le ſecond de $zz - 2fz + ff = o$, pour avoir AP, $v = \frac{2bc + bz - cz}{b+c}$.

On prouve que $PQ = PN$, ſi l'on fait voir, ſelon ce qui a été expliqué Art. 1. n. 2. que $CH \times FP = CF \times HP$. Or FP eſt $v - c$. Multipliez par CH, $b - z$; HP eſt $b - v$; multipliez par CF, $c + z$, les deux produits ſeront égaux.

3°. Soit As moindre que $A6$, Fig. 204. & $e : d :: As, z : A6$, $\frac{dz}{e}$; $FC = Fs = FA + As$, $c + z$; $HC = R6 = RA - A6$, $b - \frac{dz}{e}$. On décrira encore une ovale du quatriéme genre. Soit CM, x; AM, y; CP, s; AP, v; on aura $FM = AF - AM$, $c - y$; $HM = HA - AM$, $b - y$; $PM = AP - AM$, $v - y$; $FP = AP - AF$, $v - c$; $HP = HA - AP$, $b - v$; on trouvera de la même maniere qu'auparavant la valeur de v. Fig. 204.

Suivant ce qui a été dit, Art. 1. n. 2. on aura $PQ : PN :: e : d$, ſi l'on a $FP \times HC : HP \times CF :: e : d$. Le rayon FC ſe reflechira en CH, ſuppoſé que le miroir ACZ ſoit compoſé d'une matiere, qui faſſe que dans la reflexion de la lumiere PQ ſoit à PN comme e à d; multipliez en effet PF par HC, & HP par CF, vous aurez le même quotient en diviſant la valeur de $FP \times HC$ par e, & la valeur de $HP \times CF$ par d.

SECTION IV.

De la Reflexion & de la Refraction de la lumiere dans les courbes du premier genre.

Fig. 203. 1°. DAns l'ellipſe, on vient de voir Art. 4. n. 7. Fig. 203. qu'un rayon de lumiere FC, qui part du foyer F & qui tombe ſur la convexité elliptique, ſe reflechit à l'autre foyer H: de ſorte que ſi l'on fait un miroir elliptique, & qu'on mette une bougie allumée à un des foyers, tous ſes rayons ſe réüniront à l'autre foyer, & y formeront l'image de la flamme, qui eſt au premier foyer.

M. DESCARTES démontre dans ſa Dioptrique, Diſcours 8. que les rayons qui ſont dans l'air paralleles à l'axe d'un verre de Figure elliptique, & qui tombent ſur la ſurface convexe de ce verre, vont tous ſe réünir au foyer le plus éloigné de l'ellipſe, dont l'axe eſt à la diſtance des foyers comme d à e, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu.

Fig. 205. Soit Fig. 205. l'ellipſe ACZ, dont AZ eſt l'axe; A, Z, les ſommets; G, F les foyers; HC un rayon parallele à l'axe, qui tombe dans l'air ſur la convexité AC du verre ACZ: je dis que CF eſt le rayon rompu, ſi l'axe AZ eſt à FG diſtance des foyers F, G, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu. Au point C tirez PCK perpendiculaire ſur la courbe AC, PQ perpendiculaire ſur HC prolongée, PN ſur CF. Comme on l'a dit pluſieurs fois, PQ eſt le ſinus de l'angle PCQ, ou de l'angle d'inclinaiſon HCK; PN eſt le ſinus de l'angle rompu PCF. Soit E le centre de l'ellipſe. Abaiſſez CM perpendiculaire ſur AZ.

Puiſque $AZ : GF :: d : e$, je puis nommer AZ, d; GF, e; je nomme CF, z; donc $CG = AZ - CF$, $d - z$. Je nomme encore CM, x $= PQ$, AM, y; PC, s; AP, v. On aura $EG = EF$, $\frac{1}{2}e$; $EA = EZ$, $\frac{1}{2}d$; AF, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; AG, $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e$; GM, $y - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; FM, $\frac{1}{2}d$ $+ \frac{1}{2}e - y$; MP, $v - y$; PF, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - v$.

Il faut démontrer, qu'étant AZ, d; GF, e; HC le rayon d'incidence; PQ eſt à PN, comme d à e; 1°. Prenez les deux valeurs de xx dans les deux triangles rectangles CMG, CMF, vous trouverez $y = \frac{dd - 2dz + de}{2e}$;

ſubſtituez cette valeur de y dans l'équation $\overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CM}^2$. Cette derniere valeur ſera comparée avec une autre valeur de xx, que vous prendrez dans le triangle CMP, & dans laquelle vous aurez auparavant ſubſtitué la valeur trouvée de y. Cette comparaiſon donnera une grandeur $= o$, dont le ſecond terme comparé avec $- 2fz$ découvrira la valeur de AP, $v = \frac{dd + de - 2ez}{2d}$; PF eſt donc $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - v = \frac{ez}{d}$. Les triangles CMF, PNF ſont équiangles, donc $CF, z :: CM, x :: PF, \frac{ez}{d} : PN, \frac{ex}{d}$. Or $PQ, x : PN, \frac{ex}{d} :: d : e$. $ex = ex$.

Si la raiſon de l'axe AZ à la diſtance des foyers G, F étoit la raiſon de m à n, on trouveroit auſſi que PQ ſinus de l'angle d'inclinaiſon auroit la même raiſon à PN ſinus de l'angle rompu.

2°. Dans l'hyperbole on a vû Sect. 3. Art. 2. n. 7. Fig. 191. que tous les rayons NC, qui tombent ſur la concavité AC d'une hyperbole, & qui étant continuez iroient au foyer G, ſe reflechiſſent tous au foyer F. Fig. 191.

M. DESCARTES démontre dans ſa Dioptrique, Diſcours 8. que Fig. 206. le rayon quelconque HC, qui étant dans le verre, tombe ſur la ſurface concave AC d'une hyperbole, va en ſortant dans l'air, au foyer exterieur F: s'il étoit parallele à l'axe PAZ, & ſi la raiſon de l'axe déterminé AZ, à la diſtance FG des foyers eſt la même que celle de e à d, ou que celle du ſinus de l'angle d'inclinaiſon au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere qui paſſe du verre dans l'air. C'eſt-à dire que NC ſe rompra en CF. Fig. 206.

Soient donc AZ l'axe déterminé de l'hyperbole AC; G, F les foyers; puiſque $AZ : GF :: e : d$, je puis nommer AZ, e; GF, d; & le point E étant le centre des hyperboles, $EG = EF$, $\frac{1}{2}d$; $EA = EZ$, $\frac{1}{2}e$; AG, $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e$; AF, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$. Soit PC perpendiculaire ſur AC, & du point P tirez PN perpendiculaire ſur HC rayon d'incidence, PQ ſur FC prolongé; PN eſt le ſinus de l'angle d'inclinaiſon HCP; PQ eſt ſinus de l'angle PCQ ou de l'angle rompu FCK. Du point C menez CG au foyer G, & CM perpendiculaire ſur l'axe ZAP. Si l'on nomme CF, z; CG ſera $FC - AZ$, $z - e$, parceque comme on l'a dit, Sect. 3. Art. 2. n. 7. le diametre déterminé AZ eſt toûjours la difference des deux droites FC, GC tirées des deux foyers ſur un point C de l'hyperbole. Nommons encore $CM, x = PN$; AM, y; AP, v; PC, s. Nous aurons $GM, y - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; $FM, \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e + y$; $MP, v - y$; $PF, v + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$.

Prenez encore les valeurs de xx dans les triangles CMF, CMG, vous trouverez $y = \frac{2ez - ee - de}{2d}$ vous ſubſtituerez cette valeur de y dans l'équation $\overline{CF}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{CM}^2$. Cette derniere valeur ſera encore comparée avec une autre valeur de xx, que vous prendrez dans le triangle CMP, après avoir ſubſtitué la valeur de y dans celle-ci; cette comparaiſon donnera une grandeur $= o$, dont le ſecond terme comparé avec $- 2fz$ donne AP, $v = \frac{2dz - de - ee}{2e}$.

Après cela $PF = v + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e = \frac{dz}{e}$. Les triangles CMF, PQF sont équiangles, ainsi $CF, z : CM, x :: PF, \frac{dz}{e} : PQ, \frac{dx}{e}$. Or $PN, x : PQ, \frac{dx}{e} :: e : d$.

Quelque raison de m à n que l'on mette entre AZ axe déterminé & GF distance des foyers, elle se trouvera aussi entre PN sinus de l'angle d'inclinaison & PQ sinus de l'angle rompu.

FIG. 207. 3°. Dans le cercle, Fig. 207. tout rayon PC, qui part du centre P, & tombe sur la circonference concave d'un cercle se reflechit au même centre; parceque 18. 3. Eucl. PC est perpendiculaire sur la circonference.

Tout rayon KC qui tombe perpendiculaire sur la surface convexe du cercle, va au centre, & ne se rompt point.

Soit le rayon d'incidence HC, parallele au diametre AZ, & qui est dans l'air $ACKH$; qu'il se rompe en CF dans le verre $ACFZ$, dont la convexité AC est circulaire: de telle sorte que PQ perpendiculaire sur HC, & le sinus par consequent de l'angle PCQ, ou de l'angle d'inclinaison HCK, soit à PN perpendiculaire sur le rayon rompu CF, & sinus de l'angle rompu PCF; comme d à e, suivant la raison que demande la refraction de la lumiere, qui de l'air entre dans le verre. On cherche le point F, Du point C abaissez CM perpendiculaire sur AZ.

Nommons $AZ, 2a$; $AP = PZ, a = CP$; $CM, x = PQ$; AM, y; ZF, p, nous aurons $PF, a + p$; $MP, a - y$; $MF, 2a + p - y$; on a supp. $d : e :: PQ, x : PN, \frac{ex}{d}$. Dans les triangles rectangles PNF, MCF, on a cette Analogie $PN, \frac{ex}{d} : PF, a + p :: CM, x : CF, \frac{ad + dp}{e}$.

Dans les triangles CMF, CMP prenez les valeurs de xx, comparez les, & vous trouverez $pp - \frac{4aecp - 2add p + 2eeyp}{dd - ee} = \frac{4aace - 4add}{dd - ee}$ $\frac{2aeey}{}$, dont la racine fera voir que y ou AM changeant toutes les fois que le point C change; p, ou ZF, ou le point F change aussi; & les rayons HC paralleles au diametre AZ ne s'uniſſent pas en un seul point de ce diametre.

FIG. 208. 4°. Dans la parabole, Fig. 208. Les rayons HC paralleles à l'axe AP, qui tombent sur la surface concave AC, se reflechiſſent au foyer F. Soit CP perpendiculaire sur la ligne parabolique AC; PN sur le rayon d'incidence HC, PQ sur le rayon de reflexion CF, CM sur l'axe AP; bCd tangente.

Nommons le parametre, p; $CM, x = PN$; AM, y; on sçait par les Traitez des Sections coniques que $AF = \frac{1}{4}p$; $MP = \frac{1}{2}p$; $CF, y + \frac{1}{4}p$; ainsi $PF, \frac{1}{4}p + y$: donc $PF = CF$.

Dans les triangles rectangles & semblables CMF, PQF, $CF : CM :: PF : PQ$. Mais les deux antecedens CF, PF sont égaux: donc CM & PQ sont aussi égaux. Or $CM = PN$: donc $PQ = PN$, & l'angle d'inclinaison HCP, dont PN est le sinus. sera égal à l'angle reflechi PCK, dont PQ est le sinus.

Otez ces deux angles des deux droits PCb, PCd; il reſtera l'angle d'incidence HCb égal à l'angle de reflexion FCd. C'eſt pourquoi le rayon HC ſe reflechira en F. Et ſi l'on fait un miroir parabolique concave, les rayons du Soleil qui ſont paralleles à l'axe AP & qui tombent ſur la concavité AC ſe reflechiront au foyer F, où étant réünis ils bruleront.

Venons à la refraction, ſoit AC Fig. 206. la convexité parabolique du verre $ACQP$, dans lequel HC eſt un rayon parallele à l'axe AP. & qui ſort dans l'air $KCAF$; on demande le point F ſur l'axe, où le rayon d'incidence HC doit aller, CF ſera le rayon rompu. Soit G le foyer; PC perpendiculaire ſur la courbe AC; PN ſur le rayon d'incidence HC, & ſinus de l'angle d'inclinaiſon PCH; PQ ſur le rayon rompu CF prolongé, & le ſinus de l'angle PCQ, ou de l'angle rompu KCF; CM perpendiculaire ſur l'axe AP; tirez encore CG. Suppoſons enfin que PN eſt à PQ, comme e à d, ou ſuivant la raiſon, que ces ſinus doivent avoir dans la refraction d'un rayon qui paſſe du verre dans l'air. Fig. 206.

Nommons le parametre de la parabole, p; AG eſt $\frac{1}{4}p$; MP, $\frac{1}{2}p$. Soit CM, $x = PN$; AM, y; AF, r. Nous aurons AP, $y + \frac{1}{2}p$; MG, $y - \frac{1}{4}p$; $CG = GP = y + \frac{1}{4}p$, comme on l'a dit un peu auparavant; MF, $y + r$; PF, $y + \frac{1}{2}p + r$. Enſuite par l'hyp. $e : d :: PN, x : PQ, \frac{dx}{e}$. Et dans les triangles CMF, PQF équiangles, PQ, $\frac{dx}{e} : PF$, $y + \frac{1}{2}p + r :: CM$, x, CF, $\frac{ey + \frac{1}{2}ep + er}{d}$. Nommons encore à l'ordinaire CP, s.

Dans les triangles CMG, CMF prenez deux valeurs de xx, faites en une grandeur $= o$, ordonnez les termes & vous trouverez une grandeur, dont la racine ſera $y = -\frac{1}{2}p - r + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}ddpp + ddpr}{dd - ee}}$.

Le triangle CMP donne $ff - \frac{1}{4}pp = xx = py$ & $y = \frac{ff}{p} - \frac{1}{4}p = -\frac{1}{2}p - r + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}ddpp + ddpr}{dd - ee}}$, quarrez cette derniere équation, &c. ordonnez les termes, vous aurez une grandeur dont le ſecond terme comparé avec le ſecond de $rr - 2fr + ff = o$, donne $r = \frac{ecp}{2dd - 2ee} - y$, en ſubſtituant pour ff ſa valeur $py + \frac{1}{4}pp$.

Et comme la longueur de y varie chaque fois que C change de place, il ſuit que $AF = r$, ou le point F change auſſi, & les rayons KC ne ſe réüniſſent pas en un ſeul point.

La valeur de $r = \frac{ecp}{2dd + 2ee} - y = \frac{2}{3}p - y$, en ſuppoſant $e = 2$, $d = 3$, nous apprend, que dès que l'abſciſſe AM; y eſt plus grande que $\frac{2}{3}$ du parametre, la valeur de r devient negative, & qu'il la faut prendre de l'autre côté de A, c'eſt-à-dire en allant de A vers P; en un mot que le rayon d'incidence HC ne ſe rompt plus, mais qu'il ſe reflechit. La raiſon eſt, qu'alors les ſinus des angles HCP d'inclinaiſon ſont trop grands; pour avoir des ſinus correſpondans des angles rompus KCF.

FIG. 209. Mais Fig. 209. ſuppoſons que le rayon d'incidence HC parallele à l'axe AP eſt dans l'air, & qu'il tombe ſur le verre parabolique AC, & qu'il ſe rompt en F: on demande le point F.

Nommons les lignes, comme auparavant pour Fig. 206. excepté $MF = AF - AM$, $r - y$; $PF = AF - AP$, $r - y - \frac{1}{2}p$; de plus $d : e :: PN$, $x : PQ : \frac{ex}{d}$; & dans les triangles équiangles PQF, CMF, PQ, $\frac{ex}{d} : PF$, $r - y - \frac{1}{2}p :: CM$, $x : CF$, $\frac{dr - dy - \frac{1}{2}dp}{e}$.

Les triangles rectangles CMG, CMF donnent deux valeurs de xx; vous les comparerez pour en tirer la valeur de $y = -\frac{1}{2}p + r + \sqrt{-\frac{\frac{1}{4}eepp + eeppr}{dd - ee}}$.

Le triangle CMP donne encore $ff - \frac{1}{4}pp = py$. $\frac{ff}{p} + \frac{1}{4}p - r = \sqrt{-\frac{\frac{1}{4}eepp + eepr}{dd - ee}}$ d'où vous tirerez encore une grandeur $= o$, dont le ſecond terme comparé avec $-2fr$ découvre la valeur de r en ſubſtituant pour ff ſa valeur; $r = \frac{ddp}{2dd - 2ee} + y = AF$. Les rayons ſe rompront toûjours & ils ne ſe réüniront pas en un même point.

SECTION V.

La Figure qu'il faut donner aux verres, pour qu'ils réüniſſent à un point donné, les rayons qui viennent d'un autre point donné.

1. LE premier cas, que M. DESCARTES explique ici, eſt celui, dans lequel les verres ont l'une de leurs ſuperficies autant convexe, ou concave, que l'on veut. 2. Le ſecond cas eſt celui, dans lequel la convexité de l'une des ſuperficies a une proportion donnée avec la convexité de l'autre. 3. J'expliquerai quelques cas que M. DESCARTES n'a pas reſolu. 4. Je montrerai comment M. DESCARTES a pu trouver ce qu'il enſeigne ici touchant les verres, qui ſervent à la refraction de la lumiere.

ARTICLE I.

Les verres ont l'une de leurs ſuperficies autant convexe, ou concave, que l'on veut.

§. I. M. DESCARTES.

* Diſcours 8. MAis il faut maintenant, que je ſatisfaſſe à ce que j'ai omis en la* Dioptrique, lorſqu'après avoir remarqué, qu'il peut y avoir des verres de pluſieurs diverſes figures, qui faſſent auſſi bien

l'un que l'autre, que les rayons venant d'un même point de l'objet, s'aſſemblent tous en un autre point après les avoir traverſez. Et qu'entre ces verres, ceux qui ſont fort convexes d'un côté & concaves de l'autre, ont plus de force pour brûler, que ceux qui ſont également convexes des deux côtez : au lieu que tout au contraire ces derniers ſont les meilleurs pour les lunettes. Je me ſuis contenté d'expliquer ceux que j'ai cru être les meilleurs pour la pratique, en ſuppoſant la difficulté que les Artiſans peuvent avoir à les tailler. C'eſt pourquoi afin qu'il ne reſte rien à ſouhaiter touchant la Theorie de cette ſcience, je dois expliquer encore ici la figure des verres, qui ayant l'une de leurs ſuperficies autant convexe, ou concave, que l'on voudra, ne laiſſent pas de faire que tous les rayons, qui viennent vers eux d'un même point, ou paralleles, s'aſſemblent après en un même point, & celles des verres, qui font le ſemblable, étant également convexes des deux côtez, ou bien la convexité de l'une de leurs ſuperficies ayant la proportion donnée à celle de l'autre.

Comment on peut faire un verre autant convexe ou concave en l'une de ſes ſuperficies, qu'on voudra, qui raſſemble à un point donné tous les rayons, qui viennent d'un autre point donné.

Poſons pour le premier cas, que les points G, Υ, C, & F étant donnez, Fig. 210. 211. les rayons qui viennent du point G, ou bien qui ſont paralleles à GA, ſe doivent aſſembler au point F, après avoir traverſé un verre ſi concave, que Υ étant le milieu de ſa ſuperficie interieure, l'extrêmité en ſoit au point C, en ſorte que la corde CMC, & la flêche ΥM de l'air $C\Upsilon C$ ſont données.

AF eſt l'axe des courbes qu'on cherche, les points C, c appartiennent à ces courbes ; CM eſt perpendiculaire ſur AH, & une appliquée des deux courbes ; Y étant le ſommet de la courbe CYC, YM eſt une abſciſſe ; A étant le ſommet de la courbe CAC, AM en eſt une abſciſſe. La droite AG étant donnée de poſition avec le point C, la perpendiculaire CM, & le point M ſont connus ; lespoints Y, M, étant donnez ; la droite YM eſt encore connuë.

§. II. M. DESCARTES.

La queſtion va là, que premierement il faut conſiderer, de laquelle des Ovales expliquées, la ſuperficie du verre ΥC doit avoir la figure, pour faire que tous les rayons, qui étant dedans, ten-

Fig. 210. 211. dent vers un même point, comme vers *H*, qui n'eſt pas encore connu, s'aillent rendre vers un autre, à ſavoir vers *F*, après en être ſortis. Car il n'y a aucun effet touchant le rapport des rayons changé par reflexion ou refraction d'un point à un autre, qui ne puiſſe être cauſé par quelqu'une de ces Ovales.

Et on voit aiſément, que celui-ci le peut être par la partie de la troiſiéme Ovale, qui a tantôt été marquée 3*A*3. Fig. 176. ou par celle de la même, qui a été marqué 3*Y*3. Fig. 176. ou enfin par la partie de la ſeconde, qui a été marquée 2*X*2. Fig. 175.

On a vû Sect. 3. Art. 3. n. 3. que Fig. 196. 197. qui ſont les mêmes que Fig. 176. le rayon *IC* qui étant dans l'air *ICK* tend vers le point *H* du verre *ACY*, ſe rompt pour aller au point *F*, & Art. 2. n. 4. que Fig. 187. qui eſt la même que Fig. 175. le rayon *IC* qui eſt dans l'air *ICK* & tend vers le point *G*, ſe rompra dans le verre *XCA* pour aller au point *F*. On a prouvé la même choſe, Art. 2. n. 7. touchant la Fig. 195. dans laquelle *IC* qui tend vers *G*, ſe rompt en *F*. Nous dirons bientôt en quel cas chacune de ces Ovales ſert.

Quand M. DESCARTES dit, que ſes Ovales ſervent aux reflexions de la lumiere, cela, comme il l'a dit ailleurs, ſuppoſe une matiere qui change tellement la détermination du rayon d'incidence, que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon ſoit au ſinus de l'angle reflechi, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon dans la refraction eſt au ſinus de l'angle rompu.

§. III. M. DESCARTES.

Fig. 210. 211. ET pourceque ces trois tombent ici ſous le même calcul, on doit tant pour l'une que pour l'autre prendre *Y* pour leur ſommet, *C* pour l'un des points de leur circonference, & *F* pour un de leurs points brulans; après quoi il ne reſte plus à chercher que le point *H*, qui doit être l'autre point brûlant. Et on le trouve en conſiderant que la difference qui eſt entre les lignes *FC*, *FY*, doit être à celle, qui eſt entre les lignes *HY* & *HC*, comme *d* eſt à *e*; c'eſt-à-dire comme la plus grande des lignes, qui meſurent les refractions du verre propoſé, eſt à la moindre; ainſi qu'on peut voir manifeſtement de la deſcription de ces Ovales.

Fig. 176. 197. On n'a qu'à relire la ſeconde Section, & le commencement de l'Article 2. Sect. 3. où le point *A* eſt celui, qu'on nomme ici *Y*. On trouvera que

que la difference de FA & de FC, Fig. 197. ou de FA & de $F3$; Fig. 176. eſt $A5 = z$; & que la difference de HA & HC, Fig. 197. ou de $HA = SA$ & de $H3 = HT = S6$, Fig. 176. eſt $A6 = \frac{ez}{d}$; & que $A5 : A6 :: d : e$. Voilà pour le cas, où la courbe CYC, Fig. 210. 211. eſt la partie $3A3$, Fig. 176. ou la partie AC, Figure 197. & il eſt évident qu'alors la difference, qui eſt entre les lignes FY, FC, Fig. 210. 211. eſt à la difference, qui eſt entre les lignes HY, HC comme d à e.

Il faut démontrer que la raiſon de ces differences eſt encore la même, lorſque la courbe CYC, Fig. 210. 211. eſt la partie YC, Fig. 196. ou la partie $3Y3$, Figure 176. Venons à la Figure 212. Lorſqu'en décrivant l'Ovale ACY du troiſiéme genre, on a déterminé le ſommet Y; premierement du centre F on a décrit le demi-cercle $XV7$: donc $FY = F7$. Enſuite on a tiré la ligne $7\,8$, de telle ſorte que $A7 : A8 :: d : e$. Après cela l'on a pris la diſtance $S8$, & du centre H on a décrit l'arc YQ : donc $HY = S8$. Maintenant lorſqu'on a déterminé le point C, du centre F on a décrit le cercle $5C$: donc $FC = F5$. Enſuite on a tiré la ligne $5\,6$ parallele à $7\,8$, de ſorte que $A5 : A6 :: d : e$. Après cela l'on a pris la diſtance $S6$, & du centre H on a décrit l'arc Cq : donc $HC = S6$. C'eſt pourquoi la difference de $FY = F7$ & de $FC = F5$ c'eſt la ligne $5\,7$; la difference de $HY = S8$ & de $HC = S6$ c'eſt la ligne $6\,8$. Or par la conſtruction $A7 : A8 :: A5 : A6 : d : e$. & $A7 : A5 :: A8 : A6$. Mais $A5 : 5\,7 :: A6 : 6\,8$. & $A5 : A6 :: 5\,7 : 6\,8 :: d : e$. Donc $5\,7$ difference de FY, FC eſt à $6\,8$ difference de HY, HC; comme d eſt à e. Fig. 212.

On peut démontrer de la même façon, Fig. 175. 187. que la difference de FX & de FC ou $F2$ eſt à la difference de GX & de GC ou $G2$: comme d eſt à e. On peut encore faire la même choſe, Fig. 195. à l'égard de la difference des lignes GX, GC & de la difference des lignes FX, FC.

Au reſte toutes ces Ovales tombent ſous le même calcul, puiſque comme on l'a pû remarquer, Sect. 3. les calculs de toutes les Ovales ne different, que par le changement de quelques ſignes + —.

§. IV. M. DESCARTES.

Et pourceque les lignes FY, FC ſont données, leur difference l'eſt auſſi; & enſuite celle qui eſt entre HY, HC, pourceque la proportion qui eſt entre ces deux differences eſt donnée. Et de plus à cauſe que YM eſt donnée, la difference qui eſt entre MH & HC l'eſt auſſi; & enfin pourceque CM eſt donnée, il ne reſte plus qu'à trouver MH le côté du triangle rectangle CMH, dont on a l'autre côté CM, & on a auſſi la difference qui eſt entre CH la baſe; Fig. 210. 211.

& MH le côté demandé : d'où il eſt aiſé de le trouver. Car ſi on prend k pour l'excès de CH ſur MH, & n pour la longueur de la ligne CM, on aura $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pour MH.

Les lignes FY, FC ſont connuës, parceque les points F, C, Y ſont donnez. Je nomme a la difference des lignes FY, FC.

Je ſçai encore que la difference des lignes FY, FC eſt à la difference des lignes HY, HC, comme d eſt à e. Si je fais donc, $d : e :: a : \frac{ae}{d}$, ce quatriéme terme ſera la difference connuë des lignes HY, HC; de ſorte que ſi la plus grande HY eſt m, la moindre HC eſt $m - \frac{ae}{d}$.

De plus YM eſt auſſi connuë, comme nous l'avons dit dès le commencement de cet Article ; nommons la b, HM ſera $HY - YM$, $m - b$; & la difference de HC & de HM, ou $HC - HM$ ſera $m - \frac{ae}{d} - m + b = b - \frac{ae}{d}$, que j'appelle k avec M. DESCARTES, & qui eſt toute connuë.

Soit maintenant MH, r; CH eſt $MH + k = r + k$; ſoit auſſi CM, n; qui eſt connuë. On aura $\overline{CH}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MH}^2$, $2kr = nn - kk$; $r = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k = MH$. & $CH = \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k$.

§. V. M. DESCARTES.

F. c. 210. 211. Et après avoir ainſi le point H, s'il ſe trouve plus loin du point Y, que n'en eſt le point F; la ligne CY doit être la premiere partie de l'Ovale du troiſiéme genre, qui a tantôt été nommée $3A3$. Mais ſi HY eſt moindre que FY, ou bien elle ſurpaſſe FH de tant, que leur difference eſt plus grande à raiſon de la toute FY, que n'eſt e la moindre des lignes qui meſurent les refractions comparée avec d la plus grande ; c'eſt-à-dire que faiſant $HF = c$. & $HY = c + b$; db eſt plus grande que $2ce + eb$: & lors CY doit être la ſeconde partie de la même Ovale du troiſiéme genre, qui a tantôt été nommé $3Y3$. Ou bien db eſt égale ou moindre que $2ce + eb$: & lors CY doit être la ſeconde partie de l'Ovale du ſecond genre, qui a ci-deſſus été nommée $2X2$. Et enfin ſi le point H eſt le même que le point F, ce qui n'arrive que lorſque FY, FC ſont égales, cette ligne YC eſt un cercle.

1. Fig. 211. le point H eſt plus loin du ſommet Y, que le point F : ainſi il faut trouver une ſurface CYC, qui termine d'un côté le verre $CACY$, & qui ſoit telle, qu'un rayon quelconque bc, qui traverſe le verre, &

tend vers H, ſe rompe au point C, par où il entre dans l'air, de telle ſorte qu'il aille en F. Or cela arrivera, ſi la ſurface CYC, Fig. 211. eſt la même que la ſurface $3A3$, Fig. 176. ou AC, Fig. 197. car on a fait voir, Sect. 3. Art. 3. n.4. que Fig. 197. le rayon IC qui eſt dans le verre LCK, & qui tend vers H, ſe rompra en F. Or dans Fig. 197. Le point H eſt plus éloigné du ſommet A que le point F, comme Fig. 211. le point H eſt plus éloigné du ſommet Y que le point F.

2. Fig. 210. HY eſt moindre que FY, & le point H eſt plus près du ſommet Y, que le point F. Alors ſi $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a plus grande raiſon à FY que e à d; la courbe CYC doit être la partie $3Y3$ de Fig. 176. ou CY de Fig. 196. parceque cette partie d'une Ovale du troiſiéme genre a cette proprieté.

Par la deſcription de l'ovale du troiſiéme genre, Fig. 212. on a $HY - HA = S8 - SA = A8$, parceque $HY = S8$, $HA = SA$; on a $FY - FA = F7 - FA = A7$, parceque $FY = F7$. Fig. 212.

Mais l'on a vû que $A8 : A7 :: e : d$; donc $HY - HA : FY - FA :: e : d$.

Dans cette proportion l'antecedent $HY - HA = A8$ eſt moindre que $FY - FA = A7$, & l'antecedent e moindre que le conſequent d: mettant FA dans le premier antecedent $HY - HA$, ce ſera $HY - HA + FA = HY - HF$; mettons encore FA dans le premier conſequent $FY - FA$, ce ſera $FY - FA + FA = FY$: donc $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a plus grande raiſon à FY, que e à d. Soit donc HF, c; la difference de HY & de HF, b; ſi vous coupez $Hf = HF$, c; la difference de HY & de Hf eſt Yf, b; donc HY ſera $Hf + fY$, $c + b$; & $FY = FH + HY$, $2c + b$; il ſuit donc que b a plus grande raiſon à $2c + b$ que e à d. Donc le produit db des extrêmes eſt plus grand que le produit $2ce + eb$ des moyennes dans la partie $3Y3$ d'une Ovale du troiſiéme genre.

Quand même le point F tomberoit ſur le point A, l'ovale auroit la proprieté, qu'on vient de démontrer.

3. Etant Fig. 210. HY moindre que FY, & le point H plus près du ſommet Y que le point F; alors ſi $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a moindre raiſon à FY que e à d; la courbe CYC doit être la partie $2X2$ de l'ovale du ſecond genre, Fig. 175. Il faut montrer que telle eſt la proprieté de cette partie $2X2$, lorſque les points F, A ſont ſeparez. Fig. 210. 175.

Suppoſons que Fig. 175. le ſommet X & le point 7 ſont le même. Par la deſcription de l'Ovale du ſecond genre, on a $SA = GA$; $S8 = GX$; $GX - GA = S8 - SA = A8$; $AX = A7$. Mais $A8 : A7 :: e : d$; donc $GX - AG : AX :: e : d$. Mais $GX - GF$ eſt moindre, que $GX - AG$; donc $GX - GF$ aura moindre raiſon à AX, que e à d. Or

FX eſt plus grande que AX: donc $GX - GF$ aura beaucoup moindre raiſon à FX, que e à d. Soit GF, c; $GX - GF$ ou la difference de GX & de GF, h; GX eſt $c + h$; $FX = FG + GX$, $2c + h$. donc h a moindre raiſon à $2c + h$, que e à d. & le produit dh des extrêmes eſt moindre que $2ce + eh$ produit des moyennes. De ſorte que c'eſt là une proprieté de la partie $2X2$ des Ovales du ſecond genre.

Que ſi l'on fait reflexion que les points $2XG$ de Fig. 175. ſont les mêmes, que les points CYH de Fig. 210. on connoîtra que Fig. 210. $HY - HF$ ou la difference h de HY, FH a moindre raiſon à FY $2c + h$, que e à d.

4. Etant Fig. 210. HY moindre que FY, & le point H plus près du ſommet Y que le point F; alors ſi $HY - HF$, ou la difference de HY & de HF a la même raiſon à FY que e à d; la courbe CYC doit encore être la partie $2X2$ de l'Ovale 175. du ſecond genre, mais en ſuppoſant que le point F tombe ſur le point A, comme il arrive Fig. 188.

Concevons donc que Fig. 175. les points F, A, & les points 7, X ſont les mêmes. On a $SA = GA$; $S8 = GX$; $GX - GA$ ou $GX - GF = S8 - SA = A8$; AX ou $FX = A7$. Mais $A8 : A7 :: e : d$; donc $GX - AG$ ou $GX - FG$ eſt à AX ou FX, comme e à d. Soit GF ou GA, c; $GX - GF$ ou $GX - GA$, ou la difference de GX & de GF, ou de GX & de GA, h; GX eſt $c + h$; FX ou $AX = FG + GX$ ou $AG + GX$, $2c + h$; donc $h : 2c + h :: e : d$. $dh = 2ee + eh$. Ainſi c'eſt là une proprieté de la partie $2X2$ de l'Ovale du ſecond genre, lorſque le point F tombe ſur le point A.

On connoîtra comme auparavant, que Fig. 210. $HY - HF$ ou la difference h de HY & de HF a la même raiſon à FY, $2c + h$, que e à d.

5. Lorſque le point H eſt le même que le point F, Fig. 210. c'eſt-à-dire lorſqu'on veut que tout rayon bc qui eſt dans le verre $CACY$, & qui tend au point F, arrive à ce point, après qu'il ſera entré dans l'air CYF; alors il ne ſouffre point de refraction au point C, ce qui prouve qu'il étoit perpendiculaire ſur la courbe CYC. Mais une proprieté du cercle eſt que les rayons qui tombent dans un milieu perpendiculaires ſur ſa convexité CYC, tendent tous à un ſeul point, qui eſt ſon centre s & qu'ils y arrivent après être entrez même dans un autre milieu : donc dans ce cas CYC eſt un arc de cercle dont F eſt le centre; & $FY = FC$.

§. VI. M. DESCARTES.

Fig. 210. 211. Après cela il faut chercher CAC l'autre ſuperficie de ce verre, qui doit être une ellipſe, dont H ſoit le point brûlant, ſi on ſuppoſe que les rayons qui tombent deſſus, ſoient paralleles; & alors

il eſt aiſé de la trouver. Mais ſi on ſuppoſe qu'ils viennent du point G, ce doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre, dont les deux points brûlans ſoient G & H, & qui paſſe par le point C: d'où on trouve le point A pour le ſommet de cette Ovale, en conſiderant, que GC doit être plus grande que GA d'une quantité, qui ſoit à celle dont HA ſurpaſſe HC, comme d à e. Car ayant pris k pour la difference, qui eſt entre CH & HM, ſi on ſuppoſe x pour AM, on aura $x-k$, pour la difference qui eſt entre AH & CH; puis ſi on prend g pour celle, qui eſt entre GC & GM, qui ſont données, on aura $g+x$ pour celle, qui eſt entre GC & GA, & pourceque cette derniere $g+x$ eſt à l'autre $x-k$, comme d eſt à e; on a $ge+ex=dx-dk$, ou bien $\frac{ge+dk}{d-e}$ pour la ligne x ou AM, par laquelle on détermine le point A, qui étoit cherché.

1. Fig. 205. le rayon HC tend au point F. De même Fig. 211. le rayon Bb, qui eſt dans l'air parallele à GA tombant ſur la ſurface elliptique CAC, de verre, ſe rompra au point b, de ſorte qu'il ira dans le verre par la ligne bc au point H, qui eſt le foyer le plus éloigné du ſommet A, pourveu que l'axe ſoit à la diſtance des foyers comme d eſt à e, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui de l'air entre dans le verre.

Voici comment on trouvera cette ellipſe, Fig. 213. dont un foyer H, & un point C de la circonference ſont donnez, avec $HC=\frac{nn}{2k}+\frac{1}{2}k$, & $HM=\frac{nn}{2k}-\frac{1}{2}k$, telles qu'on les a trouvées §. 4. pour Figures 210. 211. Car on ſuppoſe que les points A, C, H & la ligne CM de Fig. 213. ſont les mêmes que les points A, C, H & la ligne CM de Fig. 211. Soit Fig. 213. F le foyer de l'ellipſe ACZ qui eſt le plus près du ſommet A, joignez FC, & nommez-la z. Fig. 212. 213.

Par la nature de l'ellipſe les deux lignes HC, FC tirées des foyers à un point C de la circonference, ſont égales à l'axe AZ: donc $AZ=\frac{nn}{2k}+\frac{1}{2}k+z$. De plus par l'hyp. j'aurai la diſtance FH des foyers, en faiſant $d:e::$ le diametre AZ, $\frac{nn}{2k}+\frac{1}{2}k+z:FH$, $\frac{enn}{2dk}+\frac{ke}{2d}+\frac{ez}{d}$; donc $FM=FH-HM$, $\frac{enn}{2dk}+\frac{ke}{2d}+\frac{ez}{d}-\frac{nn}{2k}+\frac{1}{2}k$. CM eſt n, §. 4.

Le triangle rectangle CMF donne l'équation $zz-\frac{4dek^3+4deknnz}{4ddkk-4eekk}=\frac{-4eek^3z-4eeknnz}{4ddkk-4eekk}=\frac{2ddkknn+ddk^4+2dek^4+2eekknn+een^4-2den^4+deen^4+eek^4}{4ddkk-4eekk}$, ou $zz+2fz=gg$ en faiſant $\frac{-4dek^3+4deknn-4eek^3}{4ddkk-4eekk}=-4eeknn=-2f$, & ce qui eſt dans le ſecond membre égal à gg. Enſuite $zz-2fz+ff=ff+gg$; $z=f=\sqrt{ff+gg}=CF$, ce qui détermine

le foyer F, & la longueur de FH, dont le milieu I eſt le centre de l'ellipſe. Je connois encore l'axe $AZ = \frac{nn}{2k} + \frac{1}{2}k + z$; dont la moitié IA détermine le ſommet A. Toutes ces choſes étant connuës, il eſt aiſé de décrire l'ellipſe ZCA, Fig. 213. & d'en couper le ſegment CAC, qui convient au verre de Fig. 211. lorſque les rayons EC, Bb tombent ſur le verre CA paralleles à l'axe AH.

Fig. 210. 179. 3. Lorſque Fig. 210. les rayons GC viennent d'un point G de l'axe, la convexité CAC eſt la premiere partie AC, Figure 179. d'une Ovale du premier genre, dont les foyers ſont F, G Figure 179. qui ſont les points G, H Fig. 210.

Or on a fait voir Sect. 3. Art. 1. n. 3. que Fig. 179. le rayon FC, qui eſt dans l'air, ſe rompt au point C, & va dans le verre au point G.

Ainſi Fig. 210. le rayon GC qui eſt dans l'air, ſe rompra pour aller dans le verre en H; de même le rayon Gb, ſe rompra pour aller dans le verre au point H, ſi tout l'eſpace ACH eſt de verre : mais comme le verre finit en CYC, le rayon bc ſe rompra de nouveau en c pour aller en F, comme l'on a dit §. 2.

A preſent il s'agit de déterminer le ſommet A de l'Ovale CAC, Fig. 210. étant donnez les points G, C, H, M. Par la nature de l'Ovale du premier genre la difference de GC & de GA eſt à la difference de HC & de HA, comme d eſt à e.

Mettons HC, b; la difference de CH & de HM, qui eſt connuë, k; HM ſera $b - k$. Nommons AM, x; la toute $HA = HM + AM$ ſera $b - k + x$; ſouſtrayons CH, b de HA, $b - k + x$; la difference ſera $x - k = AH - CH$.

Mettons auſſi GC, c; & g la difference de GC & de GM, qui eſt connuë; la ligne GM ſera $c - g$; & $GA = GM - AM$, $c - g - x$; ſouſtrayons GA de GC, la difference eſt $g + x = GC - GA$.

Mais $d : e :: GC - GA$, $g + x : AH - CH$, $x - k$. Donc $ge + ex = dx - dk$; $x = \frac{eg + dk}{d - e} = AM$. Et parcequ'on a le point M, on aura le ſommet A; avec lequel & les foyers G, H, on décrira l'Ovale CAC du premier genre.

ARTICLE II.

La convexité de l'une des ſuperficies des verres a la proportion donnée avec la convexité de l'autre.

M. DESCARTES.

POſons maintenant pour l'autre cas, Fig. 214. 215. qu'on ne donne que les points *G*, *C* & *F*, avec la proportion qui eſt entre les lignes *AM* & *YM*, & qu'il faille trouver la Figure du verre *ACY*, qui faſſe que tous les rayons, qui viennent du point *G*, s'aſſemblent au point *F*. Fig. 214. 215.

Comment on peut faire un verre, qui ait le même effet, que le precedent: & que la convexité de l'une de ſes ſuperficies ait la proportion donnée avec celle de l'autre.

On peut dérechef ici ſe ſervir de deux Ovales, dont l'une *AC* ait *G* & *H* pour ſes points brûlans; & l'autre *CY* ait *F* & *H* pour les ſiens. Et pour les trouver, premierement ſuppoſant le point *H* qui eſt commun à toutes deux être connu, je cherche *AM* par les trois points *G*, *C*, *H*, en la façon tout maintenant expliquée; à ſavoir prenant *k* pour la difference, qui eſt entre *CH* & *HM*, & *g* pour celle qui eſt entre *GC* & *GM*: & *AC* étant Fig. 214. la premiere partie de l'Ovale du premier genre, j'ai $\frac{ge+dk}{d-e}$ pour *AM*. Puis-je cherche auſſi *MY* par les trois points *F*, *C*, *H*, en ſorte que *CY* ſoit la premiere partie d'une Ovale du troiſiéme genre; & prenant *y* pour *MY*, & *f* pour la difference, qui eſt entre *CF* & *FM*, j'ai *f* + *y* pour celle, qui eſt entre *CF* & *FY*: puis ayant déja *k* pour celle, qui eſt entre *CH* & *HM*, j'ai *k* + *y* pour celle qui eſt entre *CH* & *HY*, que je ſçai devoir être à *f* + *y*, comme *e* eſt à *d*, à cauſe de l'Ovale du troiſiéme genre, d'où je trouve que *y* ou *MY* eſt $\frac{fe-dz}{d-e}$. Puis joignant enſemble les deux quantitez trouvées pour *AM* & *MY*, je trouve $\frac{ge+fe}{d-e}$ pour la toute *AY*. D'où il ſuit que de quelque côté que ſoit ſuppoſé le point *H*, cette ligne *AY* eſt toûjours compoſée d'une quantité, qui eſt à celle dont les deux enſemble *GC* & *CF* ſurpaſſent la toute *GF*, comme *e* la moindre des deux lignes qui ſervent à meſurer les refractions du verre propoſé eſt à *d* — *e* la difference qui eſt entre ces deux lignes; ce qui eſt un aſſez beau Theorême.

Or ayant ainſi la toute AY, il la faut couper ſelon la proportion que doivent avoir ſes parties AM & MY; au moyen de quoi, pour ce qu'on a déja le point M, on trouve auſſi les points A & Y, & enſuite le point H par le Problême precedent. Mais auparavant il faut regarder, ſi la ligne AM ainſi trouvée eſt plus grande que $\frac{ge}{d-e}$, ou plus petite, ou égale. Car ſi elle eſt plus grande, on apprend de là que la courbe AC, Fig. 214. doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre, & CY la premiere d'une du troiſiéme, ainſi qu'elles ont été ici ſuppoſées. Au lieu que ſi elle eſt plus petite, cela montre que c'eſt CY, Fig. 215. qui doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre; & que AC doit être la premiere d'une du troiſiéme. Enfin ſi AM eſt égale à $\frac{ge}{d-e}$, les deux courbes AC, & CY, Figure 216. doivent être deux hyperboles.

1. Dans ce cas on donne la proportion d'une convexité à l'autre, c'eſt-à-dire que l'on vous détermine la proportion que la ligne AM, dont le point A eſt le ſommet d'une convexité CA, doit avoir avec la ligne MY, dont le point Y eſt le ſommet de l'autre convexité CY. Car on n'entend pas autre choſe ici par la proportion des convexitez: de ſorte que ſi AM étoit égale à MY, on diroit que les convexitez CA, CY ſont égales, quoique l'une des lignes courbes, comme AC fût en effet bien differente de l'autre courbe CY, & que la courbure de l'une fût beaucoup plus grande que la courbure de l'autre.

Comme ce cas doit produire les mêmes effets que le precedent; il ne doit pas ſeulement traiter des rayons d'incidence, qui partent d'un point G de l'axe GA, & qui vont ſe réünir à un autre point F du même axe: mais encore des rayons, qui viennent dans l'air paralleles à l'axe GA, & qui doivent ſe réünir à un point donné F. Voyez n. 7. ſuivant, pourquoi M. DESCARTES n'a rien dit des rayons paralleles.

2. La convexité CA, Fig. 214. du verre ACY eſt la même, que la premiere partie AC, Fig. 179. d'une Ovale du premier genre. Les foyers G, H de l'Ovale CA, Fig. 214. ſont les mêmes que les foyers F, G de l'ovale CA, Figure 179. Ainſi il eſt certain, ſuivant ce qui a été expliqué, Sect. 3. Art. 1. n. 3. que tout rayon Gb, Fig. 214. qui eſt dans l'air, & qui tombe ſur la convexité AC du verre ACY, ſe rompra au point b, pour aller au foyer H, & il y iroit, ſi tout l'eſpace ACH étoit de verre. Mais parceque le verre eſt terminé par la courbe CcY, le rayon Gb, ne fera que le chemin bc. De plus la convexité CY, Fig. 214. eſt la même que la premiere partie AC, Figure 197. d'une Ovale du troiſiéme genre; & leurs foyers ſont les points F, H. Ainſi

Fig. 214. 179. 197.

Ainſi ſelon ce qui a été dit, Sect. 3. Art. 3. n, 3. il eſt encore certain que le rayon *bc*, Fig. 214. qui eſt dans le verre *ACY*, & qui tend au point *H*, ſe rompra au point *c* pour aller dans l'air au point *F*. C'eſt pourquoi le verre *ACY*, Fig. 214. réünira au point *F* les rayons qui viennent du point *G*.

La convexité *CA*, Fig. 215. du verre *ACY* eſt la même, que la premiere partie *AC*, Fig. 197. d'une Ovale du troiſiéme genre. Les foyers *G*, *H* de l'Ovale *CA*, Fig. 215. ſont les mêmes que les foyers *F*, *H* de l'Ovale *CA*, Fig. 197. Donc par l'Art. 3. n. 3. Sect. 3. le rayon *Gb*, Fig. 215. qui eſt dans l'air, & qui tombe ſur la convexité *CA* du verre *CAY*, ſe rompra dans ce verre en *bc*, comme s'il venoit du point *H*, & qu'il eût ſuivi dans le même milieu la droite *Hbc*. Après cela la convexité *CY*, Fig. 215. eſt la même que la premiere partie *AC*, Fig. 179. d'une Ovale du premier genre. Les foyers *H*, *F* de l'Ovale *CY*, Fig. 215. ſont les mêmes que les foyers *G*, *F* de l'Ovale *AC*, Fig. 179. Donc par l'Art. 1. n. 3. Sect. 3. le rayon *bc*, Fig. 215. qui va dans le verre *ACY*, comme s'il venoit du foyer *H*, & qui tombe dans l'air au point *c*, ſe rompra pour aller au foyer *F*. D'où il ſuit que le verre *ACY*, Figure 215. raſſemblera au point *F* les rayons qui viennent du point *G*. Fig. 215. 197. 179.

Le verre *ACY*, Figure 216. eſt convexe des deux côtez; la convexité *AC* eſt une hyperbole, dont le ſommet eſt *A*, & *G* le foyer exterieur; la convexité *CY* eſt encore une hyperbole, dont le ſommet eſt *Y*, *F* le foyer exterieur; une proprieté commune à ces deux hyperboles eſt, que la diſtance de leurs deux foyers eſt à leur axe déterminé comme *d* à *e*, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle rompu dans la refraction, que la lumiere ſouffre en entrant de l'air dans le verre. Ainſi il eſt évident par ce qui a été demontré, Sect. 4. n. 2. qu'un rayon quelconque *Gb*, qui eſt dans l'air, & qui tombe ſur la convexité *CAb* du verre *CAY*, ſouffre refraction au point *b*, & qu'il ira par *bc* dans le verre, de telle ſorte que *bc* ſoit parallele à l'axe *GA*. Il eſt encore évident, que ce rayon *bc*, qui entre dans l'air au point *c*, ſe rompra pour aller au foyer exterieur *F*. Il ſuit donc que le verre hyperbolique *ACY* convexe des deux côtez réünira au point *F* les rayons qui viennent du point *G*. Fig. 216.

Les trois verres, Fig. 214. 215. 216. peuvent donc reſoudre le ſecond cas du Problême pour les rayons, qui viennent d'un point donné *G* de l'axe *GA*, & qui doivent ſe réünir au point *F* du même axe. Il reſte à examiner quand c'eſt que chacun de ces verres doit ſervir.

3. Fig. 214. Les points *G*, *C*, *F* ſont donnez avec la proportion de la ligne *AM* à la ligne *MY*; *A* doit être le ſommet de *CbA*, qui eſt la premiere partie d'une Ovale du premier genre, dont les foyers ſont *G* donné, *H* inconnu; *Y* doit être le ſommet de *CcY*, qui eſt la premiere partie d'une Ovale du troiſiéme genre, dont les foyers ſont *F* donné, *H* inconnu. Fig. 214.

Fig. 214. Je regarde le foyer H, qui eſt commun aux deux Ovales, comme donné; c'eſt-à-dire, que je le ſuppoſe là où je veux.

Je cherche la valeur de la droite AM par les trois points G, C, H.

Je nomme HC, r; la difference de CH & de HM, k; HM ſera donc $r-k$.

Je nomme encore AM, x; la toute HA ſera $r-k+x$. Si je ſouſtrais HC, r de HA, $r-k+x$, il reſtera $HA-HC$, $-k+x$ pour la difference de HA & de HC.

Je nomme GC, c; la difference de GC & de GM; g; GM ſera donc $c-g$; & $GA=GM-MA$, $c-g-x$; ſi l'on ſouſtrait GA, $c-g-x$ de GC, c; il reſte $GC-GA$, $g+x$ pour la difference de GC & de GA.

Mais par la nature de l'Ovale du premier genre, Sect. 3. Art. 1. n. 1. $d:e::g+x$ difference de GC & de GA : $x-k$ difference de HA & de HC. Donc $x=\frac{ge+dk}{d-e}=AM$, proprieté de la premiere partie des Ovales du premier genre.

On doit à preſent chercher la ligne droite YM par les trois points F, C, H. On nommera CF, h; la difference de CF & de FM, f; FM ſera donc, $h-f$; il faut encore nommer MY, y; la ligne $FY=FM-FY$ ſera $h-f-y$. Si l'on ſouſtrait FY, $h-f-y$ de CF, h; il reſte $CF-FY$, $f+y$ pour la difference de CF & de FY.

On nommera comme auparavant CH, r; la difference de CH & de HM, k; HM ſera $r-k$; $HY=HM-MY$, $r-k-y$. Si l'on ſouſtrait HY, $r-k-y$ de HC, r; il reſte $HC-HY$, $k+y$ pour la difference de CH & de HY.

Mais par la nature de l'Ovale du troiſiéme genre, Sect. 3. Art. 2. n. 1. $d:e::f+y$ difference de CF & de FY : $k+y$ difference de CH & de HY. Donc $y=\frac{ef-dk}{d-e}=MY$.

Ajoûtons AM, $\frac{ge+dk}{d-e}$ avec MY, $\frac{ef-dk}{d-e}$; la ſomme $\frac{eg+ef}{d-e}$ eſt la ligne AY, qui eſt toute connuë.

Après cela je coupe AY en deux parties, qui ayent la proportion donnée de AM à MY; afin de déterminer la longueur des lignes AM, MY, & par conſequent les ſommets A, Y.

Lorſque vous connoiſſez les trois points C, Y, F; vous cherchez par le Problême du premier cas, Art. 1. le point H, qui eſt encore inconnu, ce que vous ferez ainſi.

Les points F, C, Y ſont connus; donc les lignes FY, FC le ſont encore, auſſi bien que leur difference, que j'appelle a. Mais par la nature de l'ovale du troiſiéme genre $d:e:a$, la difference de FC, & de FY: $\frac{ae}{d}$ difference de HY & de HC. Et ſi vous nommez la plus grande HC, m; la plus petite HY ſera $m-\frac{ae}{d}$. Nommez la connuë YM, y; vous aurez $HM=HY+YM$, $m-\frac{ae}{d}+y$, que vous nommerez s.

De CH, m ſouſtrayez HM, $m - \frac{ae}{d} + y$, il reſte $\frac{ae}{d} - y$ difference de CH & de MH, que vous appellerez k, & CH ſera $HM + k = s + k$. Nommez auſſi la connuë CM, n.

Dans le triangle rectangle CMH, $\overline{CH}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{HM}^2$, $ss + 2ks + kk = nn + ss$; $2ks = nn - kk$; $s = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$, qui étant toute connuë donne le point cherché H.

Il faut remarquer 1° que $AM = \frac{eg + dk}{d - e}$ eſt plus grande que $\frac{ge}{d - e}$, ou que la quantité dk eſt poſitive, & que c'eſt là une proprieté de la premiere partie des ovales du premier genre, 2° que la toute AY eſt $\frac{ef + eg}{d - e}$; or $\frac{ef + eg}{d - e} : f + g :: e : d - e$. C'eſt-à-dire que AY, $\frac{ef + eg}{d - e}$ eſt à f difference de CF & de FM, $+ g$ difference de GC & de GM, ou que AY eſt aux deux quantitez dont GC & CF ſurpaſſent FG : comme e la moindre des quantitez qui meſurent la refraction de la lumiere, qui paſſe de l'air dans le verre, ou du verre dans l'air, eſt à $d - e$ difference des deux quantitez qui meſurent cette refraction.

4. Fig. 215. Les points G, C, F ſont donnez avec la proportion de la ligne AM à la ligne AY. A doit être le ſommet de CAb, qui eſt la premiere partie d'une Ovale du troiſiéme genre, dont les foyers ſont G donné, H inconnu; Y doit être le ſommet de CYc, qui eſt la premiere partie d'une Ovale du premier genre, dont les foyers ſont F donné, H inconnu. Je regarde le foyer H, qui eſt commun aux deux ovales, comme donné. Fig. 215.

Je cherche AM par les trois points G, C, H. Je nomme HC, r; la difference de HC & de HM, k; HM ſera $r - k$; & nommant AM, x; j'aurai $HA = HM - AM$, $r - k - x$; je ſouſtrais HA de HC, il reſte $k + x$ pour la difference de HA & de HC.

On trouve comme n. 3. $g + x$ pour la difference de GC & de GA.

Maintenant par la nature de l'ovale du troiſiéme genre, Sect. 3. Art. 3. n. 1. $d : e :: g + x$ difference de GC & de GA: $k + x$ difference de HC & de HA: donc $x = \frac{eg - dk}{d - e} = AM$.

Je cherche YM par les points F, C, H. On trouve comme n. 3. $f + y$ pour la difference de FC & de FY, étant MY, y.

On vient de trouver HM, $r - k$; $HY = HM + MY$ eſt $r - k + y$. Souſtrayons HC, r de HY, $r - k + y$; il reſte $y - k$ pour la difference de HC & de HY.

Maintenant par la nature de l'ovale du premier genre, Sect. 3. Art. 1. n. 1. $d : e :: f + y$ difference de FC & de FY: $y - k$ difference de HC & de HY. Donc $y = \frac{ef + dk}{d - e} = YM$.

Ajoûtons AM, $\frac{eg - dk}{d - e}$ à YM, $\frac{ef + dk}{d - e}$; la toute AY eſt $\frac{eg + ef}{d - e}$ connuë ſi l'on coupe AY ſelon la proportion donnée de AM à MY; l'on aura la longueur des lignes AM, MY; & les ſommets A, Y.

Après que vous connoiſſez les points, C, Y, F; vous cherchez par le

Problême du premier cas, Article 1. le point H, qui reſte encore inconnu.

Les points F, C, Y étant connus, les lignes FY, FC ſont connuës, avec leur difference, que je nomme a. Mais par la nature de l'Ovale AYc du premier genre, $d : e :: a$, difference de FC & de FY: $\frac{ae}{d}$, difference de HY & de HC; & ſi l'on nomme la moindre HC, m; la plus grande HY ſera $m + \frac{ae}{d}$; & $HM = HY - YM$, $m + \frac{ae}{d} - y$, que je nomme s.

De HC, m ſouſtrayons HM, $m + \frac{ae}{d} - y$; il reſte $y - \frac{ae}{d}$, difference de HC & de HM, que je nomme k; & HM étant s; HC ſera $s + k$. Soit $CM = n$.

Dans le triangle rectangle HCM l'on trouvera comme n. 3. $s = \frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k = MH$, ce qui donne le point cherché H.

Il faut remarquer 1° que $AM = \frac{eg - dk}{d - e}$ eſt plus petite que $\frac{ge}{d-e}$, & que c'eſt là une proprieté de la premiere partie des Ovales du troiſiéme genre. 2°. Que la toute AY eſt $\frac{eg + ef}{d - e}$, &c. comme n. 3. à la fin.

Fig. 216. 205. 5. Fig. 216. Les points G, C, F ſont donnez avec la proportion de AM à MY; la convexité CAb eſt une hyperbole, dont le foyer exterieur eſt G; la convexité CYc eſt encore une hyperbole, dont le foyer exterieur eſt F.

Cherchons MY par les points F, C. On a trouvé Sect. 4. n. 2. Fig. 206. CF, $z = \frac{2dy + de + ee}{2e}$, étant F le foyer exterieur de l'hyperbole AC, FA diſtance du foyer F au ſommet A, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; AM, y. L'hyperbole CYc, Fig. 216. a auſſi d pour la diſtance de ſes foyers, e pour ſon axe déterminé; YM, y; elle aura donc auſſi FY diſtance du foyer F au ſommet Y, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; & $FC = \frac{2dy + de + ee}{2e}$. Donc $FC - FY$ difference de FC & de FY, $\frac{2dy + de + ee}{2e} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e = \frac{dy}{e}$.

De plus $FM = FY + YM$, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e + y$; & $FC - FM$ difference de FC & de FM, $\frac{2dy + de + ee}{2e} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e - y = \frac{dy - ey}{e}$. Or 16. 6. Eucl. $\frac{dy - ey}{e} : \frac{dy}{e} :: d - e : d$.

Enſuite nommons FC, z; la difference connuë de FC & de FM, f; FM ſera $z - f$; & $FY = FM - YM$, $z - f - y$. Souſtrayons FY de FC, le reſte $f + y$ eſt la difference de FY & de FC. De ſorte que ſi dans l'analogie $\frac{dy - ey}{e} : \frac{dy}{e} :: d - e : d$, nous ſubſtituons f pour $\frac{dy - ey}{e}$, parceque ces deux valeurs ſont la difference de FC & de FM; & $f + y$ pour $\frac{dy}{e}$, parceque ces deux valeurs ſont la difference de FC & de FY: nous aurons cette nouvelle analogie $f : f + y :: d - e : d$, & $y = \frac{ef}{d - e} = YM$.

Cherchons à preſent AM par les points G, C. L'hyperbole CA eſt ſemblable à l'hyperbole CY, c'eſt-à-dire que la diſtance des foyers eſt auſſi à l'axe determiné comme d à e; & AM étant x, GC ſera $\frac{2dx + de + ee}{2e}$,

comme FC étoit $\frac{2dy+de+ee}{2e}$, étant $MY=y$; GA ſera auſſi $\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}e$. Donc $GC-GA=\frac{2dx+ee+de}{2e}-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}e=\frac{dx}{e}$, difference de GC & de GA.

On a $GM=GA+AM$, $\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}e+x$, & $GC-GM$, $\frac{2dx+de}{2e}+\frac{ee}{2e}-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}e-x=\frac{dx-ex}{e}$, & $\frac{dx-ex}{e}:\frac{dx}{e}::d-e:d$.

Après cela appellons GC, e; la difference connuë de GC & de GM, $g=\frac{dx-ex}{e}$; GM ſera $e-g$; $GA=GM-AM$, $e-g-x$. Souſtrayons GA de GC, le reſte $g+x$ eſt la difference de GC & de $GA=\frac{dx}{e}$. De ſorte que ſi dans l'analogie precedente, nous ſubſtituons g pour $\frac{dx-ex}{e}$, $g+x$ pour $\frac{dx}{e}$; ce ſera $g:g+x:d-e:d$, & $x=\frac{eg}{d-e}$.

La ligne $AY=AM+MY$ eſt donc $\frac{ef+eg}{d-e}$, toute connuë. On la coupe, &c.

Il faut remarquer 1° que AM eſt égale à $\frac{eg}{d-e}$, & que c'eſt-là une proprieté des hyperboles. 2°. Que AY eſt $\frac{eg+ef}{d-e}$, &c. comme n. 3. à la fin.

6. De ce que l'on a expliqué n. 3. 4. 5. nous conclurrons avec M. DESCARTES, 1° que de quelque côté que l'on ſuppoſe le foyer H, la ligne AY eſt toûjours $\frac{eg+ef}{d-e}$, & qu'elle eſt toûjours compoſée d'une quantité, qui eſt à celle, dont les deux GC, FC ſurpaſſent GF; comme e la moindre des deux lignes, qui ſervent à meſurer les refractions du verre propoſé ACY, Fig. 214. 215. 216. eſt à $d-e$ la difference qui eſt entre ces deux lignes. 2°. Que ſi la ligne $AM=\frac{eg+dk}{d-e}$ eſt plus grande que $\frac{eg}{d-e}$, comme il eſt arrivé n. 3. Fig. 214. la courbe AC doit être la premiere partie d'une Ovale du premier genre, & CY la premiere d'une ovale du troiſiéme. Au lieu que ſi $AM=\frac{eg-dk}{d-e}$ eſt moindre que $\frac{eg}{d-e}$, comme n. 4. Fig. 215. la courbe AC doit être la premiere partie d'une ovale du troiſiéme genre, & CY la premiere d'une ovale du premier genre. Enfin ſi AM eſt égale à $\frac{ge}{d-e}$, n. 5. Fig. 216. Les deux courbes AC, CY doivent être des hyperboles. CA étant une hyperbole, CY peut encore être l'ellipſe, dont nous allons parler.

7. Fig. 214. Les points F, C, ſont donnez avec la proportion de AM à MY, & il faut que les rayons gb, qui ſont dans l'air paralleles à l'axe GA, aillent, après avoir traverſé le verre ACY, ſe réünir au point F. Fig. 214. 215.

La convexité CAb doit être une ellipſe, dont le foyer le plus éloigné du ſommet A ſoit H, & dont l'axe ſoit à la diſtance des foyers, comme d eſt à e. Car on a démontré, Sect. 4. n. 1. que le rayon bg ſe rompra alors en entrant dans le verre au point b, & ira par bc, de ſorte qu'il tendra au foyer H. Et parceque le rayon bc, lorſqu'il ſort du verre au point c, ſouffre une nouvelle refraction, il faut que la convexité CYc ſoit la premiere partie d'une ovale du troiſiéme genre, dont les foyers ſoient F, H; car les rayons qui dans le verre tendent au point H, ſe réüniſſent au point F, Sect. 3. Art. 3. n. 3.

Enſuite ſi comme n. 3. on cherche MY par les points F, C, H, c'eſt $y = \frac{ef - dk}{d - e}$.

Après cela l'on cherche AM par les points C, H. On a trouvé, Sect 4. n. 1. Fig. 205. CF, $z = \frac{dd + de - 2ey}{2d}$, étant F le foyer le plus éloigné du ſommet A de l'ellipſe ; AM, y ; FA diſtance du ſommet A au foyer F, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$. L'ellipſe CA, Fig. 214. a auſſi d pour ſon axe, e pour la diſtance des foyers, étant AM, x ; elle aura donc auſſi AH diſtance du foyer le plus éloigné au ſommet A, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e$; & HC, $\frac{dd + de - 2ex}{2d}$. Ainſi $HA - HC$ difference de HA & de HC ſera $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - \frac{dd - de + 2ex}{2d} = \frac{ex}{d}$.

De plus $HM = HA - AM$, $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e - x$; & $HC - HM$ difference de HC & de HM, $\frac{dd + de - 2ex}{2d} - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}e + x = \frac{dx - ex}{d}$. Or 16. 6. Eucl. $\frac{dx - ex}{d} : \frac{ex}{d} :: d - e : e$. Parceque le produit des extrêmes & des moyennes eſt le même.

Maintenant nommons HC, r ; la difference de HC & de HM, k ; HM ſera $r - k$; & $HA = HM + MA$, $r - k + x$. Souſtrayons HC de HA, le reſte $x - k$ eſt la difference de HC & de HA. De ſorte que ſi dans l'analogie on ſubſtituë k pour $\frac{dx - ex}{d}$, $x - k$ pour $\frac{ex}{d}$; on aura $x = \frac{dk}{d - e} = AM$.

Ainſi la toute $AY = AM + MY$ ſera $\frac{ef}{d - e}$, qui eſt connuë, parceque les points C, F étant donnez, les lignes FC, FM, & leur difference f ſont connuës. On diviſera donc AY ſuivant la proportion donnée de AM à MY, ce qui déterminera la longueur des lignes AM, MY, & les ſommets A, Y.

Après cela l'on cherchera comme n. 3. le foyer H, qui eſt encore inconnu.

Comme ce cas, où l'on demande que les rayons bc, qui tombent ſur le verre ACY ſoient paralleles à l'axe GA, n'eſt pas fort different de celui qui a été expliqué n. 3. c'eſt peut-être pour cela que M. DESCARTES n'en a rien dit.

ARTICLE III.

De quelques cas, que M. DESCARTES *n'a pas reſolus.*

M. DESCARTES.

ON pourroit étendre ces deux Problêmes à une infinité d'autres cas, que je ne m'arrête pas à déduire, à cauſe qu'ils n'ont aucun uſage dans la Dioptrique.

On pourroit auſſi paſſer outre, & dire, lorſque l'une des ſuperficies du verre eſt donnée, pourveu qu'elle ne ſoit que toute plate, ou compoſée de Sections coniques, ou de cercles, comment on doit faire ſon autre ſuperficie, afin qu'il tranſmette tous les rayons d'un point donné à un autre point donné. Car ce n'eſt rien de plus difficile, que ce que je viens d'expliquer; ou plûtôt c'eſt choſe beaucoup plus facile, à cauſe que le chemin en eſt ouvert. Mais j'aime mieux, que d'autres le cherchent, afin que s'ils ont encore un peu de peine à le trouver, cela leur faſſe d'autant plus eſtimer l'invention des choſes, qui ſont ici démontrées.

1. Les Figures convexes & concaves des ovales n'ont évidemment aucun uſage dans la Catoptrique : puiſque nous ne connoiſſons point de matiere, qui détermine l'angle d'incidence & de reflexion à être tel ; que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon ſoit au ſinus de l'angle reflechi, comme dans la refraction le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle rompu.

Ces mêmes Figures ovales ne ſont pas d'un grand uſage dans la Dioptrique ; non plus que les elliptiques & hyperboliques ; non ſeulemeut à cauſe de la difficulté qu'il y a à les travailler : mais encore parcequ'ils ne réüniſſent pas en un ſeul point les rayons, qui viennent de chaque point de l'objet, qui eſt autour de l'axe. De là vient, qu'on voit très-peu de verres elliptiques & hyperboliques, & qu'on n'en voit aucun d'ovales, tels qu'on vient de les décrire.

L'experience a fait connoître, que la Figure Spherique étoit la plus propre à produire les effets, qu'on attend des verres travaillez : peut-être parcequ'elle réünit mieux qu'aucune autre en chaque point de l'image tous les rayons, qui viennent de chaque point de l'objet.

2. Soit donnée, Fig. 217. la ligne *ADC*, qui ſelon M. DESCARTES peut être une droite, ou un cercle, ou une Section conique. Soit encore donné le point *G* ſur l'axe *GA*, duquel partent les rayons incidens *GC*, *GD*. Soit auſſi donné le point *H* ſur ce même axe, où ces rayons après avoir traverſé *AC ca* doivent tous ſe réünir. Il faut trouver la courbe *cda*, qui produiſe cet effet. Fig. 217.

1°. Je prend le point *C*, qui deſlors eſt donné, par lequel je tire *RCP* perpendiculaire à la ligne *ADC*. Je coupe *CR* d'une longueur arbitraire, que je diviſe en deux également au point *V*; d'où comme centre, & de l'intervale *VC* je décris le demi-cercle *CTR*, qui coupe *GC* en *S*. Enſuite je joints *RS*, & j'inſcrits *RT*, qui ſoit à *RS*, comme *e* à *d*, & je mene *TCcF*. *CF* eſt le rayon rompu de l'incident *GC* : car l'angle *GCR* eſt l'angle d'inclinaiſon, l'angle *PCF* ou ſon égal *TCR* eſt l'angle rompu.

Mais par le Theorême de Trigonometrie, Liv. 1. Part. 3. Sect. 1. Art. 2. Dans le triangle rectangle RSC, comme CR eſt au ſinus total : ainſi RS eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon SCR ou GCR. Et dans le triangle rectangle RTC, comme CR eſt au ſinus total : ainſi RT eſt au ſinus de l'angle rompu TCR. Donc 11. 5. Eucl. RS eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon : comme RT eſt au ſinus de l'angle rompu ; & RS peut être pris pour le ſinus de l'angle d'inclinaiſon, & RT pour le ſinus de l'angle rompu. Or par la conſtruction $RS : RT :: d : e$; dont le rayon CF a les conditions neceſſaires pour être le rayon rompu de GC. On trouvera de la même maniere tous les rayons rompus Df des autres rayons incidens GD, de ſorte que les points C, D étant pris à volonté, les points F, f ſont connus. Ce qui prouve que la ligne donnée ADC peut être une ligne droite, & même toute courbe, dont on ſaura tirer les perpendiculaires ſur chaque point C, D ; parceque deſlors on trouvera les rayons rompus, qui répondent aux rayons d'incidence.

Fig. 217. 218. 2°. Nous avons donc Fig. 218. qui eſt la même que Fig. 217. les rayons Cc, Dd, qui ſont dans le verre, qui tendent à differens points F, f de l'axe GA, & qui doivent tous ſe réünir dans l'air au point donné H.

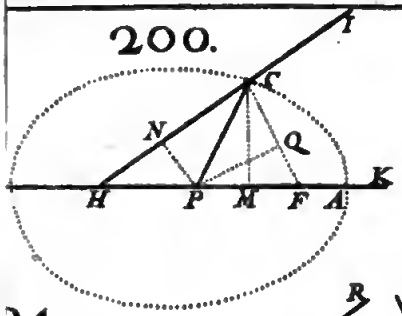
Il faut dans ce cas chercher l'un après l'autre, chaque point c, d, afin qu'en les joignant, on décrive la courbe cda cherchée.

Cherchons le point c, qui eſt dans le rayon rompu CcF, dont les points C, F ſont connus, la perpendiculaire CM détermine le point M, le point H eſt encore donné : & je prends le point a pour le ſommet de la courbe cda.

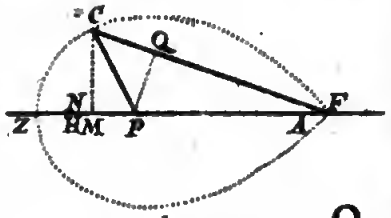
Ces choſes étant connuës on cherchera comme Art. 1. à quelle courbe appartient le point c, en examinant ſi le point F eſt plus près, ou plus loin du point a que le point H, ſi dh eſt plus grande, moindre ou égale à $2ce + eh$. Et l'on trouvera que le point c appartient à la premiere partie d'une Ovale du troiſiéme genre dont H, F ſont les foyers, ſi le point H eſt plus loin du point a que le point F ; mais ſi H eſt plus près que F, alors le point c appartiendra à la ſeconde partie d'une Ovale du troiſiéme genre, pourveu que dh ſoit plus grande que $2ce + eh$; & il appartiendra à la ſeconde partie d'une Ovale du ſecond genre, lorſque dh eſt égale ou moindre que $2ce + eh$; enfin ſi le point F eſt le même que le point H, le point c appartiendra à un cercle dont H eſt le centre. Ce qui a été aſſez expliqué, Art. 1.

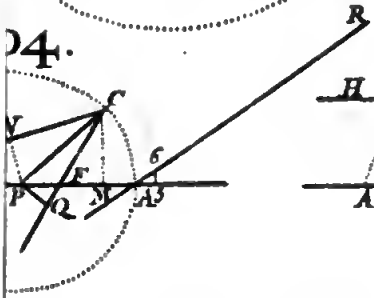
Suppoſons que le point c appartient à la ſeconde partie d'une Ovale du troiſiéme genre. Du point F comme centre, de l'intervale Fa décrivez l'arc aB, qui coupera la ligne Fc en B ; du point H l'arc ab, qui coupera la ligne Hc en b ; cB eſt la difference de Fc & de Fa ; bc la difference de Hc & de Ha, abaiſſez cm perpendiculaire ſur GA. Nommons les connuës FC, a ; CM, f ; FM, h ; HM, k ; & comme Sect. 3. Art. 3.

200.

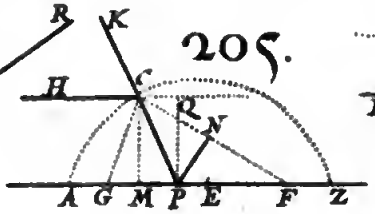


201.

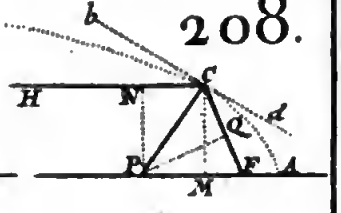




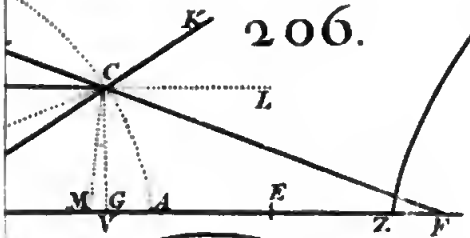
205.



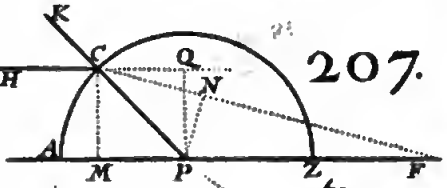
208.



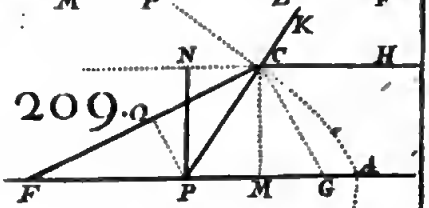
206.



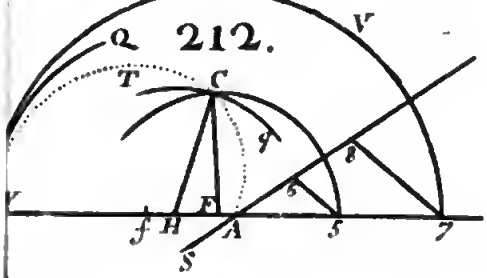
207.



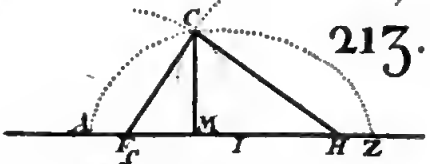
209.

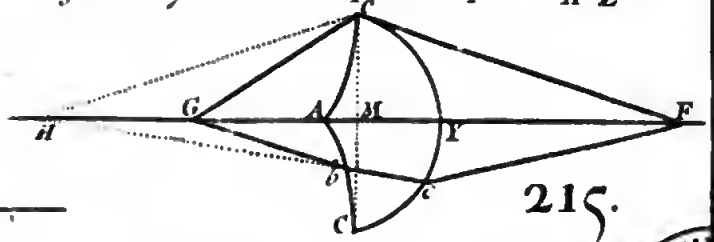


212.

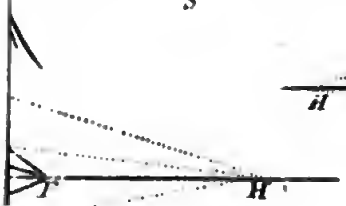


213.

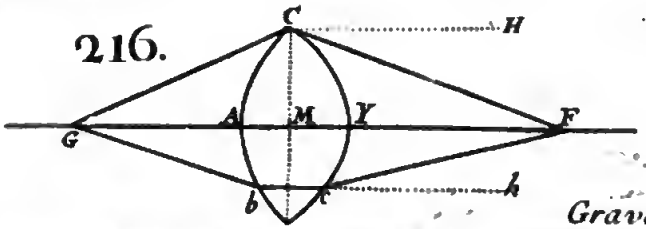




215.



216.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI

Gravé par Daudet.

Art. 3. pour Fig. 196. $Fa = FB$, c; $Ha = Hb$, b; les inconnuës cm, x; am, y; cB, z; cb, $\frac{cz}{d}$; $Fc = FB + Bc$, $c + z$; $Hc = Hb + bc$, $b + \frac{cz}{d}$; $Fm = Fa + am$, $y + c$; Hm, $b + y = Ha + am$.

Maintenant dans les triangles FCM, Fcm, FM, b: FC, a:: Fm, $y + c$: Fc, $c + z$; $y = \frac{-ac + cb - bz}{a}$. Dans les triangles rectangles Fcm, Hcm, $\overline{Fc}^2 - \overline{Fm}^2 = \overline{cm}^2 = \overline{Hc}^2 - \overline{Hm}^2$, $2cz + zz - 2cy = \frac{2bcz}{d} + \frac{ccxx}{dd} - 2by$. Substituons la valeur de y dans ces deux valeurs de xx, nous aurons $zz \frac{+ 2acddz - 2cddhz - 2abdez + 2bddhz}{add - aee} = \frac{2abcdd - 2bcddh - 2aecdd + 2ccddh}{add - aee} = zz + 2mz = nn$, en faisant $\frac{2acdd - 2cddh - 2abde + 2bddh}{add - aee} = 2m$, $\frac{2abcdd - 2bcddh - 2accdd + 2ccddh}{add - aee} = nn$. Et l'on trouve $z = -m + \sqrt{mm + nn} = cB$, & $Fc = FB + Bc$, $c - m + \sqrt{mm + nn}$. C'eſt pourquoi ſi ſur FC vous coupez $Fc = c - m + \sqrt{mm + nn}$, vous aurez le point c de la courbe cherchée cda.

On cherchera de la même maniere le point d, qui appartiendra auſſi à une Ovale, dont les foyers ſont H, F. Enfin chaque point de la courbe adc, appartiendra à une ovale particuliere; & H ſera le foyer commun de toutes, & F, f les foyers particuliers. Excepté lorſque le rayon rompu cF tombera au point H, car alors, comme on l'a déja dit, c'eſt un cercle, dont il faut déterminer le rayon Fc, en le faiſant égal à Fa.

3°. Il faut ainſi chercher chaque point c, d de la courbe acd Fig. 218. lorſque ADC eſt une ligne droite, ou la convexité d'un cercle, d'une parabole; ſoit que les rayons incidens viennent paralleles à l'axe, ſoit qu'ils partent d'un ſeul point de cet axe; lorſque ADC eſt la convexité d'une ellipſe, & que les rayons viennent d'un ſeul point de l'axe; lorſque ADC eſt la convexité d'une hyperbole, & que les rayons ſont paralleles à l'axe.

ARTICLE IV.

Comment M. DESCARTES *a pû trouver ce qu'il enſeigne dans cette quatriéme Partie.*

1. LE Problême que M. DESCARTES a ici reſolu, conſiſte en ce que, l'on donne un point, d'où partent tous les rayons d'incidence, ou bien on les ſuppoſe tous paralleles entr'eux; l'on donne encore le point, où ces rayons doivent tous ſe réünir après avoir traverſé un verre. Il faut trouver la Figure que doit avoir un verre pour produire cet effet; quelles doivent être ſes deux convexitez, ou ſes deux concavitez, ou ſa convexité d'un côté, & ſa concavité de l'autre.

Ce Problême doit donner des verres propres pour les lunettes, & des verres brûlans. Le verre qui raſſemble en un ſeul point de l'image de l'ob-

jet tous les rayons qui partent d'un ſeul point de l'objet, rend cette image diſtincte ; & il eſt bon pour des lunettes. Le verre qui ramaſſe en un point, ou en un petit eſpace, qu'on appelle foyer, tous les rayons qui viennent d'un corps lumineux, comme du Soleil, brûle les corps, qu'on applique à ce foyer.

Ou les rayons ſont dans l'air, & tombent ſur le verre ; ou ils ſont dans le verre, & ſortent dans l'air, c'eſt-à-dire, ou ils entrent dans le verre par la ſurface, qui regarde l'objet & le corps lumineux ; ou ils ſortent du verre par la ſurface, qui eſt tournée du côté de l'image & du foyer.

Dans ces deux circonſtances, l'image doit ſe peindre & le foyer doit ſe former dans un point ſeulement de la ligne droite, qu'on prend pour l'axe des courbes, qui terminent le verre des deux côtez ; ou bien cela doit arriver & ſur l'axe & autour de l'axe. En un mot on cherche un point ſeulement, ou pluſieurs points de l'image & du foyer.

De tous les cas, qui ſe preſentent ici, voici ceux, que M. DESCARTES a examinez. Avant que de déterminer les refractions, qui ſe font ſur les deux ſurfaces d'un verre, il examine ſeparément celles, que les rayons ſouffrent ſur chacune. Il n'a conſideré que les rayons, qui étant dans l'air, partent d'un ſeul point de l'axe pour tomber ſur une ſurface de verre : il eſt vrai qu'il a conclud de là, ce qui regarde la refraction des rayons paralleles ; & que dans les courbes qu'il a formées, il trouve ce qu'il ſouhaittoit par rapport aux rayons, qui du verre paſſent dans l'air.

Enfin il n'a conſideré que les rayons, leſquels après la refraction arrivans ſur la ſurface de verre, vont ſe réünir en un ſeul point.

Les foyers F, G, ou F, H étant donnez ; vous choiſiſſez la poſition du ſommet A ; lequel peut être ou entre les deux foyers, comme dans les deux premiers genres ; ou au delà des deux foyers, comme dans les deux derniers ; ou ſur l'un des deux, cas qui eſt renfermé dans les precedens.

Dans les deux premiers cas, étant toûjours FC plus grande que FA; GC peut être ou plus grande, ou moindre, ou égale à GA : ce dernier cas eſt auſſi renfermé dans les deux autres. Il reſte donc quatre cas. Lorſque le ſommet eſt entre les deux foyers, ou GC eſt moindre que GA, comme dans le premier genre ; ou elle eſt plus grande, comme dans le ſecond.

Lorſque le ſommet A eſt d'un même côté par rapport aux deux foyers, ou HC eſt plus grande que HA, comme dans le troiſiéme genre ; ou elle eſt moindre, comme dans le quatriéme.

On ſuppoſe toûjours FC plus grande que FA : parcequ'on décrit la même courbe, ſoit qu'on faſſe FC plus grande que FA, GC plus petite que GA ; ſoit qu'on ſuppoſe GC plus grande que GA, FC plus petite que FA ; ſeulement les foyers changeroient de place, Fig. 179. F ſeroit dans l'ovale, G dehors.

2. Il faut trouver par le calcul, quelle Figure doit avoir un verre, qui uniſſe dans un point donné F tous les rayons qui viennent d'un point donné G. Je ſuppoſe la choſe faite.

Mais pour réüſſir plus aiſément, je n'examine d'abord que le premier cas.

Je ſuppoſe donc Fig. 179. que l'eſpace FAC eſt l'air, l'eſpace ACG le verre; que AC eſt la courbe, dont A eſt le ſommet, que je détermine à volonté; FC le rayon d'incidence dans l'air, CG le rayon rompu dans le verre, d'où il ſuit que les points F, G, ſont donnez; F d'où viennent les rayons, G où ils ſe raſſemblent dans le verre aprés la refraction faite au point C, que je choiſis pour y faire le calcul: je ſuppoſe enfin que PCK eſt perpendiculaire ſur la courbe AC, CM perpendiculaire ſur l'axe GA, & une des appliquées de la courbe, AM une de ſes abſciſſes. Après quoi je conſidere que FCK eſt l'angle d'inclinaiſon, qui eſt égal à l'angle PCQ; que l'angle PCG eſt l'angle rompu; & que ſi du point C comme centre de l'intervale CP, l'on décrit le cercle PB: PN perpendiculaire ſur CG eſt le ſinus de l'angle rompu PCG; & PQ perpendiculaire ſur FC prolongée eſt le ſinus de l'angle PCQ, ou de l'angle d'inclinaiſon FCK. Fig. 179.

Enſuite les points F, A, G étant pris à diſcretion, FA & GA ſont connuës, je nomme FA, c; GA, b; & comme je ſai la raiſon que le ſinus de l'angle d'inclinaiſon a au ſinus de l'angle rompu dans la refraction de la lumiere, qui paſſe de l'air dans le verre, je la mets comme d connuë à e connuë; & je nomme le ſinus PQ, d; le ſinus PN, e. Je nomme encore les inconnuës CM, x; AM, y; AP, v, CP, s.

Je commence par le cas qui fait FC plus grande que FA, & GC plus petite que GA; & je reſerverai pour un autre cas de faire GC plus grande que GA. On nomme donc la difference de FC & de FA, z; & $CF = FA + z$, ſera $c + z$. Comme je ne connois pas le rapport de la difference de FC & de FA à la difference de GC & de GA, je la mets comme f inconnuë à g inconnuë: & ſi je fais $f : g :: z : \frac{gz}{f}$, ce ſera la difference de GC & de GA, & $GC = GA - \frac{gz}{f}$, ſera $b - \frac{gz}{f}$. On aura encore $FM = FA + AM$, $c + y$; $FP = FA + AP$, $c + v$; & ſuivant que le point M tombera de l'un ou de l'autre côté de G ou de P, $GM = GA - AM$, $b - y$; ou $AM - AG$, $y - b$; $MP = AP - AM$, $v - y$; ou $AM - AP$, $y - v$; $GP = GA - AP$, $b - v$; ou $AP - AG$, $v - b$. Mais comme les quarrez de ces differentes valeurs ſont les mêmes, cela n'apporte aucune difference dans le calcul, où l'on ne ſe ſert que de ces quarrez.

Le calcul eſt entierement le même que pour l'Ovale du premier genre, Sect. 3. Art. 1. excepté qu'on a f là où il y a d, g à où il y a e; on

le ſuivra donc juſqu'aux valeurs de FP, GP ; & l'on trouvera l'équation $zz \pm \frac{2bcffz - 2bcfgz - 2ccffvz - 2bfgvz - bfff + bffvv - cfff + cffvv}{bff + cgg + ggv - ffv} = 0$. AP, $v = \frac{cbff - bcfg + bffz + cggz}{cff + bfg - ggz + ffz}$. & comme Sect. 3. dans le Texte $FP = \frac{bcff + ccff + bffz + cffz}{bfg + cff + ffz - ggz}$; $GP = \frac{bbfg + bcfg - bggz - cggz}{bfg + cff + ffz - ggz}$.

Après cela j'opere ainſi : dans les triangles ſemblables FQP, FCM, $FP : QP :: FC : CM$. Donc $\frac{bcffx + ccffx + bffxz + cffxz}{bfg + cff + ffz - ggz} = cd + dz$, & diviſant par $c + z$, $\frac{bcffx + ccffx + bffxz + cffxz}{bcfg + ccff + cffz - cggz + bfgz + cfz + ffzz - ggzz} = d$, que j'appelle A.

Dans les triangles ſemblables GNP, GCM, l'on trouve cette Analogie, $GP = \frac{bbfg + bcfg - bggz - cggz}{bfg + cff + ffz - ggz} : PN, e :: GC, b - \frac{gz}{f} : CM, x$. & $be - \frac{egz}{f} = \frac{bbfgx + bcfgx - bggxz - cggxz}{bfg + cff + ffz - ggz}$ & diviſant par $b - \frac{gz}{f}$, $\frac{bbfgx + bcfgx - bggxz - cggxz}{bbfg + bcff + bffz - bggz - bggz - cfgz - fgzz + \frac{g^3zz}{f}} = e$, que j'appelle B. Donc la quantité A eſt à la quantité B, comme d eſt à e.

Maintenant lorſque deux quantitez ſont diviſées & multipliées par les mêmes quantitez, la raiſon qu'elles avoient ne change pas : ſi je multiplie donc les premiers membres des équations A, B par FC, $c + z$, par HC, $b - \frac{gz}{f}$, & que je les diviſe par x ; ce qui en reſultera aura encore la raiſon de d à e. C'eſt pourquoi je diviſe l'équation A par x, & je la multiplie par FC, $c + z$, & elle redevient FP, $\frac{bcff + ccff + bffz + cffz}{bfg + cff + ffz - ggz}$; que je multiplie par CG, $b - \frac{gz}{f}$, & c'eſt $\frac{bbcff + bccff + bbffz + bcffz - bcfgz - ccfgz - bfgzz - cfgzz}{bfg + cff + ffz - ggz}$, que j'appelle C. Je diviſe auſſi l'équation B par x, je la multiplie par CG, $b - \frac{gz}{f}$, & elle redevient GP, $\frac{bbfg + bcfg - bggz - cggz}{bfg + cff + ffz - ggz}$, que je multiplie par CF, $c + z$, & c'eſt $\frac{bbcfg + bccfz - bcggz - ccggz + bbfgz + bcfgz - bggzz - cggzz}{bfg + cff + ffz - ggz}$, que j'appelle D. Ainſi la quantité C ſera encore à la quantité D comme d eſt à e. Mais ſi l'on diviſe la quantité C par f, & la quantité D par g ; les quotiens ſeront la même quantité $bbcf + bccf + bbfz + bcfz - bcgz - ccgz - bczz - cgzz$: donc la quantité C eſt auſſi à la quantité D, comme f à g : donc enfin $f : g :: d : e$. Et la difference des lignes FC, FA, qui étoit à la difference des lignes GC, GA, comme f à g ; ſera auſſi à cette difference comme d à e. C'eſt pourquoi la premiere difference de FC, FA étant z, la ſeconde de GC, GA ſera $\frac{ez}{d}$, & $GC = b - \frac{ez}{d}$.

De ce que la difference des lignes FC, FA eſt toûjours à la difference des lignes GC, GA, comme d à e, l'on tire la maniere de décrire l'Ovale du premier genre, telle qu'on l'a expliquée, Sect. 2. Après qu'on l'a décrite, l'on examine, comment les refractions s'y font, & l'on trouve

qu'il n'y a que ſa premiere partie AC, qui réüniſſe au point G les rayons qui viennent du point F, ainſi qu'on l'a dit, Sect. 3. Art. 1. n. 3. on fera les mêmes choſes pour les trois autres genres d'Ovales.

Il faut obſerver touchant la maniere de décrire les Ovales, qu'après avoir tiré RA ou SA faiſant un angle quelconque avec l'axe : vous tranſportez GA & SA en AR ſur la ligne, où ſont priſes $A6$, $A8$, dans les deux cas, dans leſquels GC & HC ſont moindres que GA & HA; & que vous les tranſportez en AS ſur le prolongement de la même ligne, dans les deux cas, dans leſquels GC & HC ſont plus grandes que GA & HA: voici la raiſon de cette difference. As eſt $A6$, comme d à e: ainſi As étant z, $A6$ eſt $\frac{ez}{d}$; & Fs étant $FA + As$, $c + z$, $R6$ eſt $RA - A6$, $b - \frac{ez}{d}$; SA eſt $SA + A6$, $b + \frac{ez}{d}$.

4. Suppoſons que la difference de FC & de FA eſt toûjours égale à celle de GC & de GA: donc $z = \frac{ez}{d}$.

Ainſi pour le premier genre Fig. 179. vous aurez $FC = c + z$, comme auparavant, $GC = b - z$; $FM = c + y$; $GM = b - y$. Et dans les triangles rectangles CMF, CMG, vous trouverez $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$; $z = y$. Et ſubſtituant z dans l'équation $\overline{CM}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GM}^2$, il reſte $x = o$. Ainſi l'on décrit la ligne GF, Figure 185. comme Sect. 3. Art. 1. n. 7. car lorſque y a pluſieurs valeurs, & que x eſt toûjours zero : y s'étend ſur une ligne droite.

Pour le ſecond genre d'Ovales, on a déja prouvé, Sect. 3. Art. 2. n. 3. qu'on trouve une hyperbole.

Pour le troiſiéme genre, Fig. 197. nous aurons CF, $c + z$; HC, $b + z$; on ſuppoſe toûjours HA, b; AF, c; & les triangles rectangles CMF, HMC donnent $\overline{CM}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{HM}^2$, $z = -y$. Subſtituez pour z ſa valeur dans l'équation $2cz + zz - yy + 2cy = xx$, il vient $x = o$. Ainſi l'on décrit la droite Hs, Figure 199. comme Sect. 3. Art. 3. n. 7. La valeur $z = -y$ montre que cette ligne commence en A, & va du côté de s. FIG. 197.

Pour le quatriéme genre l'on a trouvé, Sect. 3. Art. 4. n. 7. Fig. 203. que c'eſt une ellipſe.

5. Après avoir examiné les rayons d'incidence, qui ſont dans l'air, ou paralleles, ou convergens, ou divergens par rapport à l'axe; & qui tombent ſur une ſurface de verre; & après avoir connu les courbes propres à leurs refractions. Il faut à preſent examiner ces mêmes rayons dans le verre, & voir qu'elles Figures doivent avoir les verres pour la ſeconde refraction, qu'ils ſouffrent en paſſant du verre dans l'air.

Et c'eſt ce que l'on a déja conclud en examinant les courbes, dont on vient de parler.

6. Il reſte à combiner ces Figures, & à donner aux verres les deux qui ſont propres à réünir dans un point donné tous les rayons qui viennent d'un

autre point donné ſur l'axe, ou qui viennent paralleles à l'axe. Et c'eſt ce que M. DESCARTES a fait, & qui a été ſuffiſamment expliqué en détail, Art. 1. 2. 3.

PARTIE CINQUIE'ME.

Des Lignes qui ſe décrivent ſur une ſurface courbe.

M. DESCARTES.

Comment on peut appliquer ce qui a été dit ici des lignes courbes décrites ſur une ſuperficie plate, à celles, qui ſe décrivent dans un eſpace, qui a trois dimenſions.

AU reſte je n'ai parlé en tout ceci que des lignes courbes, qu'on peut décrire ſur une ſurface plate ; mais il eſt aiſé de rapporter ce que j'en ai dit, à toutes celles qu'on ſauroit imaginer être formées, par le mouvement regulier des points de quelque corps dans un eſpace qui a trois dimenſions. A ſavoir, en tirant deux perpendiculaires, de chacun des points de la ligne courbe, qu'on veut conſiderer, ſur deux plans, qui s'entrecoupent à angles droits, l'une ſur l'un, & l'autre ſur l'autre. Car les extrêmitez de ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes, une ſur chacun de ces plans, deſquelles on peut, en la façon ci-deſſus expliquée, déterminer tous les points, & les rapporter à ceux de la ligne droite, qui eſt commune à ces deux plans, au moyen de quoi ceux de la courbe, qui a trois dimenſions, ſont entierement déterminez. Même ſi on veut tirer une ligne droite, qui coupe cette courbe au point donné à angles droits : il faut ſeulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui coupent à angles droits les deux lignes courbes, qui y ſont, aux deux points, où tombent les perpendiculaires, qui viennent de ce point donné. Car ayant élevé deux autres plans, un ſur chacune de ces lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle eſt, on aura l'interſection de ces deux plans, pour la ligne droite cherchée. Et ainſi je penſe n'avoir rien omis des élemens, qui ſont neceſſaires pour la connoiſſance des lignes courbes.

On peut décrire des lignes ſur des ſurfaces courbes, ou en ſuppoſant les ſurfaces immobiles, tandis qu'on fait mouvoir un point ſur elles à cer-

taines conditions ; ou en ſuppoſant que ces ſurfaces ſe meuvent, tandis que le point, qui trace la courbe eſt immobile ; ou en ſuppoſant que ces ſurfaces & ce point ſe meuvent.

Les lignes qui ſont ainſi décrites, peuvent être des lignes droites, par exemple ſi ſur la ſurface d'un cylindre on faiſoit un point, qui fût toûjours dans le plan d'un parallelogramme, qui coupe l'axe ; elles peuvent être de deux dimenſions, c'eſt-à-dire que tous leurs points ſont dans un ſeul plan, & que l'eſpace, qu'elles comprennent eſt une ſeule ſurface ; mais elles peuvent auſſi être de trois dimenſions, c'eſt-à-dire que tous leurs points ne ſont pas dans un ſeul plan, mais dans pluſieurs, & que l'eſpace dans lequel elles ſont décrites, eſt un ſolide, ou un eſpace de trois dimenſions ; & c'eſt pour cela qu'elles ſont appellées lignes de trois dimenſions, comme on pourroit appeller la parabole une ligne de deux dimenſions, & la ligne droite une ligne d'une dimenſion.

M. DESCARTES apprend ici deux choſes, la premiere eſt de déterminer tous les points des lignes décrites ſur une ſurface courbe, & de trouver l'équation qui convient à chacun de ces points indifferemment : la ſeconde eſt de mener des tangentes à ces lignes par un de leurs points donné.

Il faut apporter quelques Exemples, qui feront voir de quelle maniere on peut appliquer à ce ſujet, ce qui a été dit touchant les courbes décrites ſur un plan.

PROBLEME I.

1. ETant donné de poſition le ſolide paraboloïde *bNM*, Fig. 219. lequel a été produit par la circonvolution entiere de la demie-parabole *bNM* autour de ſon axe immobile *bD* ; qui eſt droit au plan horizontal *IP*. FIG. 219.

Etant encore donné le point *A* & la droite *AM* hors de ce ſolide : on demande l'équation de la courbe *MCN*, qui eſt décrite ſur le paraboloïde immobile *bNM*, par l'extrêmité *M* de la droite *AM*, laquelle tourne autour du point fixe *A*. Et il faut déterminer tous les points de la courbe.

1. Par le point *A* & par l'axe *bD* faites paſſer un plan *ubTY*, qui ſera droit au plan horizontal *IP*, & déterminera les points *N*, *M*, où il coupe la courbe *MCN*, qu'on ſuppoſe décrite, comme on l'a demandé. Si après cela ſur le plan horizontal *IP* vous élevez le plan vertical *PQ*, qui ſoit droit & au plan horizontal *IP*, & au plan coupant *ubTY* ; *PY* commune Section des plans horizontal *IP*, & vertical *PQ* ſera 19. 11. Eucl. droite au plan coupant *ubTY*, & *Yu* commune Section des plans verticaux *PQ*, *ubTY* ſera droite au plan horizontal *IP* ; & 6. 11. Eucl. les droites *bDT*, *uY* ſont paralleles. 18. 11. Eucl.

2. Tirez la droite *NM*, qui joindra les deux points *N*, *M* de la courbe *MCN*, & ſera ſon axe. Et par ſon milieu *F* & par le point donné *A* tirez

la droite DFA, qui 1° ſera toute dans le plan coupant $ubTY$, 1. 11. Eucl. parceque ſa partie FA eſt dans ce plan ; qui 2° ſera perpendiculaire à NM. De plus par le point connu F, menez EFt, parallele à TY: l'angle fEG eſt droit.

3. De tous les points de la courbe cherchée MCN abaiſſons 11. 11. Eucl. des perpendiculaires MX, CR ſur le plan horizontal IP ; elles ſeront 6. 11. Eucl. paralleles aux lignes bT, uY, & elles décriront la courbe VRX. De tous les points de la courbe MCN tirez encore des perpendiculaires Mx, Cr, Nu ſur le plan vertical PQ ; elles ſeront 6. 11. Eucl. paralleles à la ligne TY, & elles décriront la courbe xru.

4. Pour déterminer l'équation de la courbe MCN, je choiſis le point C, & il faut obſerver que toutes les lignes droites ou courbes, qui paſſent par le point C, ſont en l'air, & qu'elles ne ſont pas dans le plan vertical $ubTY$. Par le point C je fais paſſer le plan horizontal $hCZf$, dont la commune Section fh avec le plan $ubTY$ eſt 16. 11. Eucl. parallele à TY. La courbe hCZ eſt un arc du cercle que le point h décrit dans la circonvolution de la demie-parabole bNM autour de l'axe bD ; f eſt le centre de ce cercle, dont fh, fC, fZ ſont rayons. Le plan $hCZf$ horizontal eſt parallele au plan horizontal IP, & bDT qui eſt ſupp. droite au plan IP, eſt droite au plan $hCZf$. * C'eſt la converſe de la 14. 11. Eucl. laquelle eſt auſſi vraye. Donc l'angle CfD eſt droit, comme on peut le conclurre de la Prop. 4. 11. Eucl.

* Clavius.

5. Du point C tirez les lignes CF ; CK perpendiculaire à DA ; $CA = AM$ parceque CA eſt AM qui décrit le point C de la courbe MCN ; Cl perpendiculaire à NM ; & du point l menez lg perpendiculaire à EF, & parallele à ED. Du point C on a tiré CR perpendiculaire au plan IP ; Cr perpendiculaire au plan PQ.

6. Par le point C faiſons encore paſſer le plan CLG droit au plan $ubTY$, & parallele au plan PQ ; GL commune Section des plans CLG, $ubTY$ eſt 16. 11. Eucl. parallele à uY, & par conſequent à Ef, car n. 1. uY, bDT ſont paralleles. Donc 34. 1. Eucl. $EG = fL$, $GL = Ef$; & parceque n. 2. l'angle fEG eſt droit, l'angle LGE eſt encore droit, comme auſſi l'angle LGF. La droite CL eſt la commune Section des plans CLG, $hCZf$, car elle eſt dans ces deux plans, & parceque n. 4. $hCZf$ eſt droit au plan $ubTY$ auſſi bien que le plan CLG, il ſuit 19. 11. Eucl. que CL eſt droite au plan $ubTY$, & que déf. 3. 11. Eucl. les angles CLf, CLG ſont droits. De plus puiſque, comme on vient de le dire, le plan CLG eſt droit au plan $ubTY$, & que les angles LGE, LGF ſont droits, FG perpendiculaire à la commune Section LG, & tirée dans le plan $ubTY$, eſt * par une ſuite de la déf. 4. 11. Eucl. droite à l'autre plan CLG : & déf. 3. 11. Eucl. l'angle CGF eſt droit. Joignez CG.

* Clavius.

7. Par le point L prolongez les lignes LS perpendiculaire au plan IP,

Ls

Ls perpendiculaire au plan PQ; joignez RS, RT; rs, rt. Les plans IP, $hCZf$ ſont n. 4. paralleles; les perpendiculaires CR, LS, fT au plan IP, ſont par la converſe de la propoſ. 14. 11. Eucl. perpendiculaires au plan $hCZf$, & égales entr'elles; & 33. 1. Eucl. $CL = RS$, $Lf = ST$, $Cf = RT$; & les triangles CLf, RST ſont égaux, & parceque n. 6. l'angle CLf eſt droit, l'angle RST l'eſt auſſi. Enſuite parceque les plans CLG, PQ ſont encore paralleles, on démontrera de la même maniere, que les triangles CLG, rst ſont égaux; & que l'angle rst eſt droit, parcequ'il eſt égal à l'angle CLG, qui n. 4. eſt droit; & que $GL = ts$, $CG = rt$. Enfin la ligne PY droite n. 1. au plan $ubTY$, fait déf. 3. 1. Eucl. les angles PYT, PYu droits; c'eſt pourquoi les angles PYT, RST étant droits, les lignes PY, RS, 28. 1. Eucl. ſont paralleles, & les angles PYu, rst étant droits, les lignes PY, rs ſont encore paralleles. Menez $R\&$ parallele à SY; les lignes SR, $Y\&$ 34. 1. Eucl. ſont égales. Mais $RS = CL = rs$ donc les quatre lignes CL, RS, $Y\&$, sr ſont égales.

8. Les plans IP, PQ ſont les deux plans, qui ſuivant le precepte de M. DESCARTES ſe coupent à angles droits en PY; les courbes VRX, urx ſont celles qui ſe décrivent ſur ces plans par les perpendiculaires CR, MX, Cr, Mx, Nu, qu'on abaiſſe ſur eux de chaque point de la courbe MCN; PY eſt la commune Section de ces deux plans, à laquelle on doit rapporter les points des deux courbes VRX, urx: ce qui détermine les points & l'équation de la courbe cherchée MCN, comme on va le montrer.

9. Toutes ces choſes étant ſuppoſées, nommez les connuës AB, a; DF, b; BF, c; $AF = AB + BF$, $a + c$; AM, $d = AC$; bD, e; DE, h; $bE = bD - ED$, $e - h = l$; $EF = \sqrt{\overline{FD}^2 - \overline{DE}^2} = \sqrt{bb - hh} = f$ dans le triangle n. 2. DEF; $FM = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{dd - aa - 2ac - cc}$ dans le triangle rectangle n. 2. AFM. Nommez les inconnuës bf, x; fh, $y = Cf$ n. 4. $= RT$ n. 7. CL, $s = RS = rs = Y\&$ n. 7.; Cl, z; Gg, r; fL, $v = EG$ n. 6. $= TS$ n. 7. FK, t; $Df = bf - bD$, $x - e$; $Ef = bf - bE$, $x - l = GL$ n. 6. $= ts$ n. 7.; $FG = EF - EG$, $f - v$; $Fg = Gg - GF$, $r - f + v$; $DK = DF - KF$, $b - t$; $AK = AB + BF + FK$, $a + c + t$.

10. Dans le triangle CKA rectangle en K n. 5. $\overline{CK}^2 = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - tt$.

Dans le triangle CKF rectangle en K n. 5. $\overline{CF}^2 = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct$.

Dans le triangle CGF rectangle en G n. 6. $\overline{CG}^2 = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - ff + 2fv - vv = \overline{rt}^2$ n. 7.

Dans le triangle RST rectangle en S n. 7. $\overline{RS}^2 = ff = yy - vv$, & c'eſt l'équation, qui ſe peut d'abord former de la courbe XRV. Or $RS^2 = \overline{\sigma\gamma}^2$ n. 7.

Dans le triangle rst rectangle en s n. 7. $\overline{rs}^2 = ss = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - ff + 2fv - vv - xx + 2lx - ll$, & c'eſt l'équation qu'on peut d'abord former de la courbe xru. Or $\overline{rs}^2 = \overline{\sigma\gamma}^2$ n. 7.

Et les points des courbes XRV, xru ſont rapportez à la ligne $P\gamma$ commune Section des plans IP, PQ, puiſqu'on a deux valeurs de $\overline{\sigma\gamma}^2$ ou de ff tirées de ces deux courbes.

11. En comparant les deux valeurs de ff, on trouve $v = \frac{yy - dd + aa + 2ac + 2at + cc + 2ct + ff + xx - 2lx + ll}{2f}$.

On trouvera la valeur de t dans le triangle DCF, dans lequel 13. 2. Eucl. $\overline{CF}^2 + 2\overline{DF \times DK} = \overline{DF}^2 + \overline{CD}^2$, c'eſt-à-dire $dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct + 2bb - 2bt = bb + yy + xx - 2ex + ee$; puiſque $\overline{CD}^2 = \overline{Df}^2 + \overline{Cf}^2 = x^2 - 2ex + ee + yy$ dans le triangle CfD rectangle en f n. 4. d'où il vient $t = \frac{dd - aa - 2ac - cc + bb - yy - xx + 2ex - ee}{2a + 2b + 2c}$. Mettez à preſent cette valeur de t à ſa place dans la valeur de v, vous ferez $v = \frac{byy + bxx}{2af + 2bf + 2cf}$ &c. Nommez g la connuë qui multiplie yy, q celle qui multiplie xx, m celles qui multiplient x, n les autres, vous aurez $v = gyy + qxx + mx + n$.

12. Maintenant ſuppoſons que p eſt le parametre de la parabole bNM, laquelle par ſa circonvolution a produit le paraboloïde $MNbD$; on aura au point f ou au point b, $\overline{fb}^2 = p \times bf$, $yy = px$. Subſtituons cette valeur de yy dans la valeur de v; il viendra $v = gpx + qxx + mx + n$.

L'équation $ff = yy - vv$ de la courbe VRX décrite ſur le plan horizontal IP, ſi l'on y ſubſtituë les valeurs trouvées de yy & de vv, ſe changera en $ff = px - ggppxx - 2gpqx^3 - 2gmpxx - 2gnpx - qqx^4 - 2mqx^3 - 2nqxx - mmxx - 2mnx - nn$.

L'équation de la courbe urx décrite ſur le plan vertical PQ ſera, en ſubſtituant les valeurs de t & de v; celle-ci, $ff = dd - aa - 2ac - cc - ff - xx + 2lx - ll - \frac{add + a^3 + 2aac + acc - abb + apx + axx - 2aex + ace - cdd + aac + 2acc + c^3 - bbc + cpx + cxx - 2cex + cee}{af + bf + cf} + 2fgpx + 2fqxx + 2fmx + 2fn - ggppxx - 2gpqx^3 - 2gmpxx - 2gnpx - qqx^4 - 2mqx^3 - 2nqxx - mmxx - 2mnx - nn$, où pour yy l'on a ſubſtitué px.

13. Si l'on prend à volonté le point b ſur la parabole bNM, ou ce qui eſt le même, l'abſciſſe bf, x ſur l'axe bD; la quantité x ſera donnée; ainſi l'on connoîtra la longueur de fL, v, puiſque la valeur v ne contiendra plus que des quantitez connuës; l'on connoîtra auſſi $EG = fL$ n. 6. & les points G, L.

On connoîtra auſſi $\&Y$, ou la perpendiculaire CL, s; puiſque dans les valeurs de ff il n'y a plus que des connuës. Elevez donc au point connu L la perpendiculaire CL de la longueur connuë, elle déterminera le point C de la courbe cherchée. C'eſt ainſi qu'on trouvera tous les autres points de cette même courbe.

14. Du point C connu abaiſſez la perpendiculaire Cl ſur la droite MN axe de la courbe MCN, le point l ſera donné. Du point l ſur EG tirez la perpendiculaire lg, le point g ſera encore donné. Et parcequ'on connoît le point G n. 13. la droite Gg, r ſera connuë.

Après cela les triangles DEF, Fgl ſont équiangles. Vous avez donc cette Analogie $DE, b : DF, b :: Fg, r - f + v : Fl, \frac{br - bf + bv}{b}$, ou mettant pour v ſa valeur; $Fl = \frac{br - bf + bgpx + bqxx + bmx + bn}{b}$.

Enfin dans le triangle ClF rectangle en l, $\overline{Cl}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{lF}^2$, $zz = dd - aa - 2ac - 2at - cc - 2ct - \frac{bbrr + 2bbfr - 2bbgprx - 2bbqrxx - 2bbmrx - 2bbnr - bbff + 2bbfgpx + 2bbfqxx + 2bbfmx + 2bbfn - bbggppxx - 2bbgpqx^3 - 2bbgmpxx - 2bbgnpx - bbqqx^4 - 2bbmqx^3 - 2bbnqxx - bbmmxx - 2bbmnx - bbnn}{bb}$; équation à la courbe MCN, dont l'expreſſion ne contient d'inconnuës, que z, x, après qu'on aura mis dans la valeur de t n. 11. px pour yy. Elle eſt de trois dimenſions, parceque les points C ne ſont pas dans le plan du triangle AMN, dans lequel ſont les points M, N.

15. Soit pris Figure 220. le point A ſur l'axe AF du paraboloïde : les points f, E, F de Fig. 219. tombent tous ſur le point F, de Fig. 220. les lignes fh, EF, NM de Fig. 219. deviennent la ſeule ligne NM de Fig. 220. les lignes CL, Cl de Fig. 219. ſont la ligne CL de Fig. 220. le point D, & les lignes LG, lg, fE de Fig. 219. ſont nulles dans Figure 220. Fig. 220.

Ainſi dans le plan horizontal IP vous aurez la courbe VRX, & le triangle TRS égal au triangle CLF; mais dans le plan vertical PQ il n'y aura que la droite $rs = CL = RS = \&Y$. La raiſon de tout cela eſt, que la parabole MBN décrivant le ſolide $MBNC$, la ligne FM eſt demeurée dans un même plan horizontal, parallele au plan horizontal IP, & droit au plan vertical PQ.

De toutes les Lettres qu'on a employé n. 9. il ne reſte donc que AB, a; $AM, d = AC$, BF, c; $AF, a + c$; $FC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AF}^2}$, $\sqrt{dd - aa - 2ax - cc}$; FL, v; CL, s.

Dans le triangle rectangle CLF, $\overline{CL}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FL}^2$, $ff = dd - aa - 2ac - cc - vv$; équation au cercle ou à la courbe cherchée MCN; dont le rayon FM eſt $\sqrt{dd - aa - 2ac - cc}$.

Il eſt évident par la ſeule deſcription de la courbe MCN, que c'eſt une

circonference de cercle, dont FM eſt le rayon. Ce qui arrivera toûjours quelque courbe que ſoit NBM, pourveu que le point A ſoit pris ſur l'axe AF.

FIG. 219. 16. Que la courbe bNM, Fig. 219. ſoit à preſent une hyperbole, qui par ſa revolution autour de ſon axe bf décrive la ſolide hyperboloïde $MNbf$.

Si ſon équation eſt $yy = px + \frac{p}{q}xx$, on mettra cette valeur de yy à ſa place par tout, où elle ſe trouvera, le reſte eſt comme pour le paraboloïde.

Que ſi bNM étoit une ellipſe & $MNbf$ un conoïde elliptique, on ſuivroit la même Methode.

FIG. 221. 17. Suppoſons que le ſolide $MBNbd$, Fig. 221. eſt une Sphere décrite par la circonvolution entiere du demi-cercle $bNMd$ autour de ſon diametre bd: on demande la nature de la courbe MCN décrite par le point C de la ligne droite donnée AC, qui ſe meut autour du point donné A.

Faites ce qui eſt preſcrit, n. 1. 2. 3. 4.

Enſuite BD eſt perpendiculaire à NM, n. 2. ainſi le point D eſt le centre du cercle dBb, & de la Sphere.

Du point C pris à diſcretion tirez CD, CF, CA. Les angles MDF, NDF, CDF ſont égaux; de même les angles DFN, DFM, DFC, ſont encore égaux, & droits, puiſque n. 2. DFN, DFM ſont droits, & 5, 11. Eucl. les trois lignes FM, FN, FC ſont dans un même plan.

Ce qui ſe pouvant encore démontrer à l'égard de tous les points de la courbe MCN, tous ſes points ſont dans un même plan $MCNFM$, & la courbe MCN eſt de deux dimenſions. Il ſuit encore 4. 11. Eucl. que DF eſt droite au plan $MCNF$; & que 18. 11. Eucl. le plan $ubTY$, ou le plan du demi-cercle bMd, qui eſt mené par DF, eſt droit au plan de la courbe MCN; & déf. 3. 11. Eucl. que l'angle CFD eſt droit. De ce que les triangles DFM, DFN, DFC ſont égaux, j'aurois auſſi pu conclurre, que les lignes FM, FN, FC ſont égales, & que le plan $MCNF$ eſt un cercle. Mais il faut à preſent le connoître par la Methode qu'on explique.

Pour cela, après avoir remarqué, que les plans $MCNF$, bCZ ſont droits au plan du demi-cercle bMd; l'on conclurra, que 19. 11. Eucl. CL leur commune Section eſt droite au plan de ce demi-cercle, & qu'étant toute dans le plan bCZ, 1. 11. Eucl. elle tombera ſur fb commune Section des plans bCZ, bMd; & qu'enfin l'angle CLF eſt droit déf. 3. 11. Eucl.

Faites comme n. 7. 8. 9. excepté 1° que FG eſt $EG - EF$, $v - f$; 2° que les termes, où les lettres, r, t, z ſe trouvent, ſont nuls, parce-qu'on n'a pas eu beſoin des lignes, qu'elles expriment; 3° nommons FL, r.

La valeur de v eſt $\frac{yy - dd + aa + 2ac + cc + ff + xx - 2fx + ll}{2f}$, telle

que n. 11. en retranchant les termes, où t ſe trouve. Au point f, ou b du demi-cercle bMd on a l'équation au cercle $yy = 2ex - xx$. Subſtituez cette valeur de yy, vous aurez $v = \frac{2ex - dd + aa + 2ac + cc + ff}{2f} - \frac{2lx + ll}{}$.

Mettez $2e - 2l = \gamma$, le reſte $= \delta\delta$, il viendra $v = \frac{\gamma x + \delta\delta}{2f}$.

L'équation à la courbe VRX eſt 11. 10. $ff = yy - vv$, ſubſtituez les valeurs de yy, vv, c'eſt $ff = 2ex - xx - \frac{\gamma\gamma xx - 2\gamma\delta\delta x - \delta^4}{4ff}$. équation à l'ellipſe VRX.

Dans l'équation à la courbe urx. Faites $dd - aa - 2ac - cc - ff - ll = -\delta\delta$, il viendra $ff = -\delta\delta - vv + 2fv - xx + 2lx$; pour v & vv mettez leur valeur, vous aurez $ff = -\delta\delta - \frac{\gamma\gamma xx - 2\gamma\delta\delta x - \delta^4}{4ff} + \gamma x + \delta\delta - xx + 2lx$, équation à l'ellipſe urx.

Maintenant dans le triangle rectangle CLF, $\overline{CF}^2$ n. 10. $= \overline{CL}^2 + \overline{FL}^2$, $ff = dd - aa - 2ac - cc - rr$ équation au cercle MCN dont le rayon eſt $\sqrt{dd - aa - 2ac - cc} = FM = FN$, n. 9. CL une appliquée.

18. Lorſque Fig. 222. la ligne AD eſt perpendiculaire ſur bF, elle ſe confond avec FE de Fig. 219. Il ne reſte que FM, $\sqrt{dd - aa - 2ac - cc} = CG$ n. 10. bD, e; bF, x; $DF, x - e = GL = st$; $CL, s = RS = rs$; $CF, y = RT$; $DG, v = FL = TS$. Fig. 222.

Le triangle RTS rectangle en s donne $\overline{RS}^2 = \overline{RT}^2 - \overline{TS}^2$, $ff = yy - vv$.

Le triangle CLG rectangle en L, donne $\overline{CL}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GL}^2$, $ff = dd - aa - 2ac - cc - ee + 2ex - xx$ équation au cercle MCN.

Le triangle rst donne la même que le triangle CLG, ainſi xru eſt un cercle.

Parceque NCM eſt un cercle droit au plan horizontal IP, il ne formera que la droite RS.

19. Soit Fig. 223. le ſolide BbD un Cone droit produit par la circonvolution entiere du triangle rectangle fbh autour du côté immobile bf, qui eſt droit au plan horizontal IP. Fig. 223.

Faites comme n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. excepté que BF, e eſt nulle, étant AF, a; ainſi en retranchant les termes, où e ſe trouve, vous aurez $v = \frac{yy - dd + aa + 2at + ff + xx - 2lx + ll}{2f}$ n. 11. & $t = \frac{dd - aa + bb - yy - xx + 2ex - ee}{2a + 2b}$.

Au point b on a dans les triangles équiangles bEF, bfh cette Analogie $bE, l : EF, f :: bf, x : fh, y$. & $y = \frac{fx}{l}$.

Mettez dans la valeur de t cette valeur de y, & dans la valeur de v

celle de y & de t ; faites k toutes les connuës, qui multiplient xx ; m toutes celles qui multiplient x ; nn toutes les autres, il viendra $kxx + mx + nn = v$.

Dans l'équation qui convient n. 10. au triangle RST, ſubſtituez pour yy & vv leur valeur, vous produirez l'équation à la courbe XRV.

Dans l'équation qui n. 10. convient au triangle rst ſubſtituez les valeurs de t, v, vv, vous aurez l'équation à la courbe xrv.

Faites comme n. 13. 14. Dans Fl, $\frac{br - bf + bv}{b}$, mettez la valeur de v, afin d'avoir Fl, $\frac{br - bf + bnn + bkxx + bmx}{b} = \frac{\delta\delta + bkxx + bmx}{b}$, en faiſant $br - bf + bnn = \delta\delta$. Enfin dans le triangle ClF rectangle en l, $\overline{Cl}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{Fl}^2$, $zz = dd - aa - 2at - \frac{\delta^4 - 2bk\delta\delta xx - 2bm\delta\delta x - bbkkx^4 - 2bbkmx^3 - bbmmxx}{bb}$. équation à la courbe cherchée MCN, de trois dimenſions, car tous les points C ſe trouveront dans des plans differens du plan AMN.

FIG. 224. 20. Soit Fig. 224. le ſolide $MNbD$ un cylindre produit par la circonvolution entiere du rectangle $MNbD$ autour du côté immobile bD perpendiculaire à l'horizon ; menez AD perpendiculaire ſur bD.

Faites comme n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. excepté qu'on laiſſe les termes où ſe trouvent e, h, f, t ; étant AF, a ; FD, $b = fh - Cf$; bf, x ; Df, $x - e = Fh = GL$; fL, $v = DG$; $GF = DF - DG$, $b - v$; bl, r ; $Fl = Fh + hl$, $r + x - e$; $AG = AF + FG$, $a + b - v$.

Dans le triangle ACG rectangle en G, $\overline{CG}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AG}^2$, $dd - aa - 2ab + 2av - bb + 2bv - vv$.

Dans le triangle CLG rectangle en L, $\overline{CL}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GL}^2$, $ff = dd - aa - 2ab + 2av - bb + 2bv - vv - xx + 2ex - ee$, ce qui pouvoit ſe trouver dans le triangle rst.

Dans le triangle CLf rectangle en L, $\overline{CL}^2 = \overline{Cf}^2 - \overline{fl}^2$, $bb - vv$, ce qui pouvoit auſſi ſe trouver dans le triangle RST.

Donc de ces deux valeurs de ff l'on fait $v = \frac{2bb - dd + aa + 2ab + xx - 2ex + ee}{2a + 2b}$.

Nommez nn les quantitez connuës, c'eſt $v = \frac{xx - 2ex}{2a + 2b} + nn$.

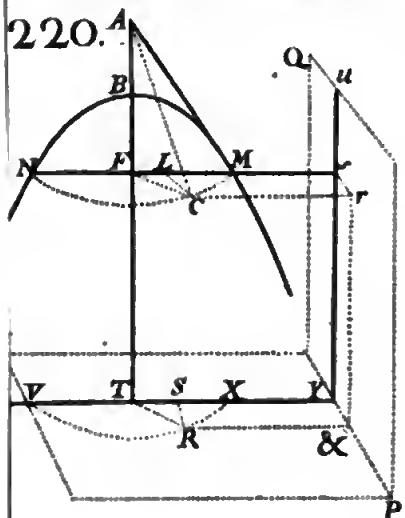
Subſtituez cette valeur dans $ff = bb - vv$, vous aurez l'équation de la courbe RST.

Subſtituez encore la valeur de v dans $ff = dd - aa - 2ab + 2av - bb + 2bv - vv - xx + 2ex + ee$, afin d'avoir l'équation de la courbe rst.

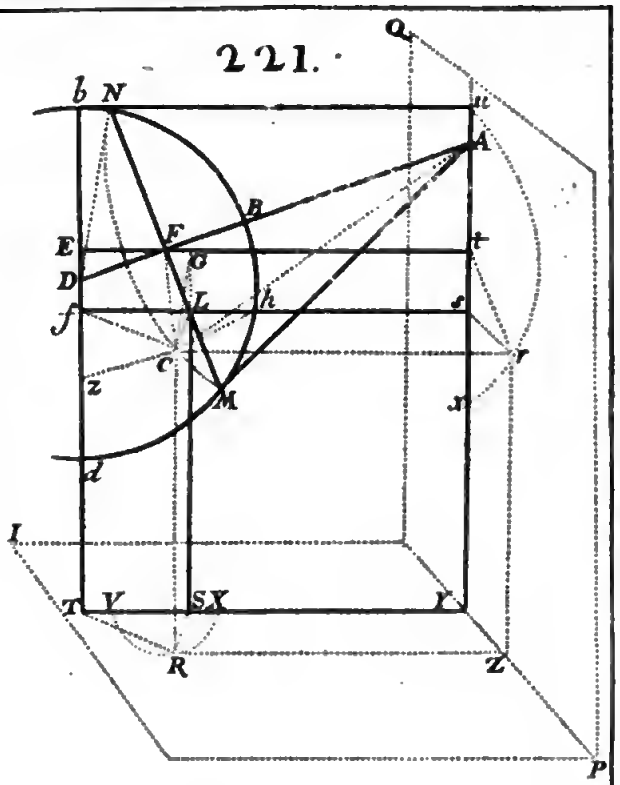
Faites comme n. 13.

Dans le triangle CGF, rectangle en G, n. 5. $\overline{CF}^2$, en ſubſtituant la valeur de v, $= \frac{bdd - aab + axx - 2aex + aee}{a + b}$.

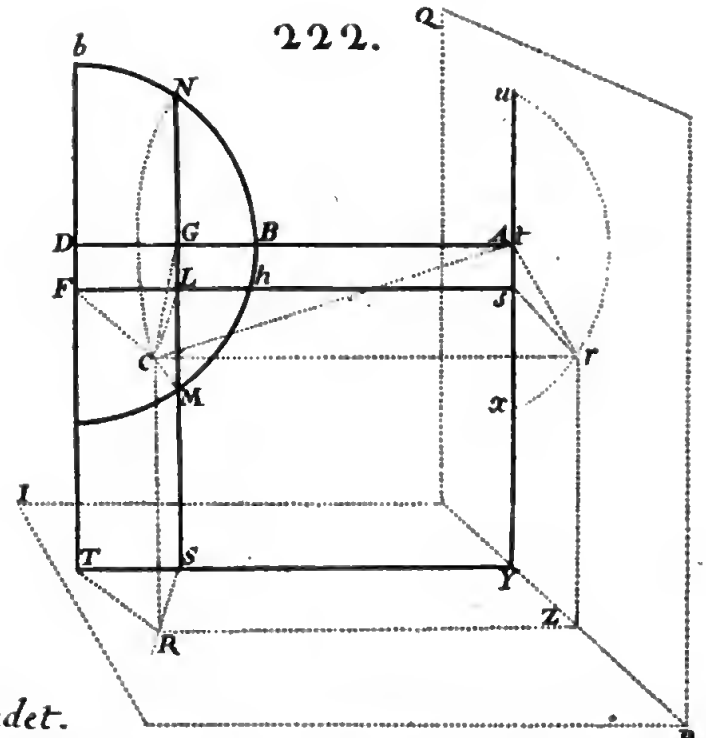
220.



221.



222.



par Daudet.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Dans le triangle CIF rectangle en I n.14. $\overline{CI}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{FI}^2$, $zz = \frac{bdd - aab + 2avx - 2acv + acc}{a+b} - xx + 2ex - 2rx - ee + 2er - rr$, équation à l'ellipſe MCN. Il ſe fait donc une portion d'ellipſe MCN de ce côté du Cylindre, & une autre portion de l'autre côté, qui ont pour axe commun la droite MN, & qui ne ſont pas dans le même plan ; car tous les points C ne ſont pas dans le plan du triangle AMN.

PROBLEME II.

IL faut trouver la ligne, que décrivent tous les points d'un corps, qui eſt pouſſé par trois mouvemens, dont le premier eſt horizontal, & uniforme d'Orient en Occident ; le ſecond eſt vertical de haut en bas ſuivant l'effet de la peſanteur, le troiſiéme eſt encore horizontal uniforme ou variable du Midi au Septentrion. Et l'on ſuppoſe 1° que le milieu dans lequel le mouvement ſe fait, ne cauſe aucun changement ; 2° qu'un corps peſant qui deſcend librement, parcourt des eſpaces, qui ſont entr'eux, comme le quarré des tems ; c'eſt-à-dire, que ſi à la fin du premier inſtant il a parcouru 1. pié, à la fin du ſecond il en a parcouru 4, à la fin du troiſiéme 9. &c. 3°. Que ſi un corps A, Fig. 225. eſt pouſſé ſur un plan horizontal par deux differens mouvemens, l'un, qui s'il étoit ſeul, le porteroit en un inſtant au point E ; l'autre, qui, s'il étoit ſeul, le tranſporteroit en un inſtant au point g : le corps A ſe trouveroit à la fin de cet inſtant au point h, qui eſt l'extrêmité de la diagonale d'un parallelogramme $AghE$, dont les côtez ſont les eſpaces AE, Ag, qui auroient été parcourus ſéparément. 4°. Que le mouvement horizontal ne détruit pas le vertical, parcequ'il ne lui eſt pas contraire. FIG. 225.

1°. Lorſque le corps A ne ſera mû que de deux mouvemens, l'un horizontal uniforme, AB, BE, EF, qui lui fait parcourir des eſpaces égaux dans des tems égaux ; l'autre vertical Ac ; Cc, CK, qui lui fait parcourir des eſpaces tels que la gravité le demande : alors la ligne parcouruë eſt une parabole. Ce qui ſe démontre ainſi.

Les lignes AB, BE, EF ſont égales, & repreſentent les tems égaux, pendant leſquels le corps A s'eſt mû : donc les lignes AB, AE, AF repreſentent ces tems pris depuis le commencement du mouvement ; & AB étant 1, AE eſt 2, AF 3, dont les quarrez ſont 1. 4. 9. De même comme les lignes AB, AE, AF ſont encore les eſpaces, qui ſeroient parcourus ſur l'horizontale AF pendant chaque inſtant à commencer depuis le point A : ainſi les lignes Ac, AC, AK repreſentent les eſpaces qui ſeroient parcourus ſur la verticale AK : donc Ac étant 1, AC eſt 4, AK eſt 9. C'eſt pourquoi ſi l'on mene Bd égale & parallele à Ac, ED égale & parallele à AC, &c. & qu'on joigne les lignes cd, CD : on aura $cd = AB$, 1 ; $CD = AE$, 2. Joignez les points $AdDL$, vous décrirez une

parabole. Car $Ac = 1$, $AC = 4$; $cd = 1$, $\overline{cd}^2 = 1$; $CD, 2$; $\overline{CD}^2 = 4$. Donc $Ac, 1 : AC, 4 :: \overline{cd}^2, 1 : \overline{CD}^2$ 4. Ce qui eſt une proprieté de la parabole. Donc la courbe AdD eſt une parabole, qui eſt ici un plan vertical, parcequ'elle paſſe par la verticale AK. Appellons ſon parametre p; les AC, Ac, x; les cd, CD, y; ſon équation à chaque point d, D ſera $yy = px$.

2°. Suppoſons à preſent que le corps A eſt pouſſé par les trois mouvemens, dont le Problême parle; & que le troiſiéme eſt uniforme, & conſtamment égal à b pendant chaque inſtant. On demande où ſera le mobile A à la fin du ſecond inſtant.

Au point A élevons $Ag = 2b$ droite au plan vertical de la parabole ACD; par Ag faiſons paſſer un plan horizontal $AghE$, il ſera droit au plan vertical de la parabole, & la Section de ces deux plans ſera la droite horizontale AE. A la fin du ſecond inſtant, le corps A n. 2. ſeroit au point E, s'il n'y avoit que le mouvement d'Orient en Occident; il ſeroit au point g, s'il n'y avoit que le mouvement du Midi au Septentrion: donc étant pouſſé par ces deux mouvemens il ſera en h extrêmité de la diagonale Ah. Mais par ſa peſanteur, ſi elle agiſſoit ſeule, il arriveroit en C, & ce mouvement vertical n'eſt pas détruit par les deux horizontaux. Ainſi par le point C faiſons paſſer le plan horizontal $CGHD$, qui ſera parallele au plan horizontal $AghE$; du point h abaiſſons la perpendiculaire hH, qui ſera parallele & égale à AC, ED. De même $Ag = hE = HD$, & HD ſera comme gA droite au plan de la parabole. Le corps A ſe trouvera donc au point H à la fin du ſecond inſtant. On peut trouver de cette maniere les points où le corps A arrive à la fin de chaque inſtant. Joignons tous ces points par la courbe AH.

Pour connoître la nature de la courbe AH on peut ſur un plan horizontal, & ſur un vertical mener des perpendiculaires de chaque point de la courbe; faire ſur l'horizontal un triangle rectiligne égal au triangle CHD, & un égal au triangle HDE ſur le vertical comme Problême 1. n. 3. 7.

Nommons CH, s; HE, z; $ED = AC, x$; CD, y, $HD, 2b = hE, Ag$.

Dans le triangle HDE rectangle en D, $\overline{HD}^2 = \overline{HE}^2 - \overline{ED}^2$, $4bb = zz - xx$.

Dans le triangle HDC rectangle en D, $\overline{HD}^2 = \overline{HC}^2 - \overline{CD}$, $4bb = ss - yy$.

Donc $zz = ss - yy + xx$, ſubſtituons cette valeur de zz dans la premiere équation, il vient $4bb = ss - yy$. Mettons pour yy ſa valeur px, nous ferons $ss = px + 4bb$, équation à la courbe AH, qui ſera une portion de parabole. Prolongez HC en n, de ſorte que nH ſoit $\sqrt{ss + bb}$; par le point n tirez Pn parallele à AC, & prenez $nP = AC + \frac{2bb}{p} = x + \frac{2bb}{p}$. La parabole dont l'axe eſt Pn, P le ſommet, p le parametre

eſt

eſt la parabole cherchée. Car par la nature de la parabole, le parametre $p \times Pn = \overline{nH}^2$, $px + 5bb = ff + bb$; $ff = px + 4bb$.

Mais ſi l'on ſuppoſe le mouvement horizontal du Midi au Septentrion variable, de ſorte par exemple, que les mouvemens, qui ſe font en differens inſtans ſoient entr'eux comme les mouvemens correſpondans de la deſcente des graves, que DH ſoit égale à AC; pour $4bb$ il faudra mettre xx, & l'équation ſera $ff = px + xx$ équation à l'hyperbole équilatere, dont l'axe déterminé eſt p, pris ſur CA prolongée.

Que ſi l'on veut, que ces mêmes mouvemens du Midi au Septentrion ſoient entr'eux comme les quarrez des AC, de ſorte que DH ſoit xx; l'équation deviendra $ff = px + x^4$, courbe du quatriéme degré qui eſt de trois dimenſions.

PROBLEME III.

TRouver les lignes droites qui coupent à angles droits les courbes décrites ſur une ſurface courbe.

Soit MCN, Fig. 226. une courbe décrite ſur une ſurface courbe, ſi je ſuppoſe un plan, qui touche cette courbe au point C, il eſt évident que toutes les lignes droites, qui ſeront menées dans le plan touchant par le point C ſeront auſſi tangentes de la courbe MCN. De même ſi je ſuppoſe un plan, qui coupe à angles droits au point C la courbe MCN, toutes les lignes droites, qui ſeront tirées dans ce plan par le point C, couperont à angles droits la courbe MCN. Il faut trouver une de ces lignes droites tangentes, & une des ſecantes. Fig. 226. 219.

1. L'on ſuppoſe tout ce qui a été fait Problême I. pour la Fig. 219.

2. Cherchons la droite Fa, qui touche la courbe XRV au point R ſur le plan horizontal IP. Soit XS l'abſciſſe de l'axe VX, RS l'appliquée perpendiculaire, qui convient au point R; tirez Rd comme celle qui coupe à angles droits la courbe XRV au point R. La ligne TX eſt connuë, car elle eſt égale à la diſtance du point M donné à l'axe bT donné de poſition; nommons TX, ϵ; TS, v, n. 9. Problême I. $XS = TX - TS$, $\epsilon - v$; dX, μ; $dS = SX - dX$, $\epsilon - v - \mu$; dR, λ; RS, s, n. 9. Problême I.

Le triangle RSd rectangle en S donne, $\overline{Rd}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{Sd}^2$, $\lambda\lambda = ss + \epsilon\epsilon - 2\epsilon v - 2\epsilon\mu + vv + 2v\mu + \mu\mu$. Mais pour la courbe RST Problême I. n. 10. $ff = yy - vv$; & Problême I. n. 12. $yy = px$; donc $ff = px - vv$, & $\lambda\lambda = px + \epsilon\epsilon - 2\epsilon v - 2\epsilon\mu + 2v\mu + \mu\mu$, d'où l'on tire $v = \frac{px + \epsilon\epsilon - 2\epsilon\mu + \mu\mu - \lambda\lambda}{2\epsilon - 2u}$.

Comparons cette valeur de v avec celle de n. 12. Problême I. $v = gpx + qxx + mx + n$; il viendra $xx - \frac{px + 2gp\epsilon x - 2gpux + 2m\epsilon x - 2mux + 2n - 2nu - ss + 2\epsilon u - uu + \lambda}{2q - 2G} = 0$.

Maintenant je fais ſuivant la Methode, Part. 3. Sect. 2. Art. 3. $x - \pi = o$, $xx - 2\pi x + \pi\pi = o$. Et je compare les ſeconds termes de ces deux dernieres équations ils donnent $\mu = \frac{2gpt + 2ut - p - 4qex}{2gp + 2m + 4qx}$.

Je connois la ligne $dx = \mu$, & le point d; je joins Rd, & la droite Fa perpendiculaire à Rd eſt touchante de la courbe XRV au point R.

3. Cherchons la droite OG, qui touche la courbe xru au point r ſur le plan vertical PQ. Soit xs l'abſciſſe de l'axe Vx, rs l'appliquée perpendiculaire qui convient au point r; tirez rt comme celle qui coupe perpendiculairement la courbe xru au point r.

La droite Mx eſt connuë parcequ'elle eſt la diſtance du point b donné au plan vertical PQ, dont on connoît la poſition; nommons mx, θ; $ms = bf$, Fig. 219. x, n. 9. Problême I. $xs = mx - ms$. $\theta - x$; tx, ϕ; $ts = xt - xs$, $\phi - \theta + x$; rt, λ; rs, s, n. 9. Problême I.

Le triangle rst rectangle en s donne $\overline{rt}^2 = \overline{rs}^2 + \overline{ts}^2$, $\lambda\lambda = ff + \phi\phi - 2\theta\phi + 2\phi x + \theta\theta - 2\theta x + xx$. Pour ff ſubſtituons la valeur qu'elle a n. 12. Problême I. dans la Figure urx, il viendra $\lambda\lambda = dd - aa$, &c. équation où tout eſt connu excepté ϕ, λ. Elle ſe changera en $x^4 + \gamma x^3 + \frac{\omega}{\delta}xx - zx - 2\phi x + kk + 2\theta\phi - \phi\phi + \lambda\lambda = o$. Prenez le quarré de $x - \pi = o$, multipliez-le par $x + \rho$. Comparez cette équation avec la precedente, pour connoître ρ & ϕ & par conſequent la ligne $tx = \phi$, le point t ſera connu.

Je joins rt, & la droite OG perpendiculaire à rt eſt touchante de la courbe xru au point r.

Les droites Rd, Fa; rt, OG étant trouvées, on cherche les droites ZY, Cp l'une touchante, l'autre coupante à angles droits de la courbe MCN.

4. Sur la touchante GO, & par la droite Cr j'éleve le plan $GODE$ Il eſt droit au plan PQ, 18. 11. Eucl. parcequ'il eſt mené par la droite Cr, qui n. 3. Problême I. eſt droite au plan PQ. Le plan $GODE$ paſſera donc par le point C, & il touchera la courbe MCN en ce ſeul point C.

Car comme il eſt ſur GO, & que GO eſt toute dehors de la courbe xru, le plan $GODE$ ſera auſſi tout dehors de la courbe xru. Mais ſi ce plan $GODE$ coupoit la courbe MCN encore en un point quelconque h, je pourrois de ce point h tirer la ligne hn perpendiculaire au plan vertical PQ, & le point n ſeroit n. 3. Problême I. un point de la courbe xru: la ligne hn ſeroit toute dans le plan $GODE$ qui eſt droit au plan PQ; d'où il ſuivroit que le plan $GODE$ couperoit auſſi la courbe xru au point n; ce qui eſt impoſſible, puiſqu'on a montré qu'il le touche au point r.

De même ſur la tangente Ra, & par la droite RC j'éleve le plan $FBAa$,

qui ſera auſſi droit au plan horizontal *IP*, & qui ne rencontrera la courbe *MCN* qu'au point *C*, où il la touchera.

Que la droite *YCZ* ſoit la commune Section des plans *GODE*, *FBAα*; elle ſera toute dans ces deux plans, 1. 11. Eucl. & ne touchera la courbe *MCN* qu'au point *C*, où ces deux plans la touchent. La droite *YCZ* eſt donc une des touchantes qu'on peut tirer à la courbe *MCN* au point *C*.

5. Après cela par le point *r* je fais paſſer le plan *rLK* droit aux plans *PQ*, *GODE*: ainſi les deux plans *rLK*, *PQ* ſont droits au plan *GODE*: donc 19. 11. Eucl. leur commune Section eſt droite au plan *GODE*, & déf. 3. 11. elle fait un angle droit avec la ligne *GO*: mais l'on a trouvé n. 3. que la ligne *rt* fait un angle droit avec la ligne *GO*: donc *tr* eſt la commune Section des plans *PQ*, *rLK*; autrement on pourroit au point *r* dans le même plan *PQ* élever deux lignes droites à la ligne *OG*, ce qui n'eſt pas poſſible, puiſqu'il faudroit que deux angles droits fuſſent partie l'un de l'autre. Le plan *rLK* eſt donc élevé ſur la droite *rt*; ce même plan eſt d'ailleurs droit au plan *GODE*; il eſt donc droit, & n'eſt point incliné ſur aucune ligne menée dans le plan *GODE*, comme ſur *YCZ* touchante de la courbe *MCN*.

On prouvera de la même façon, que le plan *RHI*, que l'on fait droit aux plans *IP*, *FBAα*, eſt élevé ſur *Rd*, qui eſt perpendiculaire à *Fα* touchante de la courbe *XRV*, & qu'il n'eſt point incliné ſur *YCZ*.

6. Que la commune Section des plans *rLKt*, *RHId* ſoit la droite *Cp*, je dis qu'elle eſt perpendiculaire à la droite *YCZ* tangente de la courbe *NCM*. Car Fig. 227. *CB* eſt dans le plan *NMPR*, *AB* eſt droite ſur ce plan; deux autres plans *EFGH*, *KILM* ſont droits ſur le premier; leur commune Section *AB* eſt 19. 11. Eucl. droite auſſi à ce plan, & déf. 3. 11. Eucl. l'angle *ABC* eſt droit, & les plans *EFGH*, *KILM* ne ſont point inclinez ſur la ligne *BC*. Fig. 227.

Ainſi l'on peut aſſurer que ſi deux plans *EFGH*, *KILM* ne ſont point inclinez ſur la droite *CBD*, leur commune Section *AB* eſt perpendiculaire à *CBD*. Or l'on a montré que Figure 226. les deux plans *rtKL*, *RHId* ne ſont point inclinez ſur la droite *YCZ*: donc leur commune Section *Cp* eſt perpendiculaire à la touchante *YCZ*, & *Cp* coupe à angles droits la courbe *MCN* au point *C*.

On ne cherche pas les tangentes des courbes de trois dimenſions par la Methode de Part. 3. Sect. 2. Art. 1. 2. 3. parceque cette Methode ſuppoſe que les cercles qui coupent la courbe donnée en deux points éloignez de *C*, & le cercle qui touche cette courbe au point *C*, ſont dans un même plan: ce qui ne convient pas aux points d'une courbe de trois dimenſions, puiſque ces points ſont en differens plans.

LA GEOMETRIE DE M. DESCARTES.

LIVRE III.

De la conſtruction des Problêmes, qui ſont ſolides, ou plus que ſolides.

M. DESCARTES apprend ici 1. de quelles lignes on peut ſe ſervir dans la conſtruction de chaque Problême, 2. de la nature des équations & de leur preparation pour les reſoudre, 3. de la reſolution des équations, 4. de la façon generale de conſtruire les Problêmes reduits à une équation de trois ou quatre dimenſions, 5. de la façon generale de conſtruire tous les Problêmes reduits à une équation, qui n'a pas plus de ſix dimenſions.

PARTIE PREMIERE.

De quelles Lignes on peut ſe ſervir en la conſtruction de chaque Probléme.

M. DESCARTES.

De quelles lignes courbes on peut ſe ſervir en la conſtruction de chaque Problême.

ENcore que toutes les lignes courbes, qui peuvent être décrites par quelque mouvement regulier, doivent être reçûës en la Geometrie, ce n'eſt pas à dire, qu'il ſoit permis de ſe ſervir indifferemment de la premiere qui ſe rencontre, pour la conſtruction de chaque Problême : mais il faut avoir ſoin de choiſir toûjours la plus ſimple, par laquelle il ſoit poſſible de le reſoudre. Et même il eſt à remarquer, que par les plus ſimples on ne doit pas ſeulement entendre celles, qui peuvent le plus aiſément être décrites, ni celles qui rendent la démonſtration ou la conſtruction du Problême propoſé plus facile ; mais principalement celles, qui ſont du plus ſimple genre, qui puiſſe ſervir à déterminer la quantité qui eſt cherchée.

Exemple touchant l'invention de pluſieurs

Comme par Exemple je ne croi pas, qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouver autant de moyennes proportionelles, qu'on veut, ni dont la démonſtration ſoit plus évidente, que d'y

employer les lignes courbes, qui ſe décrivent par l'inſtrument *XYZ* * ci-deſſus expliqué, Fig. 51. Car voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre *YA*, & *YE*, il ne faut que décrire un cercle, dont le diametre ſoit *YE*, & pourceque ce cercle coupe la courbe *AD* au point *D*, *YD* eſt l'une des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la démonſtration ſe voit à l'œil par la ſeule application de cet inſtrument ſur la ligne *YD*; car comme *YA*, ou *YB* qui lui eſt égale eſt à *YC*; ainſi *YC* eſt à *YD*; & *YD* à *YE*.

moyennes proportionnelles.

* *L. 2. Part. 1. Sect. 3. n. 10. 44 50. 51. 52.*

Tout de même pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre *YA* & *YG*, ou pour en trouver ſix entre *YA* & *YN*; il ne faut que tracer le cercle *YFG*, qui coupant *AF* au point *F*, détermine la ligne droite *YF*, qui eſt l'une de ces quatre proportionelles, ou *YHN*, qui coupant *AH* au point *H*, détermine *YH* l'une des ſix; & ainſi des autres.

Mais pourceque la ligne courbe *AD* eſt du ſecond genre, & qu'on peut trouver deux moyennes proportionelles par les Sections coniques, qui ſont du premier, & pourcequ'on peut trouver quatre ou ſix moyennes proportionelles, par des lignes qui ne ſont pas de genres ſi compoſez, que ſont *AF* & *AH*, ce ſeroit une faute en Geometrie, que de les y employer. Et c'eſt une faute auſſi d'autre côté, de ſe travailler inutilement à vouloir conſtruire quelque Problême par un genre de lignes plus ſimple, que ſa nature ne permet.

SECTION I.

De l'inſtrument inventé pour trouver des moyennes proportionelles.

1. L'On a parlé L. 2. Part. 1. Sect. 3. de la maniere dont cet inſtrument eſt conſtruit.

2. Les lignes *CB*, *ED*, *GF*, *NH*, *LK*, *PM* ſont perpendiculaires à la ligne *YX*; les lignes *DC*, *FE*, *HG*, *KN*, *ML* ſont perpendiculaires à la ligne *YZ*. C'eſt pourquoi le triangle *YCD* eſt rectangle en *C*, & du ſommet *C* l'on a abaiſſé *CB* perpendiculaire ſur la baſe *YD*: donc les triangles *YBC*, *YCD* ſont équiangles, & *YB*: *YC* dans le triangle

Fig. 51.

YBC : : *YC* : *YD* dans le triangle *YCD* ; & *YC* eſt moyenne proportionelle entre *YB*, & *YD*.

Le triangle *YDE* eſt auſſi rectangle en *D*, & du ſommet *D* l'on a abaiſſé la perpendiculaire *DC* ſur la baſe *YE* ; donc les triangles *YCD*, *YDE* ſont équiangles ; & *YC* : *YD* dans le triangle *YCD* : : *YD* : *YE* dans le triangle *YDE* ; & *YD* moyenne proportionelle entre *YC* & *YE*. Donc en reprenant les deux analogies, *YB* : *YC* : : *YC* : *YD* : : *YD* : *YE*. & *YC*, *YD* ſont deux moyennes proportionelles entre *YB*, *YE*.

On trouvera de la même façon, que *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, *YG* ſont cinq moyennes proportionelles entre *YB*, *YH* ; que *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, *YG*, *YH* ſont ſix moyennes proportionelles entre *YB*, *YN*, &c.

3. L'uſage de cet inſtrument eſt tel, Fig. 51. Lorſqu'on a une moyenne proportionelle à trouver entre deux lignes données ; l'inſtrument eſt d'abord fermé, de ſorte que *YX* eſt ſur *YZ*, & les points *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, &c. des lignes *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, &c. ſur le point *Y* : ce que l'on obſerve, quelque nombre de moyennes proportionelles que l'on cherche. Enſuite ſur la ligne *YX*, l'on prend *YB* égale à la plus petite des lignes données ; l'on y conduit le point *B* de la ligne *BC*, & on l'arrête ferme en cet endroit. La ligne *BC* ainſi muë chaſſe devant elle toutes les autres lignes *CD*, *DE*, &c. Après cela ſur la même ligne *YX*, l'on prend encore *YD* égale à la ſeconde ligne donnée, & l'on marque le point *D*. Enfin l'on ouvre l'inſtrument juſqu'à ce que la ſeconde ligne tranſverſale *CD* tombe ſur le point marqué *D* : & l'on a ſoin que toutes les lignes tranſverſales, qui ſervent, ſe touchent ; ce que l'on ſuppoſe auſſi, quelque nombre de moyennes proportionelles que l'on cherche. La ligne *CD* étant dans cette ſituation, le point *C* donne *YC* moyenne proportionelle cherchée.

Lorſqu'on doit trouver deux moyennes proportionelles entre deux lignes données ; en premier lieu ſur la ligne *YX*, l'on prend *YB* égale à la moindre des données ; on y conduit & l'on y arrête le point *B* de la ligne *BC*. En ſecond lieu ſur l'autre ligne *YZ*, l'on prend *YE* égale à la ſeconde des lignes données, & l'on marque le point *E*. En troiſiéme lieu l'on ouvre l'inſtrument juſqu'à ce que la troiſiéme ligne tranſverſale *DE* coupe *YZ* au point *E*. Alors le point *C* donne *YC*, le point *D* donne *YD*, qui ſont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Enfin quelque nombre de moyennes proportionelles, qu'on doive trouver entre deux lignes données : on prendra toûjours ſur *YX* l'eſpace *YB* égal à la plus petite donnée ; & l'on arrêtera la ligne *BC*. Et ſi le nombre des moyennes cherchées eſt un nombre impair 1, 3, 5, &c. l'on prendra ſur la même *YX*, l'intervale *YD*, ou *YF*, ou *YH*, &c. égal à la ſeconde des données. Enſuite on ouvrira l'inſtrument, juſqu'à ce que la ſeconde *CD* des tranſverſales tombe ſur le point marqué *D*, ou *F*, ou *H*,

&c. lorſqu'on ne cherche qu'une moyenne ; juſqu'à ce que la quatriéme *EF* tombe ſur le point marqué, lorſqu'on cherche trois moyennes ; juſqu'à ce que la ſixiéme *GH* tombe ſur le point marqué, lorſqu'on cherche cinq moyennes, &c. Mais ſi le nombre des moyennes proportionelles demandées eſt pair 2, 4, 6, &c. c'eſt ſur *YZ* qu'il faut prendre l'intervale *YE*, ou *YG*, ou *YN*, &c. égal à la ſeconde ligne donnée.

Après cela l'on ouvre l'inſtrument, juſqu'à ce que *DE* la troiſiéme des tranſverſales tombe ſur le point marqué *E*, ou *G*, ou *N*, &c. lorſqu'on cherche deux moyennes ; juſqu'à ce que *FG* la cinquiéme tombe ſur le point marqué, lorſqu'on cherche quatre moyennes, &c.

4. Que ſi l'on veut ſervir des courbes *AD*, *AF*, *AH*, &c. qui ſont décrites par des poinçons appliquez, tandis qu'on ouvre l'inſtrument, l'un à l'interſection des lignes *CD*, *DE* ; l'autre à l'interſection des lignes *FE*, *FG*, le troiſiéme à l'interſection des lignes *GH*, *HN*, &c. Il faut ſur un plan tirer la ligne infinie *YZ* ; couper *YA* égale à la plus petite des deux lignes données ; ſur la ligne *YZ* du plan ajuſter la ligne *YZ* de l'inſtrument fermé, c'eſt-à-dire que la ligne *YX* de l'inſtrument eſt auſſi ſur la ligne *YZ* du plan ; mettre le point *Y* de l'inſtrument ſur le point *Y* du plan. Enſuite il faut ſur *YX* couper *YB* = *YA* ; appliquer la regle *BC* au point *B* ; ouvrir l'inſtrument & avec des poinçons tracer autant de courbes que l'on ſouhaitera ſur le plan. Cette preparation étant faite l'on ôte l'inſtrument.

Si vous cherchez deux moyennes proportionelles entre *YA* ou *YB* & *YE* ; ſur le diametre *YE* décrivez le demi cercle *YDE*, du point *D*, où ce demi-cercle coupe la premiere courbe *AD*, abaiſſez *DC* perpendiculaire à *YE*, vous aurez *YC*, *YD* les deux moyennes cherchées entre *YB* & *YE*.

Si vous voulez quatre moyennes proportionelles entre *YA* ou *YB* & *YG* ; ſur le diametre *YG* décrivez le demi-cercle *YFG*, qui coupera la ſeconde courbe *AF* au point *F* ; & par les points *Y*, *F* tirez *YF*. Après cela du point *F* abaiſſez *EF* perpendiculaire à *YZ* ; du point *E*, *ED* perpendiculaire à *YX* ; du point *D*, *DC* perpendiculaire à *YZ* ; vous aurez *YC*, *YD*, *YE*, *YF* moyennes entre *YB*, *YG*. L'on fera la même choſe pour des moyennes proportionelles en nombre pair.

Mais lorſqu'elles ſont en nombre impair, comme s'il falloit trouver trois moyennes proportionelles entre *YA* ou *YB* la plus petite des données, & une autre ligne quelconque. J'ouvre mon compas de la longueur de cette ſeconde ligne donnée, je mets un de ſes piez ſur le point *Y*, & de l'autre je coupe la ſeconde courbe *AF* au point *F* ; par les points *Y*, *F* je tire la droite *YF* : enſuite du point *F* j'abaiſſe *FE* perpendiculaire ſur *YZ* ; du point *E*, la perpendiculaire *ED* ſur *YX* ; du point *D* la perpendiculaire *DC* ſur *YZ*, & j'ai *YC*, *YD*, *YE* trois moyennes entre *YB*,

YF. Si l'on demandoit cinq moyennes proportionelles, avec le compas je couperois la troiſiéme courbe AH, &c.

Bien plus le cercle YHN me fournit autant de moyennes proportionelles que je veux en nombre pair entre YA & YN. Car ſi j'en veux ſix, du point Y je tire la droite YH au point H, où le cercle decrit ſur le diametre YN coupe la troiſiéme courbe YH; en cette droite YH eſt la ſixiéme des moyennes, les autres ſe trouvent en tirant des perpendiculaires, comme auparavant. Si j'en veux quatre, du point Y je tire la droite Yf au point f, où le cercle décrit ſur le diametre YN coupe la ſeconde courbe AF; & cette droite Yf eſt la quatriéme moyenne proportionelle entre YA & YN; les autres ſe trouvent comme auparavant, en tirant des paralleles. Si j'en veux deux, du point Y je tire Yd, au point d, où le cercle décrit ſur le diametre YN coupe la premiere courbe AD; & cette droite Yd eſt la ſeconde des moyennes cherchées; l'autre ſe trouve en tirant la perpendiculaire DC.

Mais je veux des moyennes proportionelles en nombre impair entre YA & une autre quelconque YH; le même cercle ne me les donnera pas dans les points, où ce cercle coupe les differentes courbes.

Les courbes AD, AF, AH, &c. ſervent bien à trouver quelque nombre de moyennes proportionelles que l'on demande entre YA, & une autre ligne quelconque: mais dès que la plus petite des données ſera differente de YA, il faudra décrire d'autres courbes.

5. Toutes ces Operations ſont démontrées, tandis que l'inſtrument n'eſt repreſenté que par des lignes Mathematiques, qui n'ont ni largeur, ni épaiſſeur: mais dans la pratique il faut ſubſtituer des Regles qui ſont larges & épaiſſes comme Fig 49. 50. 52. Ce qui peut arriver ou en laiſſant entier l'angle droit exterieur de toutes les Regles tranſverſales, comme Fig. 52. ou en coupant l'angle droit exterieur des ſeules Regles, qui ſont perpendiculaires à la Regle inferieure YZ, comme Fig. 50. ou en coupant l'angle droit exterieur des ſeules Regles, qui ſont perpendiculaires à la Regle ſuperieure YX; ou en coupant l'angle exterieur de toutes les Regles, comme Fig. 49.

Si l'on ne coupe aucun angle exterieur des Regles tranſverſales, Fig. 52. Voici ce qui ſuit. 1°. La Regle YX a deux côtez, l'exterieur YX, l'interieur Yx; il en eſt de même de la Regle YZ: Or l'on doit prendre les moyennes proportionelles cherchées, auſſi bien que les deux extrêmes données ſur la ligne exterieure YX de la Regle ſuperieure, & ſur la ligne interieure YZ de la Regle inferieure: parceque ce ſont ces deux lignes YX, YZ, qui ſe terminent au centre Y de l'inſtrument, & qui font l'angle ZYX. 2°. Les Regles tranſverſales gliſſent les unes ſur le côté interieur Yx de la Regle ſuperieure, les autres ſur le côté interieur YZ de l'inferieure dans des couliſſes qu'on y a creuſées. 3°. Lorſque l'inſtrument eſt fermé, &

FIG. 52.

& que la Regle ſuperieure entre dans l'inferieure, afin d'occuper le même eſpace : comment toutes les pointes des angles exterieurs des lignes tranſverſales pourront-elles ſe trouver ſur le centre *Y*, non ſeulement parcequ'il faudroit, que la couliſſe fût extrêmement large, pour contenir en un ſeul endroit toutes les lignes tranſverſales, & que ſi la couliſſe étoit ſi large, les Regles ne s'y tiendroient pas fermes, ni dans un même plan : mais encore parceque les ſommets des angles exterieurs des Regles tranſverſales, qui ſont perpendiculaires ſur la Regle ſuperieure *YX*, ne répondent pas au centre *Y*, qui eſt dans la ligne exterieure *YX*; tandis que ces ſommets ſont dans la ligne interieure *Yx* ? 4. Comment trouvera-t'on les triangles dont on a beſoin ? Les triangles *YBC YCD* ſont tels qu'il les faut, pourveu qu'on prenne dans la Regle *BC* le côté qui eſt tourné vers la Regle *DC*, & dans la Regle *DC* le côté qui eſt tourné vers la Regle *BC*. Mais afin que le triangle *YDE* ſervît, il faudroit que la ligne tirée du point *D* au point *E* fût la même, que la ligne *dE* de la troiſiéme Regle tranſverſale, ce qui n'arrive pas.

La difficulté augmente dans le triangle *YEF*, où il faudroit que les points *E*, *e* ne fuſſent qu'un, afin que la ligne *ED* fût, comme elle doit l'être, une perpendiculaire abaiſſée du ſommet *e* de l'angle droit *YeF* ſur la baſe *YF* du triangle rectangle *YeF*.

Les mêmes difficultez ſe trouvent dans les triangles ſuivans *YFG*; *YGH*, &c.

Si Fig. 50. l'on coupe l'angle droit des Regles tranſverſales, qui ſont perpendiculaires à la Regle inferieure *YZ*, en leur ôtant ce qui eſt ponctué; ſans rien changer aux autres Regles tranſverſales. 1°. Il faut auſſi prendre les extrêmes données, & les moyennes cherchées ſur le côté exterieur *YX* & ſur l'interieur *YZ*. 2°. Outre la largeur des couliſſes, outre que ce ne ſont pas les ſommets *b*, *d*, *f* des Regles tranſverſales perpendiculaires ſur *YX*, qui ſe raſſemblent au centre *Y*, lorſque l'inſtrument eſt fermé : mais que ce ſont les points *B*, *D*, *F* exterieurs. Outre ces choſes, dis-je, les ſommets *C*, *E*, *G*, qui ont été retranchez des Regles tranſverſales, qui ſont perpendiculaires à *YZ*, peuvent difficilement ſe réünir juſte au centre *Y*. 3°. L'on ne peut pas couper le ſommet *Cnm* de la Regle *DC*, de telle ſorte, que toûjours la ligne *ln* de la Regle *BC* faſſe une même ligne avec la ligne *nm* de la Regle *DC*, & que la ligne *bC* de la Regle *BC* tombe ſur le point *C* de la Regle *DC*. Car à meſure qu'on ouvre l'inſtrument, l'angle *CYB* croit, & comme le triangle *YBC* eſt rectangle en *B*, l'angle *BCY* diminuë toûjours : donc auſſi l'angle interne *Cmn*, qui lui eſt égal décroit toûjours : & dans le triangle *Cmn* rectangle en *C*, l'angle *Cnm* augmente toûjours. Mais ces deux angles *Cnm*, *Cmn* ont été rendus fixes & déterminez, lorſqu'on a coupé l'extrêmité de la Regle *DC*. L'on ne peut donc pas tellement

FIG. 50.

couper l'extrêmité de la Regle CD, que les lignes lm, mn n'en faſſent jamais qu'une ; ni que la ligne BC paſſe toûjours par le point C, parceque la ligne ln variant, la ligne bC varie auſſi, & a tantôt une poſition, tantôt une autre à l'égard du point C. Or il faudroit que la ligne BbC tomba toûjours ſur le point C, afin que la ligne nD vienne du ſommet C de l'angle droit YCD ; autrement CnD n'eſt pas une moyenne proportionelle.

Si l'on coupe le ſommet des ſeules tranſverſales qui ſont perpendiculaires à la Regle ſuperieure YX, c'eſt entierement la même choſe.

FIG. 49. Si l'on coupe le ſommet de toutes les tranſverſales, comme Fig. 49. l'on trouvera encore les mêmes difficultez.

SECTION II.

Des lignes dont il faut ſe ſervir pour la conſtruction d'un Problême.

1. QUand on veut conſtruire un Problême, c'eſt une faute ſelon M. DESCARTES ſoit que l'on ſe ſerve de lignes plus compoſées, lorſqu'il peut ſe conſtruire avec des lignes plus ſimples ; ſoit qu'on tâche d'employer des lignes plus ſimples, lorſqu'il ne peut être conſtruit, que par des lignes plus compoſées. En particulier, comme il le dira Part. 3. Sect. 3. Art 2. ce ſeroit une faute d'employer les Sections coniques à conſtruire les Problêmes, pour leſquels on n'a beſoin que de cercles, ou de n'employer pas des Sections coniques à conſtruire ceux, pour leſquels les cercles ne ſuffiſent pas. Car enfin, ajoûte M. DESCARTES, tout ce qui témoigne quelque ignorance s'appelle faute.

2. C'étoit là le ſentiment de Pappus, * comme on le voit dans le Liv. 4. de ſes Collections Mathematiques, avant la Propoſition 31. où il aſſure que c'étoit auſſi le ſentiment des Geometres de ſon tems. C'eſt auſſi ce qu'exigent ordinairement les Geometres Modernes, parmi leſquels il s'en trouve pourtant, qui y mettent quelque exception. ** *Car c'eſt en quelque façon gêner la Geometrie, que d'y introduire ſouvent avec beaucoup de difficulté, de certaines courbes preferablement à d'autres, qui ſe preſentent naturellement, & dont la deſcription eſt ſouvent très-ſimple, en quoi il faudroit que les courbes fuſſent preferées, ſans avoir égard à leur genre, de la maniere, qu'on le détermine ordinairement.* De ſorte qu'*il* † *paroît que la facilité d'une conſtruction & ſa ſimplicité peuvent recompenſer en quelque ſorte le défaut, qu'il peut y avoir à employer des courbes plus compoſées.* Ainſi dans l'inſtrument, dont on vient de parler, Sect. 1. §. *Les lignes* AD, AF, AH *ſont beaucoup trop compoſées pour*

* *Videtur autem quodam modo peccatum non parvum eſſe apud Geometras, cùm Problema planum per conica, vel linearia ab aliquo inveniatur, & ut ſummatim dicam, cùm ex improprio genere ſolvitur.*

** M. Guiſnée. *Application de l'Algebre à la Geometrie.* Pag. 28.

† M. de l'Hôpital, Liv. 10. *des Problêmes déterminez.* Pag 400. § Pag. 459.

reſoudre le Problême des moyennes proportionelles ; cependant la facilité de la conſtruction & de la démonſtration récompenſe en quelque ſorte ce défaut. En effet dans la pratique ne faut-il pas principalement avoir égard à la facilité, lorſque l'utilité eſt la même ? Pourquoi vouloir rendre entierement inutiles des proprietez d'une courbe d'un degré plus compoſée, dès qu'elles ſeront proprietez d'une courbe d'un degré plus ſimple, & cela ſeulement, parceque la plus haute puiſſance de l'inconnuë, qui exprime la nature d'une courbe monte à la cinquiéme puiſſance ; tandis que la plus haute puiſſance de l'inconnuë d'une autre courbe ne va que juſqu'à la quatriéme. Ce ne ſera pas même une marque d'ignorance, que d'employer une courbe plus compoſée : car le Geometre peut ſavoir les differentes conſtructions du Problême.

3. M. DESCARTES a-t'il conſtruit les Problêmes par les plus ſimples lignes ? Pour une équation de ſix dimenſions M. DESCARTES employe deux lieux, dont l'un a trois degrez, l'autre qui eſt le cercle en a deux ; M. de Fermat employe deux lieux de trois degrez chacun ; M. de la Hire employe deux lieux, dont l'un a trois degrez, l'autre deux. Pour une équation de ſept dimenſions, la Methode de M. DESCARTES employe deux lieux dont l'un a quatre degrez, l'autre qui eſt le cercle en a deux ; celle de M. de Fermat employe deux lieux de quatre dimenſions chacun ; celle de M. de la Hire employe deux lieux de trois degrez chacun. En tout la Methode de M. de la Hire eſt plus ſimple & plus abregée, que celle de M. de Fermat. Pour les équations du ſixiéme degré la Methode de M. DESCARTES eſt en quelque façon plus ſimple que celle de M. de Fermat : mais pour les autres équations la Methode de M. de Fermat eſt plus abregée que celle de M. DESCARTES. M. de l'Hôpital Liv. 9. de la conſtruction des égalitez ſe ſert des mêmes lieux que Monſieur de la Hire.

4. Ceux qui les premiers ont cherché par quelle ligne chaque Problême devoit être conſtruit ; ont apparemment tenté cette conſtruction par des courbes ſouvent plus ſimples, que la nature du Problême ne le permettoit, avant que d'avoir pû rencontrer les plus ſimples, qui convinſſent : c'étoit un effet de l'ignorance, à la verité : mais il n'y avoit là aucune faute.

Les Geometres qui depuis M. DESCARTES ont tenté de conſtruire les Problêmes par des courbes plus ſimples que celles qu'il avoit déterminées, Liv. 3. Part. 4. & 5. n'ont pas cru, avant même que de voir leur ſuccès, de faire une faute.

PARTIE SECONDE.

De la nature des Equations, & de leur preparation.

SECTION I.

De la nature des Equations.

M. DESCARTES.

De la nature des équations.

OR afin que je puiſſe ici donner quelques Regles, pour éviter l'une & l'autre de ces deux fautes; il faut que je die quelque choſe en general de la nature des équations; c'eſt-à-dire des ſommes compoſées de pluſieurs termes, partie connus & partie inconnus, dont les uns ſont égaux aux autres, ou plûtôt qui conſiderez tous enſemble ſont égaux à rien: car ce ſera ſouvent le meilleur de les conſiderer en cette ſorte.

ARTICLE I.

Des Racines d'une Equation.

M. DESCARTES.

Combien il peut y avoir de racines en chaque équation.

SAchez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnuë a de dimenſions, autant peut-il y avoir de diverſes racines, c'eſt-à-dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple ſi on ſuppoſe x égal à 2, ou bien $x - 2$ égal à rien; & dérechef $x = 3$, ou bien $x - 3 = 0$; en multipliant ces deux équations $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$ l'une par l'autre, on aura $xx - 5x + 6 = 0$, ou bien $xx = 5x - 6$, qui eſt une équation, en laquelle la quantité x vaut 2, & tout enſemble vaut 3. Que ſi dérechef on fait $x - 4 = 0$, & qu'on multiplie cette ſomme par $xx - 5x + 6 = 0$, on aura $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, qui eſt une équation en laquelle x ayant trois dimenſions, a auſſi trois valeurs, qui ſont 2, 3, & 4.

Mais ſouvent il arrive que quelques-unes de ces racines ſont fauſſes, ou moindres que rien. Comme ſi on ſuppoſe, que x deſigne auſſi le défaut d'une quantité qui ſoit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$ fait $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$. Pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à ſavoir trois vrayes, qui ſont 2, 3, 4, & une fauſſe qui eſt 5. *Quelles ſont les fauſſes racines.*

Voyez Sect. 2. Art. 10.

1. On peut appeller racines d'une quantité abx, les trois quantitez a, b, x, par la multiplication deſquelles la quantité abx a été produite. a & b ſont les racines de la quantité $aa + 2ab + bb$, parceque $a + b$ ſe multipliant l'a produite. Les racines de l'équation $xx - aa = 0$ ſont $x + a = 0$, $x - a = 0$ par la multiplication deſquelles l'équation a été produite; ou $x = a$, $x = -a$, en exprimant les differentes valeurs de x; ou principalement x lui-même; ou ſes valeurs $+a$, $-a$. Car on donne indifferemment à toutes ces quantitez le nom de racine de l'équation $xx - aa = 0$. Ce qu'il eſt aiſé d'appliquer à toute autre équation.

M. DESCARTES diviſe les racines d'une équation en réelles ou imaginaires; les réelles en vrayes ou fauſſes. Il appelle racines vrayes celles, dont la valeur eſt plus grande que zero, $x = a$, $x - a = 0$; $x = 5$, $x - 5 = 0$: fauſſes celles dont la valeur eſt moindre que zero, $x = -a$, $x + a = 0$; $x = -6$, $x + 6 = 0$; ou $-x = 6$, $-x - 6 = 0$. Zero eſt, pour ainſi dire, le terme où les racines vrayes & fauſſes commencent, les unes allant d'un côté en croiſſant 0, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, &c. les autres allant de l'autre en décroiſſant 0, -1, -2 -3, -4, &c. Les racines imaginaires ſont celles, qui ſuppoſent que l'on puiſſe extraire la racine quarrée d'une grandeur negative $\sqrt{-ab}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-aa}$, $\sqrt{-4}$; ce qui eſt impoſſible: car -2 ſe multipliant produit $+4$, le quarré de $-a$ c'eſt $+aa$, & il ne peut y avoir de quarré negatif. Les racines vrayes s'appellent encore poſitives, les fauſſes negatives, & renverſées.

Dans les lieux Geometriques une appliquée, qui eſt à droite, ayant été nommée $+y$; l'appliquée correſpondante, qui eſt à gauche, ſe nomme $-y$: les abſciſſes, qui vont en haut, ayant été nommées $+x$; les abſciſſes, qui partent du même point, & qui vont en bas, ſe nomment $-x$. Ainſi il eſt certain que les racines $-y$, $-x$ ſont autant réelles, & repreſentent des quantitez auſſi réelles, que les racines poſitives $+y$, $+x$. Ce pourroit être pour cette raiſon, que M. DESCARTES les a également appellé réelles. Les vrayes ont auſſi été nommées * *poſitiva ſuprà*, * Lett. 7. Tom.

3. de M. Deſcartes. les fauſſes *poſitiva infrà*, poſitives qui vont en haut, poſitives qui vont en bas.

Les racines ſourdes poſitives $\sqrt{a}$, $\sqrt{3}$ ne ſont pas imaginaires, comme les negatives $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-3}$: parceque quoiqu'on ne puiſſe pas plus exprimer exactement en nombre $\sqrt{3}$ que $\sqrt{-3}$; cependant l'on peut approcher de $\sqrt{3}$; on peut aſſurer qu'elle eſt plus grande que 1, moindre que 2 ; on peut l'exprimer exactement en ligne. Or tout cela ne convient pas à $\sqrt{-3}$.

ARTICLE II.

De la formation des Equations.

ON connoît la nature des équations, en examinant de quelle maniere elles ont pû être produites.

1. Soit $x = a$, ou $x - a = 0$; $x = b$, ou $x - b = 0$; leur produit eſt $xx \overline{-}^{ax}_{bx} + ab = 0$. Soit en nombres $x = 2$ ou $x - 2 = 0$; $x = 3$, ou $x - 3 = 0$, leur produit eſt $xx - 5x + 6 = 0$.

Soit encore $x = c$, ou $x - c = 0$, qui multiplie l'équation litterale precedente, le produit eſt $x^3 \begin{matrix} -axx + abx \\ -bxx + acx - abc = 0 \\ -cxx + bcx \end{matrix}$. Soit auſſi $x - 4 = 0$, qui multiplie l'équation numerique precedente, le produit eſt $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$.

Soit encore $x = d$, ou $x - d = 0$, qui multiplie l'équation litterale precedente, le produit eſt $x^4 \begin{matrix} +abxx \\ -ax^3 + acxx - abcx \\ -bx^3 + adxx - abdx \\ +abcd = 0. \\ -cx^3 + bcxx - acdx \\ -dx^3 + bdxx - bcdx \\ +cdxx \end{matrix}$

Soit auſſi $x - 5 = 0$, qui multiplie l'équation numerique precedente, le produit eſt $x^4 - 14x^3 + 71xx - 154x + 120 = 0$.

La derniere équation litterale peut encore être produite par la multiplication des deux équations $xx \overline{-}^{ax}_{bx} + ab = 0$, $xx \overline{-}^{cx}_{dx} + cd = 0$; ou par celle des deux $xx \overline{-}^{ax}_{cx} + ac = 0$, $xx \overline{-}^{bx}_{dx} + bd = 0$; ou des deux $xx \overline{-}^{ax}_{dx} + ad = 0$, $xx \overline{-}^{bx}_{cx} + bc = 0$; ou des deux

$$x^3 \begin{matrix} -axx+abx \\ -bxx+adx-abd \\ -dxx+bdx \end{matrix} = 0\ ;\ x-c=0\ ;$$ ou des deux

$$x^3 \begin{matrix} -bxx+bcx \\ -cxx+bdx-bcd \\ -dxx+cdx \end{matrix} = 0\ ,\ x-a=0\ ;$$ ou des deux

$$x^3 \begin{matrix} -axx+acx \\ -cxx+adx-acd \\ -dxx+cdx \end{matrix} = 0\ ,\ x-b=0.$$

La derniere équation numerique peut auſſi être produite par la multiplication des deux équations $xx-5x+6=0$, $xx-9x+20=0$, dont la premiere eſt le produit de $x-2=0$ par $x-3=0$; la ſeconde eſt le produit de $x-4=0$, par $x-5=0$. ou par la multiplication des deux $xx-6x+8=0$, $xx-8x+15=0$, &c.

On peut ainſi produire d'autres équations à l'infini, en multipliant celles qui ſont déja formées par de nouvelles quantitez.

On peut auſſi multiplier des équations litterales par des équations numeriques, $x-a=0$ par $x-7=0$, dont le produit eſt $xx\overset{-ax}{-7x}+7a=0$.

Dans ces équations, pour la formation deſquelles on ne s'eſt ſervi que de racines vrayes, les ſignes + & — ſont alternatifs, le ſigne + eſt dans les termes impairs 1, 3, 5, &c. le ſigne — dans les pairs, 2, 4, 6, &c.

Toutes les racines des équations precedentes ſe trouvent dans le ſecond terme, où elles ſont une ſomme. Ce qui ſe pourra encore obſerver dans les ſuivantes.

Si les racines des équations avoient été $-x=-a$, $-x+a=0$; $-x=-2$, $-x+2=0$, &c. on les reduiroit à $x=a$, $x-a=0$, $x=2$, $x-2=0$: de ſorte que ce ſont les mêmes racines vrayes differemment exprimées.

2. Soit $x=-a$, ou $x+a=0$; $x=-b$, ou $x+b=0$; leur produit eſt $xx\overset{+ax}{+bx}+ab=0$. Soit $x=-2$, ou $x+2=0$; $x=-3$, ou $x+3=0$, leur produit eſt $xx+5x+6=0$.

Soit encore $x=-c$, ou $x+c=0$, qui multiplie l'équation litterale precedente, le produit eſt $x^3 \begin{matrix} +axx+abx \\ +bxx+acx+abc \\ +cxx+bcx \end{matrix} = 0$. Soit auſſi

$x = -4$, $x + 4 = 0$, qui multiplie l'équation numerique precedente, le produit eſt $x^3 + 9xx + 26x + 24 = 0$.

Soit encore $x = -d$, ou $x + d = 0$, &c.

Dans ces équations, pour la formation deſquelles l'on ne s'eſt ſervi que de racines fauſſes, le ſigne + ſe trouve partout.

Si les racines propoſées avoient été $-x = a$, ou $-x - a = 0$; $-x = 2$, ou $-x - 2 = 0$; &c. on les reduiroit à $x = -a$, $x + a = 0$; $x = -2$, $x + 2 = 0$. Ainſi ce ſont les mêmes racines fauſſes que les precedentes.

3. Soient $x - a = 0$, $x - b = 0$ deux racines vrayes; $x + c = 0$, $x + d = 0$; le produit

$$\begin{array}{rl} & + abxx \\ & - ax^3 - acxx + abcx \\ & - bx^3 - bcxx + abdx \\ x^4 & \qquad\qquad + abcd = 0. \\ & + cx^3 - adxx - acdx \\ & + dx^3 - bdxx - bcdx \\ & + cdxx \end{array}$$

Suppoſons $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$; l'équation ſe reduit à $x^4 + 4x^3 - 7xx - 22x + 24 = 0$.

Soient encore $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ deux racines vrayes; $x + 4 = 0$, racine fauſſe : le produit eſt $x^3 - 1xx - 14x + 24 = 0$.

Dans ces équations les ſignes + & — ſont alternatifs autant de fois qu'il y a de racines vrayes; & ils ſont autant de fois de ſuite qu'il y a de racines fauſſes. Dans les équations litterales il a fallu, lorſque les deux ſignes ſe trouvent dans le même terme, connoître & comparer la valeur des quantitez connuës; avant que de ſavoir quel ſigne ce terme avoit.

4. Les racines ſont $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 6 = 0$; le produit eſt $x^3 * - 28x + 48 = 0$, dans laquelle le ſecond terme eſt évanoüi & nul. Ce qui arrivera dans toutes les équations numeriques, où la ſomme des racines vrayes, 2, 4, eſt égale à la ſomme 6 des fauſſes. Le même arrive aux équations litterales, lorſqu'il n'y aura qu'une lettre a qui exprimera la valeur des x. Soit donc $a = 2$, $2a = 4$, $3a = 6$, les racines precedentes ſeront $x - a = 0$, $x - 2a = 0$, $x - 3a = 0$, dont le produit eſt $x^3 * - 7aax + 6a^3 = 0$.

Mais ſi differentes lettres expriment les racines, le ſecond terme ne ſera pas évanoüi avant qu'on ait comparé ces valeurs, comme on a fait n. 3. mais les racines poſitives ſeront dans le ſecond terme avec le ſigne —, & les negatives avec le ſigne +. Soit donc $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, les racines precedentes ſeront $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, &

leur

$$\text{leur produit } x^3 \begin{matrix} -axx + abx \\ -bxx - acx + abc = 0. \\ +cxx - bcx \end{matrix}$$

Reciproquement, lorſque le ſecond terme eſt évanoüi, la ſomme des racines vrayes eſt égale à la ſomme des racines fauſſes.

5. Soit $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 5 = 0$; le produit eſt $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$. Le ſecond terme a le ſigne —, ce qui arrive toutes les fois que la ſomme des racines vrayes ſurpaſſera la ſomme des fauſſes, parceque toutes les racines ſe trouvent une fois chacune dans le ſecond terme. Ce qui arrive, dis-je, ſoit que les racines s'expriment par des nombres, ſoit qu'elles s'expriment par une même lettre. Car ſi $a = 2$, $\frac{3a}{2} = 3$, $2a = 4$, $\frac{5a}{2} = 5$; les racines ſeront $x - a = 0$, $x - \frac{3}{2}a = 0$, $x - 2a = 0$, $x + \frac{5}{2}a = 0$; & le produit $x^4 - 2ax^3 - \frac{19}{4}aaxx + \frac{53}{4}a^3x - \frac{15}{2}a^4 = 0$. Lorſque les racines s'expriment par differentes lettres, les ſignes + & — ſe trouveront au ſecond terme, & il ſera aiſé de voir, ſi la ſomme des quantitez, qui ont —, eſt plus grande que la ſomme des quantitez qui ont +: & ſi la ſomme des quantitez, qui ont —, eſt la plus grande, on regardera le ſecond terme comme ayant —. Dans cette équation

$$x^3 \begin{matrix} -axx + abx \\ -bxx - acx + abc = 0, \text{ ſi } a = 2, b = 3, \\ +cxx - bcx \end{matrix}$$

$c = 4$, le ſecond terme ſe reduit à $-1xx$.

6. Soit $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 4 = 0$, $x + 2 = 0$, leur produit eſt $x^4 + 1x^3 - 16xx - 4x + 48 = 0$. Le ſecond terme a le ſigne +; & cela arrive toutes les fois, que la ſomme des racines fauſſes ſurpaſſe la ſomme des vrayes; parceque toutes les racines ſe trouvent une fois chacune dans le ſecond terme. Quand l'équation eſt litterale, on jugera du ſigne, que le ſecond terme a, comme n. 5.

7. Les racines $xx - a$, $xx - b$, $xx + c$ produiſent

$$x^6 \begin{matrix} -ax^4 + abxx \\ -bx^4 - acxx + abc = 0. \text{ Ainſi lorſ-} \\ +cx^4 - bcxx \end{matrix}$$

que les expoſans 6, 4, 2, 0, de l'inconnuë dans chaque terme ſeront également éloignez entr'eux, & que leur difference ſera 2; l'équation ſera d'un degré deux fois moindre qu'il ne paroît, à en juger par la plus hau-

te puiſſance : car celle-ci, qui n'eſt que du troiſiéme degré, paroîtroit du ſixiéme, ſi l'on ne regardoit que le premier terme x^6 ; lequel étant produit par la multiplication de $xx \times xx \times xx$, ſes racines ſont xx & non pas x. Cependant après avoir trouvé les trois racines $xx = a$, $xx = b$, $xx = -c$, on peut encore déterminer les valeurs de x, qui ſont $x = \pm \sqrt{a}$, $x = \pm \sqrt{b}$; $x = \mp \sqrt{c}$; de ſorte que x a enfin ſix racines dans l'équation propoſée.

Mais ſi la difference des expoſans 6, 3, 0, étoit 3 ; comme il arrive dans $x^6 + 2aax^3 + aa$; l'équation ſeroit d'un degré trois fois moindre, que le premier terme ne l'indique. Celle-ci eſt quarrée, ſes racines ſont $x^3 + a = 0$, $x^3 + a = 0$, qui ont encore chacune trois racines $x = -\sqrt[3]{a}$, $x = -\sqrt[3]{a}$, $x = -\sqrt[3]{a}$.

8. Une racine litterale $\sqrt{a-b}$ peut être imaginaire, ſans le paroître d'abord : car ſi a eſt plus grand que b, la racine eſt réelle, ſi a eſt moindre que b, elle eſt imaginaire.

Les racines imaginaires peuvent par leur multiplication faire un produit réel : $+\sqrt{-9}$ multiplié par $-\sqrt{-9}$, produit $+9$. Si l'on multiplie $x - 1 - \sqrt{-6} = 0$ par $x - 1 + \sqrt{-6} = 0$, le produit eſt $xx - 2x + 7 = 0$; qui étant multiplié par $x + 2 + \sqrt{-7}$, fait $x^3 + xx\sqrt{-7} + 3x - 2x\sqrt{-7} + 14 + 7\sqrt{-7} = 0$. Si l'on multiplie enſemble $x + \sqrt{-a}$, $x - \sqrt{-a}$, $x - b + \sqrt{-c}$, $x - b - \sqrt{-c}$, le produit eſt $x^4 - 2bx^3 \overset{+axx}{+bbxx} + 2abx \overset{+abb}{+ac} = 0$.
$+cxx$

On peut donc obſerver, que lorſque les équations n'ont point de termes, qui ayent une racine imaginaire ; alors ou ces équations n'ont pas été produites par des racines imaginaires, ou bien elles ont été produites par deux, ou quatre, &c. racines imaginaires, qui ne differoient entr'elles, que parceque l'une $+\sqrt{-a}$ avoit le ſigne +, l'autre $-\sqrt{-a}$ avoit le ſigne — devant le ſigne radical $\sqrt{}$; ce qui a fait que le ſigne $\sqrt{}$ a diſparu.

On doit remarquer la même choſe touchant les racines incommenſurables $+\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, qui produiſent -7 ; ou $+\sqrt{7}$, $+\sqrt{7}$; qui produiſent $+7$; ou $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$, qui produiſent encore $+7$: de ſorte que, ſi une équation n'a point d'incommenſurables, ou les racines ne ſont pas incommenſurables, ou elles ſont deux ou quatre incommenſurables, dont les ſignes radicaux ont diſparu par la multiplication.

9. De toutes les équations, que l'on vient de former, il ſuit qu'une équation a autant de racines, que de dimenſions ; que l'inconnuë a autant de valeurs, qu'elle a de degrez ; deux racines ſi elle eſt quarrée ; trois, ſi elle eſt cube, quatre ſi elle eſt une quatriéme puiſſance, &c.

Le dernier terme, où il n'y a que des grandeurs connuës, eſt le produit de toutes les valeurs de l'inconnuë x. C'eſt pourquoi ſi le dernier ter-

me a le ſigne — il y aura quelque racine vraye ; car ſi elles étoient ou toutes vrayes, ou toutes fauſſes, le dernier terme auroit +, comme on a vû, n. 1. 2.

ARTICLE III.

Connoître combien dans une équation il y a de racines vrayes, & combien de fauſſes.

M. DESCARTES apprend ici 1° comment on peut diminuer le nombre des dimenſions d'une équation, lorſqu'on connoît quelqu'une de ſes racines ; 2° comment on peut examiner ſi quelque quantité donnée eſt la valeur d'une racine ; on parlera ailleurs de ces deux choſes. 3°. Combien il peut y avoir de racines vrayes, combien de fauſſes dans une équation.

M. DESCARTES.

Et on voit évidemment de ceci, que la ſomme d'une équation, qui contient pluſieurs racines, peut toûjours être diviſée par un binome compoſé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'une des vrayes racines, laquelle que ce ſoit ; ou plus la valeur de l'une des fauſſes. Au moyen dequoi on diminuë d'autant ſes dimenſions. Voyez Part. 3. Sect. 2.

Comment on peut diminuer le nombre des dimenſions d'une équation, lorſqu'on connoit quelqu'une de ſes racinee.

Et reciproquement que ſi la ſomme d'une équation ne peut être diviſée par un binome compoſé de la quantité inconnuë + ou — quelqu'autre quantité ; cela témoigne que cette autre quantité n'eſt la valeur d'aucune de ſes racines. Comme cette derniere $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, peut bien être diviſée par $x - 2$, & par $x - 3$, & par $x - 4$, & par $x + 5$; mais non point par $x +$ ou — aucune autre quantité. Ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5. Voyez Part. 3. Sect. 2.

Comment on peut examiner ſi quelque quantité donnée eſt la valeur d'une racine.

On connoît auſſi de ceci, combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fauſſes en chaque équation. A ſavoir il peut y en avoir autant de vrayes, que les ſignes + & — s'y trouvent de fois être changez ; & autant de fauſſes, qu'il s'y trouve de fois deux ſignes +, ou deux ſignes —, qui s'entreſuivent. Comme en la derniere, à cauſe qu'après $+ x^4$ il y a $- 4x^3$, qui eſt un

Combien il peut y avoir de vrayes racines en chaque équation.

changement du ſigne + en —; & après — $19xx$ il y a + $106x$; & après + $106x$ il y a — 120; qui ſont encore deux autres changemens, on connoît, qu'il y a trois vrayes racines; & une fauſſe, à cauſe que les deux ſignes — de $4x^3$, & $19xx$ s'entreſuivent.

1. Lorſque les équations ont été formées, comme dans l'Article II. on voit, que tous les termes étant remplis, autant de fois que les ſignes + & — ſe ſuivent; autant il y a de racines vrayes; & qu'autant de fois que deux ſignes +, ou deux ſignes — ſe ſuivent; autant il y a de racines fauſſes.

2. Mais y a-t'il en effet dans toutes ſortes d'équations, autant de racines vrayes, que les ſignes + & — ſont de fois alternatifs; & autant de fauſſes, que l'un de ces ſignes ſe trouve de fois de ſuite? Voici comment M. DESCARTES répond ſur ce qu'on prétendoit, qu'il l'avoit avancé.

* *Tom. 3. Let. 77.* * *La ſeconde objection eſt une fauſſeté manifeſte, car je n'ai pas dit ce qu'il veut que j'aye dit, qu'il y a autant de vrayes racines, que les ſignes + & — ſe trouvent de fois changez, ni n'ai eu aucune intention de le dire. J'ai dit ſeulement, qu'il y en peut autant avoir, & j'ai montré expreſſément dans la page 380. quand eſt-ce qu'il n'y en a pas tant, à ſavoir quand quelques-unes de ces vrayes racines ſont imaginaires.* En effet il dira, Sect. 2. Art. 10. que *tant les vrayes racines que les fauſſes ne ſont pas toûjours réelles, mais quelquefois ſeulement imaginaires: c'eſt-à-dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui correſponde à celles qu'on imagine.* C'eſt-à-dire, que lorſqu'on regarde les ſignes d'une équation, s'ils ſont tous alternatifs; les racines ſont ou toutes vrayes, ou toutes imaginaires, ou les unes vrayes, les autres imaginaires; ou plûtôt il n'y en a certainement aucune fauſſe.

Si tous les ſignes d'une équation ſont les mêmes; les racines ſont ou toutes fauſſes, ou toutes imaginaires, ou les unes fauſſes, les autres imaginaires; ou plûtôt il n'y en a certainement aucune vraye.

Lorſque les ſignes + & — ſe ſuivent; cela montre, qu'il y a une des racines, qui eſt ou vraye, ou imaginaire, & qui certainement n'eſt pas fauſſe. Lorſqu'après cela un même ſigne eſt mis deux fois de ſuite; cela marque qu'une autre des racines eſt ou fauſſe, ou imaginaire, & que certainement elle n'eſt pas vraye, &c.

Voilà ce que M. Deſcartes aſſure: cependant le produit de ces deux racines imaginaires $\sqrt{\ } - x + \sqrt{\ } - a = o$, $\sqrt{\ } - x + \sqrt{\ } - a = o$ eſt $-x + 2\sqrt{ax} - a = o$. L'équation a deux racines & l'inconnuë x n'a qu'une dimenſion; les ſignes + — ſont une fois alternatifs, & les deux racines ſont fauſſes.

3. Mais quelle utilité trouve-t'on à s'imaginer ainſi tant de racines

vrayes, tant de fauſſes ; quoiqu'il puiſſe y en avoir d'imaginaires à leur place ? Le voici ; c'eſt que pour connoître les racines d'une équation, il faut ſelon M. Deſcartes, Part. 3. Sect. 2. tenter la diviſion de l'équation par un certain binome, lorſque la racine cherchée peut être vraye ; & par un certain autre binome, lorſque la racine peut être fauſſe. C'eſt pourquoi ſi je connois par la diſpoſition des ſignes, que les racines peuvent toutes être vrayes ; je ne tenterai pas la diviſion par les binomes, qui conviennent aux racines fauſſes ; au lieu que ſi je connois que toutes les racines peuvent être fauſſes ; je ne tenterai pas la diviſion par les binomes, qui conviennent aux racines vrayes ; mais s'il peut y avoir des racines vrayes & des fauſſes, je tenterai la diviſion par l'une & l'autre ſorte de binomes. Tel eſt l'avantage, que M. Deſcartes a prétendu, qu'on tirât de la conſideration que l'on fait ſur la maniere, dont les ſignes + & — ſe ſuivent dans une équation.

4. Lorſqu'un terme de l'équation eſt évanoüi, $y^3 * - ay + bb = o$, l'on peut ſuppoſer + & — dans le terme évanoüi, comme ſi l'équation étoit $y^3 \pm oyy - ay + bb = o$. Et par rapport à ce ſeul terme évanoüi il faut imaginer une racine vraye & une fauſſe quand on le compare à y^3, qui le precede ; & une vraye avec une fauſſe, quand on le compare à ay, qui le ſuit.

SECTION II.

Preparation des Equations.

LA transformation ou reduction d'une équation eſt ſon changement en une autre.

La premiere s'appelle la propoſée, la ſeconde la transformée, ou reduite.

Une bonne preparation ou transformation eſt celle, qui change l'équation propoſée en une autre, qui rend la ſolution du Problême poſſible, ſuppoſé qu'on n'ait pas de Methode pour le reſoudre avec l'équation propoſée ; ou qui rend la reſolution du Problême plus aiſé, ſuppoſé qu'il eût pu ſe reſoudre avec la propoſée.

Une équation n'eſt point parfaitement transformée, que lorſque 1° elle n'a qu'une inconnuë ; 2° elle n'a ni fraction, ni incommenſurable ; 3° la plus haute puiſſance de l'inconnuë n'eſt multipliée ou diviſée que par l'unité ; 4° l'équation eſt reduite aux moindres termes ; 5° elle eſt ſous la forme, qui rend la reſolution du Problême la plus facile.

ARTICLE I.

Changer les Racines fauſſes d'une Equation en vrayes, & les vrayes en fauſſes.

M. DESCARTES.

DE plus il eſt aiſé de faire en une même équation, que toutes les racines, qui étoient fauſſes deviennent vrayes, & par même moyen, que toutes celles, qui étoient vrayes deviennent fauſſes, à ſavoir en changeant tous les ſignes + ou —, qui ſont en la ſeconde, en la quatriéme, en la ſixiéme, ou autres places, qui ſe déſignent par nombres pairs, ſans changer ceux de la premiere, de la troiſiéme, de la cinquiéme & ſemblables, qui ſe déſignent par les nombres impairs: comme ſi au lieu de $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, on écrit $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, on a une équation en laquelle il n'y a qu'une vraye racine, qui eſt 5, & trois fauſſes, qui ſont 2, 3, & 4.

Les racines de l'équation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, ſont $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 5 = 0$; dont trois 2, 3, 4 ſont vrayes, une 5 eſt fauſſe: au contraire les racines de $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, ſont $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 5 = 0$; dont trois 2, 3, 4 ſont fauſſes, une 5 eſt vraye.

Les racines de l'équation $x^3 \begin{matrix} - axx + abx \\ - bxx + acx \\ - cxx + bcx \end{matrix} - abc = 0$ ſont les trois vrayes $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$. Les racines de l'équation $x^3 \begin{matrix} + axx + abx \\ + bxx + acx \\ + cxx + bcx \end{matrix} + abc = 0$, ſont les trois fauſſes $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$. Toute la difference qu'il y a entre ces deux équations, c'eſt que les ſignes du ſecond & du quatriéme terme ſont changez.

Les racines de l'équation $x^3 \begin{matrix} -axx+abx \\ -bxx-acx+abc \\ +cxx-bcx \end{matrix} = 0$, ſont les vrayes $x-a=0$, $x-b=0$, & la fauſſe $x+c=0$. Changez les ſignes du ſecond & quatriéme terme, l'équation ſera $x^3 \begin{matrix} +axx+abx \\ +bxx-acx \\ -cxx-bcx \end{matrix} - abc = 0$, dont les racines fauſſes ſont $x+a=0$, $x+b=0$, la vraye $x-c=0$.

La même choſe arrive dans les équations, dans leſquelles il y a des termes évanoüis. Les racines de l'équation $x^3 * - 28x + 48 = 0$, ſont les vrayes $x-2=0$, $x-4=0$, la fauſſe $x+6=0$. Les racines de l'équation $x^3 * - 28x - 48 = 0$, ſont les fauſſes $x+2=0$, $x+4=0$, la vraye $x-6=0$.

Les racines de l'équation $x^3 + xx\sqrt{-7} \begin{matrix} +3x \\ -2x\sqrt{-7} \end{matrix} \begin{matrix} +14 \\ +7\sqrt{-7} \end{matrix} = 0$, ſont la vraye imaginaire $x-1-\sqrt{-6}=0$, les fauſſes imaginaires $x-1+\sqrt{-6}=0$, $x+2+\sqrt{-7}=0$. Changez les ſignes du ſecond & du quatriéme terme; l'équation eſt $x^3 - xx\sqrt{-7} \begin{matrix} +3x \\ -2x\sqrt{-7} \end{matrix} \begin{matrix} -14 \\ -7\sqrt{-7} \end{matrix} = 0$, dont les racines ſont la fauſſe imaginaire $x+1+\sqrt{-6}=0$, les vrayes imaginaires $x+1-\sqrt{-6}=0$, $x-2-\sqrt{-7}=0$.

ARTICLE II.

Augmenter ou diminuer les racines d'une équation, ſans les connoître.

M. DESCARTES.

QUe ſi ſans connoître la valeur des racines d'une équation, on la veut augmenter ou diminuer de quelque quantité connuë; il ne faut qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer un autre, qui ſoit plus ou moins grand de cette même quantité, & le ſubſtituer par tout en la place du premier.

Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cette équation $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$; il faut prendre y au lieu d'x; & penſer que cette quantité y eſt plus grande qu'x de 3, en ſorte que $y-3$ eſt égal à x, & au lieu de xx il faut mettre le quarré

de $y-3$, qui eſt $yy-6y+9$; & au lieu d'x^3, il faut mettre ſon cube $y^3-9yy+27y-27$; & au lieu d'x^4, il faut mettre ſon quarré de quarré; qui eſt $y^4-12y^3+54yy-108y+81$.

Et ainſi décriavnt la ſomme precedente en ſubſtituant par tout y au lieu d'x on a

$$\begin{array}{r} y^4-12y^3+54yy-108y+81 \\ +4y^3-36yy+108y-108 \\ -19yy+114y-171 \\ -106y+318 \\ -120 \\ \hline y^4-8y^3-1yy+8y \quad * \quad =0. \end{array}$$

ou bien $y^3-8yy-1y+8=0$; où la vraye racine, qui étoit 5, eſt maintenant 8, à cauſe du nombre 3, qui lui eſt ajoûté.

Que ſi on veut au contraire diminuer de 3 la racine de cette même équation, il faut faire $y+3=x$, & $yy+6y+9=xx$; & ainſi des autres; de ſorte que au lieu de $x^4+4x^3-19xx-106x-120=0$ on met

$$\begin{array}{r} y^4+12y^3+54yy+108y+81 \\ +4y^3+36yy+108y+180 \\ -19yy-114y-171 \\ -106y-318 \\ -120 \\ \hline y^4+16y^3+71yy-4y-420=0. \end{array}$$

Et il eſt à remarquer qu'en augmentant les vrayes racines d'une équation, on diminuë les fauſſes de la même quantité; ou au contraire en diminuant les vrayes, on augmente les fauſſes: & que ſi on diminuë, ſoit les vrayes, ſoit les fauſſes, d'une quantité qui leur ſoit égale, elles deviennent nulles; & que ſi c'eſt d'une quantité qui les ſurpaſſe, de vrayes elles deviennent fauſſes, ou de fauſſes vrayes. Comme ici en augmentant de 3 la vraye racine qui étoit 5, on a diminué de 3 chacune des fauſſes, de ſorte que celle qui étoit 4, n'eſt plus qu'1; & celle qui étoit 3, eſt nulle; & celle qui étoit 2, eſt devenuë vraye, & eſt 1, à cauſe que $-2+3$ fait $+1$. C'eſt pourquoi en cette équation $y^3-8yy-1y+8=0$, il n'y a plus que trois racines; entre leſquelles il y en a deux qui ſont

ſont vrayes, 1 & 8; & une fauſſe qui eſt auſſi 1. Et en cette autre $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, il n'y en a qu'une vraye, qui eſt 2, à cauſe que $+5-3$ fait $+2$, & trois fauſſes, qui ſont 5, 6, & 7.

1. Soit propoſée l'équation $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, dont les racines ſont $x - 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$. Quand même je ne les connoîtrois pas, ſi je veux les augmenter chacune de 3, je prends $y - 3 = x$, ce qui eſt la même choſe que $y = x + 3$. Ainſi les quatre racines y de la nouvelle équation, que je ferai par la ſubſtitution, ſeront chacune plus grande de 3, que chacune des quatre racines x de l'équation propoſée. Et c'eſt ce qu'on appelle augmenter de 3 les racines de l'équation $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$. La ſubſtitution, telle que l'ordonne M. Deſcartes, eſt aiſée à faire.

Tout ce que j'ai ſubſtitué, étant ajouté enſemble & avec -120, forme la reduite $y^4 - 8y^3 - 17yy + 8y^* = 0$. Ou en diviſant tout par $y = 0$, $y^3 - 8yy - 17y + 8 = 0$, dont les racines ſont $y - 8 = 0$, $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$. Mais les quatre racines de la reduite $y^4 - 8y^3 - 17yy + 8y^* = 0$, ſont la premiere vraye $y - 8 = 0$, ou $y = 8$, qui ſurpaſſe de 3 la racine vraye $x - 5 = 0$, ou $x = 5$ de la propoſée; la ſeconde vraye $y - 1 = 0$, ou $y = 1$, qui ſurpaſſe de 3 la fauſſe $x + 2 = 0$, ou $x = -2$ de la propoſée, car $-2 + 3 = +1$; la troiſiéme nulle $y = 0$, qui ſurpaſſe de 3 la racine fauſſe $x + 3 = 0$, ou $x = -3$ de la propoſée, car $-3 + 3 = 0$; la quatriéme fauſſe $y + 1 = 0$, ou $y = -1$ ſurpaſſe de 3 la racine fauſſe $x + 4 = 0$, ou $x = -4$, car $-4 + 3 = -1$. De ſorte que chacune des racines de la transformée ſurpaſſe de 3 chacune des racines de la propoſée.

2. Soit la même propoſée $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, dont on veut diminuer les racines de 3 chacune; je fais $x - 3 = y$, ou $y + 3 = 0$; & à la place de x^4 je ſubſtituë &c. & je fais la transformée $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, dont les racines ſont la premiere $y - 2 = 0$, ou $y = 2$ qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine vraye $y - 5 = 0$, ou $y = 5$ de la propoſée; la ſeconde $y + 5 = 0$, ou $y = -5$, qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine fauſſe $y + 2 = 0$, ou $y = -2$ de la propoſée, car $-5 + 3 = -2$; la troiſiéme $y - 6 = 0$, $y = 6$, qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine fauſſe $y + 3 = 0$, ou $y = -3$ de la propoſée, car $-6 + 3 = -3$; la quatriéme $y + 7 = 0$, ou $y = -7$, qui eſt ſurpaſſée de 3 par la racine fauſſe $y + 4 = 0$, ou $y = -4$ de la propoſée, car $-7 + 3 = -4$. De ſorte que chacune des racines de la transformée eſt moindre de 3, que chacune de la propoſée.

3. Lorſqu'on augmente les racines vrayes de 3 par exemple, on ajoûte

$+3$ à toutes les racines ; de ſorte que les fauſſes diminuent de 3 ; car $+3$ ajoûté à -4 fait -1 ; & ſi une fauſſe ſe trouve moindre que 3, en diminuant elle devient vraye, car $+3$ ajouté à -2 fait $+1$; & ſi une fauſſe étoit égale à 3, elle deviendroit nulle, car $+3$ ajouté à -3 fait 0.

Au contraire lorſqu'on diminuë les racines vrayes de 3, on ôte $+3$ de chacune des racines ; de ſorte que les fauſſes augmentent de 3. Car $+3$ ſouſtrait de -3 laiſſe -6 ; mais les vrayes peuvent devenir fauſſes, & nulles ; car ſi de $+3$ l'on ſouſtrait $+3$, le reſte eſt 0 ; & ſi de $+2$ l'on ſouſtrait $+3$, il reſte -1.

4. Les racines de $x^4+4x^3-19xx-106x-120=0$, ayant été augmentées de 3. n. 1. la reduite a été $y^4-8y^3-19yy+8y^*=0$, qui étant diviſée par $y=0$ devient $y^3-8yy-19y+8=0$. De là il ſuit que, toutes les fois que la transformée diminuë d'un degré, & qu'elle a une racine moins que la propoſée : une des racines de la propoſée eſt devenuë nulle ; & qu'elle étoit fauſſe, ſi les racines ont été augmentées, comme n. 1. mais elle ſeroit vraye, ſi les racines avoient été diminuées. Dans les deux cas cette racine eſt égale à la quantité dont on a augmenté ou diminué les racines.

5. On peut augmenter ou diminuer de la même façon les racines des équations litterales. Il faut augmenter de la quantité a les racines de l'équation $x^3+cxx-bbx-bbc=0$; on fait $x+a=y$, $y-a=x$, on ſubſtituë la valeur $y-a$ à la place de x, le quarré de $y-a$ à la place de xx, ſon cube à la place de x^3. La transformée eſt

$$\begin{array}{llll} & & +3aay & -a^3 \\ y^3 & -3ayy & -2acy & +aac=0. \\ & +cyy & -bby & +abb \\ & & & -bbc \end{array}$$

Les racines de la propoſée étoient $x-b=0$, $x+b=0$, $x+c=0$, les racines de la reduite ſont $y+a-b=0$, $y-a+b=0$, $y-a+c=0$.

6. Si l'on ignore les racines de l'équation propoſée, & qu'on les augmente d'une quantité quelconque f ; après qu'on aura découvert les racines de la transformée, on ſouſtraira la quantité f de chacune, les reſtes ſeront les racines de la propoſée. Au contraire ſi les racines de la propoſée ont été diminuées d'une quantité f, il faudra l'ajoûter à chacune des racines de la reduite, afin d'avoir dans chaque ſomme une racine de la propoſée.

Digitized by Google

ARTICLE III.

Oter le ſecond terme d'une Equation.

M. DESCARTES.

OR par cette façon de changer la valeur des racines ſans les connoître, on peut faire deux choſes, qui auront ci-après quelque uſage. La premiere eſt qu'on peut toûjours ôter le ſecond terme de l'équation qu'on examine, à ſavoir en diminuant les vrayes racines de la quantité connuë de ce ſecond terme diviſée par le nombre des dimenſions du premier, ſi l'un de ces deux termes étant marqué du ſigne +, l'autre eſt marqué du ſigne —; ou bien en l'augmentant de la même quantité, s'ils ont tous deux le ſigne + ou le ſigne —, comme pour ôter le ſecond terme de la derniere équation, qui eſt $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, ayant diviſé 16 par 4, à cauſe des 4 dimenſions du terme y^4, il vient dérechef 4, c'eſt pourquoi je fais $z - 4 = y$, & j'écris

$$\begin{array}{r} z^4 - 16z^3 + 96zz - 256z + 256 \\ + 16z^3 - 192zz + 768z - 1024 \\ + 71zz - 568z + 1136 \\ - 4z + 16 \\ - 420 \\ \hline z^4 * - 25zz - 60z - 36 = 0. \end{array}$$

où la vraye racine, qui étoit 2, eſt 6, à cauſe qu'elle eſt augmentée de 4; & les fauſſes, qui étoient 5, 6, & 7, ne ſont plus que 1, 2, & 3, à cauſe qu'elles ſont diminuées chacune de 4.

Tout de même ſi on veut ôter le ſecond terme de $x^4 - 2ax^3 + \frac{2aa}{cc}xx - 2a^3x + a^4 = 0$, parceque diviſant $2a$ par 4 il vient $\frac{1}{2}a$, il faut faire $z + \frac{1}{2}a = x$ & écrire

$$\begin{array}{r} z^4 + 2az^3 + \frac{1}{2}aazz + \frac{1}{2}a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\ - 2az^3 - 3aazz - \frac{1}{2}a^3z - \frac{1}{4}a^4 \\ + 2aazz + 2a^3z + \frac{1}{2}a^4 \\ - cczz - accz + \frac{1}{4}aacc \\ - 2a^3z - a^4 \\ + a^4 \\ \hline z^4 * + \frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{1}{16}a^4 \\ - cczz - accz - \frac{1}{4}aacc \end{array} = 0.$$

Et ſi on trouve après la valeur de z, en lui ajoûtant $\frac{1}{2}a$, on aura celle de x.

1. Les deux équations $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, $-y^4 - 16y^3 - 71yy + 4y + 420 = 0$, qui ne different que par la poſition reciproque des ſignes + & — ſont la même, & ont les mêmes racines, $y - 2 = 0$, $y + 5 = 0$, $y + 6 = 0$, $y + 7 = 0$; ou celles-ci, qui ne ſont pas differentes $-y + 2 = 0$; $-y - 5 = 0$, $-y - 6 = 0$, $-y - 7 = 0$. C'eſt pourquoi je transforme les deux équations propoſées de la même ſorte; & parceque les deux premiers termes ont + dans la premiere, — dans la ſeconde, j'augmente les racines de 4, & je fais pour toutes les deux $z - 4 = y$. Et par la ſubſtitution des valeurs $\pm y^4$, $\pm 16y^3$, $\pm 71yy$, $\pm 4y$, ± 420; je produits deux transformées qui ſont la même $z^4 * - 25zz - 60z - 36 = 0$. $-z^4 * + 25zz + 60z + 36 = 0$.

Les deux équations $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$, $-x^4 + 4x^3 + 19xx - 106x + 120 = 0$, ſont la même, & leurs racines ſont $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 5 = 0$. Ainſi parceque les deux premiers ont l'un +, l'autre —, je diminuë les racines de 1, & pour toutes les deux je prends $z + 1 = x$, ce qui en ſubſtituant encore les valeurs de $\pm x^4$ &c. donne deux transformées, qui ſont encore la même, $z^4 * - 25zz + 60z - 36 = 0$, $-z^4 * + 25zz - 60z + 36 = 0$.

2. L'uſage eſt, lorſqu'on veut faire évanoüir le ſecond terme d'une équation, de la délivrer d'incommenſurables, & de fractions ſi elle en a; de diſpoſer tellement les termes, que la plus haute puiſſance de l'inconnuë ait le ſigne +, & ne ſoit multipliée & diviſée que par l'unité. On enſeignera ces operations dans les Articles VII. & IX.

Enſuite l'on diviſe la quantité connuë du ſecond terme par le nombre des dimenſions du premier; l'on fait la quantité inconnuë — le quotient, qui vient de cette diviſion égale à une autre inconnuë, ſi le ſecond terme de l'équation a —; ou l'on fait l'inconnuë + ce quotient égale à cette autre inconnuë, ſi le ſecond terme a +; on pourſuit les operations telles qu'on va les faire dans les Exemples ſuivans.

Soit propoſée $yy + ay - bb = 0$. le nombre des dimenſions, ou l'expoſant de yy, c'eſt 2; vous diviſez donc la connuë a du ſecond terme par 2; & vous faites $y + \frac{1}{2}a = z$, $z - \frac{1}{2}a = y$; vous ſubſtituez $zz - az + \frac{1}{4}aa$ pour yy, & $z - \frac{1}{2}a$ pour y, c'eſt-à-dire $+az - \frac{1}{2}aa$ pour $+az$, & la reduite eſt $zz * - \frac{1}{4}aa - bb = 0$. ou $zz = \frac{1}{4}aa + bb$, dont les racines ſont $z = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, $-z = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ou $z = -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vous connoîtrez les racines y, ſi pour z vous ſubſtituez ſa valeur $y + \frac{1}{2}a$, Voyez Liv. 1. Part. 2. Art. 2.

Soit proposée l'équation $6x^3 \begin{matrix} -12axx \\ +18bxx \end{matrix} - 6acx - 12bbc = 0$.

Nous diviserons d'abord par 6, afin que la plus haute puissance ne soit multipliée & divisée que par l'unité; il viendra $x^3 \begin{matrix} -2axx \\ +3bxx \end{matrix} - acx - 2bbc = 0$. L'exposant de la haute puissance est 3; les connuës du second terme seront donc divisées par 3, & nous prendrons $x - \frac{2}{3}a + b = z$, $z + \frac{2}{3}a - b = x$. Nous substituerons cette valeur de x, à sa place, le quarré de cette valeur à la place de xx, le cube de cette valeur à la place de x^3, & nous aurons l'équation

$$z^3 * \begin{matrix} -\frac{4}{3}aaz + \frac{16}{3}abz - 3bbz - \frac{16}{27}a^3 - \frac{8}{3}aab - 4abb \\ -acz \qquad\qquad -\frac{2}{3}aac + abc + 2b^3 = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2bbc \end{matrix}$$

Et après que nous aurons trouvé les valeurs de z, comme on l'enseignera Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. nous ajoûterons à chacune $\frac{2}{3}a - b$, afin d'avoir les valeurs de x.

Soit proposée l'équation $x^4 \begin{matrix} -2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0. \\ -ccxx \end{matrix}$

L'exposant de x^4 est 4, par lequel l'on divise $2a$ connuë du second terme; & l'on fait $x - \frac{1}{2}a = z$, $z + \frac{1}{2}a = x$, l'on substituë cette valeur pour x, son quarré, son cube, son quarré de quarré pour xx, x^3, x^4 de la façon qu'on le voit dans le Texte, ce qui donne

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5}{16}a^4 \\ -cczz - acc\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}aacc \end{matrix} = 0.$$

Et quand on aura trouvé les racines de z, on leur ajoûtera $\frac{1}{2}a$, pour avoir les valeurs de x. Voyez Part. 3. Sect. 4. Art. 2.

3. Voici comment on a pu connoître, qu'il faut diviser la connuë du second terme, par le nombre des dimensions de la premiere, & le signe qu'il falloit lui donner, pour transformer l'équation proposée quelconque en une autre, dont le second terme fût nul.

Soit proposée l'équation $yy + ay - bb = o$, je fais $y + f = z$, $z - f = y$. je substituë pour y sa valeur, pour yy le quarré de cette valeur : il vient $zz - 2fz + az - af + ff - bb = o$. Mais le second terme doit être nul : donc $-2fz + az = o$.

$2f = a$, $f = \frac{1}{2}a$. Il faut par consequent diviser la connuë a du second terme par 2 exposant du premier, & il faut faire $z - \frac{1}{2}a = y$; & non pas $z + \frac{1}{2}a = y$, parceque il viendroit $zz + 2fz + az + ff + af - bb = o$. & les termes $+2fz + az$, ayant le même signe ne peuvent pas se détruire comme le font les termes $-2fz + az$.

Soit proposée $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = o$; prenez $y + f = z$, $z - f = y$; substituez cette valeur de y à sa place,

le quarré, le cube, le quarré de quarré de cette valeur à la place de yy, y^3, y^4. La transformée est $z^4 - 4fz^3 + 16z^3$, &c.

$$\begin{array}{lll} y^4 = z^4 - 4fz^3 + 6ffzz - 4f^3z + f^4. \\ +16y^3 = +16z^3 - 48fzz + 48ffz - 16f^3. \\ +71yy = +71zz - 142fz + 71ff. \\ -4y = -4z + 4f. \\ -420. \end{array}$$

Mais ce deuxiéme terme doit être évanoüi, donc $-4fz^3 + 16z^3 = o$, $4f = 16$, $f = \frac{16}{4} = 4$. Il faut donc faire $z - 4 = y$; & $\frac{16}{4}$ montre qu'il faut diviser la connuë 16 du second terme par 4 exposant du premier y^4. D'ailleurs les signes de $-4fz^3 + 16z^3$ sont differens, & les termes s'effaceront ; il faut donc prendre $z - 4 = y$, & non pas $z + 4$.

Si l'on parcourt des équations de differens degrez, l'on trouvera en toutes, que pour faire disparoître le second terme d'une équation, il faut suivre la Regle, que M. DESCARTES donne ici.

Elle est fondée cette Regle 1° sur ce que le second terme de chaque puissance a le signe du second terme de la racine, de plus il contient l'inconnuë avec une dimension moindre de l'unité que le premier terme, enfin il contient le produit du second terme de la racine multiplié par le nombre des dimensions ; $z - 4$, aura pour les deux premiers termes de son quarré $zz - 8z$, de son cube $z^3 - 12zz$, de son quarré de quarré $z^4 - 16z^3$, &c. 2°. Sur ce que dans la substitution après avoir écrit la valeur de y^4, on écrit la valeur de $+16y^3$, & le premier terme de cette valeur est z^3 multiplié par $+16$; ce qui fait $+16z^3$, lequel avec $-16z^3$ de la valeur de y^4 fait zero. Il faut donc que la valeur de y soit $z -$, lorsque la proposée a $+$ au second terme, & au contraire, & que la quantité jointe à z soit la quantité connuë du second terme de la proposée divisé par le nombre des dimensions du premier.

4. L'évanoüissement du second terme rend la resolution des Problêmes

du second, troisiéme & quatriéme degré plus facile. On l'a vû pour le second Liv. 1. Part. 2. Art. 2. on le verra pour le troisiéme & quatriéme Part. 3. & 4.

5. On a remarqué Sect. 1. Art. 2. n. 4. que dans les équations, où le second terme est nul, la somme des racines vrayes est égale à la somme des racines fausses.

ARTICLE IV.

Faire que toutes les fausses racines d'une équation deviennent vrayes, sans que les vrayes deviennent fausses : & que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande que le quarré de la moitié de celle du second.

M. DESCARTES.

La seconde chose, qui aura ci-après quelque usage, est qu'on peut toûjours en augmentant la valeur des vrayes racines, d'une quantité qui soit plus grande, que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deviennent toutes vrayes, en sorte qu'il n'y ait point deux signes + ou deux signes — qui se suivent : & outre cela que la quantité connuë du troisiéme terme soit plus grande, que le quarré de la moitié de celle du second. Car encore que cela se fasse, lorsque ces fausses racines sont inconnuës, il est aisé néanmoins de juger à peu près de leur grandeur, & de prende une quantité qui les surpasse d'autant ou de plus, qu'il n'est requis à cet effet. Comme si on a $x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4xx + 46656n^5x - 7776n^6 = 0$, en faisant $y - 6n = x$, on trouvera

$$\begin{array}{llllllll}
y^6 & -36ny^5 & +540nny^4 & -4320n^3y^3 & +19440n^4yy & -46656n^5y & +46656n^6. \\
 & +n & -30nn & +360n^3 & -2160n^4 & +6480n^5 & -7776n^6. \\
 & & 6nn & +144n^3 & -1296n^4 & +5184n^5 & -7776n^6. \\
 & & & +36n^3 & -648n^4 & +3888n^5 & -7776n^6. \\
 & & & & -216n^4 & +2592n^5 & -7776n^6. \\
 & & & & & +1296n^5 & -7776n^6. \\
 & & & & & & * \\
 & & & & & & -7776n^6. \\
\hline
y^6 & -35ny^5 & +504nny^4 & -3780n^3y^3 & +15120n^4yy & -27216n^5y & * = 0.
\end{array}$$

* Ce dernier terme $-7776n^6$ manque dans l'impression Françoise de Leyde 1637. & dans la Latine d'Amsterdam 1659. & dans la Françoise de Paris 1705.

Où il eſt manifeſte que $504nn$, qui eſt la quantité connuë du troiſiéme terme, eſt plus grande que le quarré de $\frac{15}{2}n$, qui eſt la moitié de celle du ſecond. Et il n'y a point de cas, pour lequel la quantité, dont on augmente les vrayes racines, ait beſoin à cet effet, d'être plus grande à proportion de celles qui ſont données, que pour celui-ci.

1. Ce Problême ſervira Part. 5. pour la reſolution des équations du cinquiéme & du ſixiéme degré.

2. Il eſt évident que, ſi je veux que toutes les racines d'une équation transformée ſoient vrayes; il n'y a qu'à augmenter toutes les racines de l'équation propoſée, d'une quantité, qui ſoit plus grande, que la plus grande des fauſſes. Car ſi la plus grande des fauſſes eſt -4, & que j'augmente toutes les racines de $+6$; cette fauſſe deviendra $+2$; & une moindre fauſſe croîtra encore & deviendra vraye à plus forte raiſon; pour les vrayes il eſt certain qu'elles croîtront.

Comme on peut rendre toutes les racines vrayes, ſans que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond: la difficulté eſt ici de tellement augmenter les racines vrayes de la propoſée, que la transformée ait les deux conditions, que demande ce Problême.

* Tom. 3. Lett. 86. 3. M. DESCARTES approuve dans une de ſes * Lettres la Methode qu'un Geometre avoit trouvé pour cela, & il la propoſe en ces termes. Il faut obſerver que nous pouvons nous ſervir de cet Exemple $x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4xx + 46656n^5x - 7776n^6 = 0$, comme d'une Reg'e ou Canon, pour trouver la quantité, dont il faut augmenter les racines. Si par exemple cette équation eſt propoſée $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f = 0$. Ayant negligé tous les termes, dans leſquels les ſignes $+$ & $-$ ſont differens de ceux du canon; c'eſt-à-dire ici les termes b, c, & f; il faut ſeulement conſiderer tous les autres, comme a, d, & e; parcequ'il y a ici $+ax^5$, comme $+nx^5$ dans le canon; & $-dxx$, comme dans le canon $-216n^4xx$; & $+ex$, comme dans le canon † $1296n^5x$. Mais il faut conſiderer chacun de ces termes ſeparément, & chercher la quantité n, qui ne ſoit pas moindre que a; parceque dans le canon il y a n au même terme, où dans la propoſée on trouve n. De plus il faut que n ſoit telle, que ſon quarré de quarré ne ſoit pas moindre que $\frac{1}{216}d$, parceque dans le canon il y a 216 au même terme, où dans la propoſée il y a d. Enſuite il faut que ſon ſurſolide ne ſoit pas moindre que $\frac{1}{46656}e$, parceque dans le canon il y a $46656n^5$ au terme, où dans la propoſée il y a e. La quantité n étant ainſi trouvée, l'on démontre évidemment par l'operation même, que faiſant $y - 6n = x$,

† C'eſt une faute d'impreſſion dans la Lettre, car dans le Canon il y a $46656n^5x$

il

il vient une équation, dans laquelle il ne peut y avoir aucune racine fauſſe.

Soit donc l'équation propoſée $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f = 0$.

ou $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 1x^3 - 216xx + 1296x + 1 = 0$.

Parceque le ſigne du ſecond terme $+ ax^5$ ou $+ 1x^5$ eſt le même ſigne, que celui du ſecond terme du canon, il faut que n ou le nombre, dont j'ai beſoin ne ſoit pas moindre que 1. Parceque le ſigne du cinquiéme terme $- dxx$ ou $- 216xx$ eſt le même ſigne, que celui du cinquiéme terme du canon, il faut que n ne ſoit pas moindre que 1, qui eſt le quarré de quarré de $\frac{1}{216}d$, ou de $\frac{216}{216} = 1$. Parceque le ſigne du ſixiéme terme $+ ex$ ou $+ 1296x$ eſt le même ſigne, que celui du ſixiéme terme du canon, il faut encore que n ne ſoit pas moindre que le ſurſolide de $\frac{1}{46656}e$, ou de $\frac{1296}{46656} = \frac{1}{36}$. Je prends donc 1 pour n, je le multiplie par 6, & j'ai $y - 6n = y - 6 = x$, que je ſubſtituë auſſi bien que les differentes puiſſances dont j'ai beſoin, dans l'équation propoſée.

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
x^6 = & y^6 & - 36y^5 & + 540y^4 & - 4320y^3 & + 19440yy & - 46656y & + 46656. \\
+ x^5 = & & 1y^5 & - 30y^4 & + 360y^3 & - 2160yy & + 6480y & - 7776. \\
+ x^4 = & & & 1y^4 & - 24y^3 & + 216yy & - 864y & + 1296. \\
- x^3 = & & & & - 1y^3 & + 18yy & - 108y & + 216. \\
- 216xx = & & & & & - 216yy & + 2592y & - 7776. \\
+ 1296x = & & & & & & + 1296y & - 7776. \\
+ 1 = & & & & & & & + 1. \\
\hline
 & y^6 & - 35y^5 & + 511y^4 & - 3985y^3 & + 17298yy & - 37260y & + 24841 = 0.
\end{array}
$$

Dans cette transformée les ſignes + & — ſont alternatifs, ainſi toutes les racines ſont vrayes, Sect. 1. Art. 3.

Dans la valeur de x^6 les ſignes + & — ſont toûjours alternatifs, parceque c'eſt le quarré de cube de $y - 6n$, les racines de cette ſixiéme puiſſance ſont donc toutes vrayes. Ainſi afin que les ſignes + & — de la ſomme totale $y^6 - 35y^5 + 511y^4$, &c. ſoient encore alternatifs, & que ſes racines ſoient toutes vrayes; il faut que les valeurs des termes des autres puiſſances x^5, x^4, x^3, &c. ne ſoient pas plus grandes avec un ſigne contraire, que la valeur de chaque terme correſpondant de la ſixiéme puiſſance.

Or la valeur des termes $+ x^4$, $- x^3$, $+ 1$, qui ont un ſigne different de celui des termes du canon, où il y a x^4, x^3, contient les mêmes ſignes que la ſixiéme puiſſance dans les termes qui ſe répondent : ainſi ces valeurs bien loin de pouvoir détruire les ſignes de la ſixiéme puiſſance, empêchent en augmentant la valeur des termes de cette ſixiéme puiſſance, que d'autres termes, qui ont un ſigne contraire ne ſoient plus grands, &

ne changent le ſigne. C'eſt pour cela que M. DESCARTES dit, qu'il faut negliger les termes, dans leſquels les ſignes + & — ſont differens de ceux du canon.

Au contraire il faut conſiderer les termes $+ x^5$, $- 216xx$, $+ 1296x$, qui ont le même ſigne, que les termes du canon, où il y a x^5, xx, x; parceque leur valeur contient des ſignes differens de ceux, qui ſont dans les termes correſpondans de la ſixiéme puiſſance, afin de prendre n telle que les valeurs des termes, qui ont ainſi des ſignes differens, ne ſoient pas plus grandes, que la valeur des termes correſpondans de la ſixiéme puiſſance; & de plus afin que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond.

4. On peut déterminer generalement la valeur de la quantité g, dont il faut augmenter les vrayes racines, afin que la transformée ait les deux conditions qu'on demande ici, ſuppoſons que la propoſée ait par tout les mêmes ſignes que le canon, & qu'elle ſoit $x^6 + ax^5 - bx^4 + cx^3 - dxx + ex - f = 0$. & faiſons $y - g = x$. Nous aurons

$$
\begin{array}{lllllll}
x^6 = y^6 & - 6gy^5 & + 15ggy^4 & - 20g^3y^3 & + 15g^4yy & - 6g^5y & + g^6. \\
+ ax^5 = + & ay^5 & - 5agy^4 & + 10aggy^3 & - 10ag^3yy & + 5ag^4y & - ag^5. \\
- bx^4 = & - & by^4 & + 4bgy^3 & - 6bggyy & + 4bg^3y & - bg^4. \\
+ cx^3 = & & + & cy^3 & - 3cgyy & + 3cggy & - cg^3. \\
- dxx = & & & - & dyy & + 2dgy & - dgg. \\
+ ex = & & & & + & ey & - eg. \\
- f = & & & & & - & f.
\end{array}
$$

Les ſignes de la ſixiéme puiſſance ſont par tout differens de ceux des quantitez inferieures, qui leur répondent. Le ſigne $>$ veut dire plus grand, & $<$ plus petit.

On demande en premier lieu que le quarré de $\frac{-6g+a}{2}$ moitié de la quantité connuë du ſecond terme ſoit moindre que $15gg - 5ag - b$ quantité connuë du troiſiéme, c'eſt-à-dire, $\frac{36gg-12ag+aa}{4} < 15gg - 5ag - b$; $36gg - 12ag + aa < 60gg - 20ag - 4b$; donc $24gg - 8ag - 4b > aa$; $gg - \frac{1}{3}ag > \frac{1}{24}aa + \frac{1}{6}b$; $gg - \frac{1}{3}ag + \frac{1}{36}aa > \frac{1}{36}aa + \frac{1}{24}aa + \frac{1}{6}b > \frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b$; $g - \frac{1}{6}a > \sqrt{\frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b}$; $g > \frac{1}{6}a + \sqrt{\frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b}$. Ainſi toutes les fois que l'on prendra la quantité g plus grande que $\frac{1}{6}a + \sqrt{\frac{5}{72}aa + \frac{1}{6}b}$, la quantité connuë du troiſiéme terme ſera plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond.

En ſecond lieu il faut examiner les valeurs de la quantité g, qui reſultent de la ſuppoſition, que chaque terme de la ſixiéme puiſſance, eſt plus

grand que tous les termes qui ſont au deſſous de lui : afin que les ſignes + & — demeurent alternatifs dans la ſomme totale de tous les termes de la transformée.

Suppoſons donc que dans les ſeconds termes $6g > a$: donc $g > \frac{1}{6}a$.

Dans les troiſiémes $15gg > 5ag + b$: donc $gg > \frac{1}{3}ag + \frac{1}{15}b$.

Dans les quatriémes $20g^3 > 10agg + 4bg + c$: donc $g^3 > \frac{1}{2}agg + \frac{1}{3}bg + \frac{1}{20}c$.

Dans les cinquiémes $15g^4 > 10ag^3 + 6bgg + 3cg + d$: donc $g^4 > \frac{2}{3}ag^3 + \frac{2}{5}bgg + \frac{1}{5}cg + \frac{1}{15}d$.

Dans les ſixiémes $6g^5 > 5ag^4 + 4bg^3 + 3cgg + 2dg + e$: donc $g^5 > \frac{1}{6}ag^4 + \frac{2}{3}bg^3 + \frac{1}{2}cgg + \frac{1}{3}dg + \frac{1}{6}e$.

Dans les ſeptiémes $g^6 > ag^5 + bg^4 + cg^3 + dgg + eg + f$.

Maintenant ſi dans $g^6 > ag^5 + bg^4 + cg^3 + dgg + eg + f$, on ſubſtituë autant de fois qu'il ſera neceſſaire, à la place de g^5, g^4, g^3, g^2, g, leurs valeurs qu'on vient de trouver, ou plûtôt les quantitez qui ſont plus petites que leurs valeurs ; on trouvera $g^6 > f + \frac{1}{3}ae + \frac{1}{20}cc + \frac{2}{15}bd$, &c. Ainſi la quantité g devra être telle, que ſa ſixiéme puiſſance ſoit plus grande que la ſomme qu'on vient de former.

ARTICLE V.

Faire que toutes les places d'une Equation ſoient remplies.

M. DESCARTES.

MAis à cauſe que le dernier terme s'y trouve nul, ſi on ne deſire pas que cela ſoit, il faut encore augmenter tant ſoit peu la valeur des racines ; & ce ne ſauroit être de ſi peu, que ce ne ſoit aſſez pour cet effet. Non plus que lorſqu'on veut accroître le nombre des dimenſions de quelque équation, & faire que toutes les places de ſes termes ſoient remplies. Comme ſi au lieu de $x^5 ***** - b = 0$, on veut avoir une équation en laquelle la quantité inconnuë ait ſix dimenſions, & dont aucun des termes ne ſoit nul, il faut premierement pour $x^5 ***** - b = 0$, écrire $x^6 ***** - bx^* = 0$; puis ayant fait $y - a = x$, on

aura $y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} -6a^5y + a^6 \\ -by + ab \end{matrix} = 0.$

où il eſt manifeſte, que tant petite que la quantité a ſoit ſuppoſée, toutes les places de l'équation ne laiſſent pas d'être remplies.

Pour remplir tous les termes de l'équation $x^5 **** - b = o$, & en avoir une, qui ſoit encore du cinquiéme degré, je fais $y - a = x$, ce qui augmentera les racines vrayes de l'équation de la quantité a, & je trouve $+ x^5 = y^5 - 5ay^4 + 10aay^3 - 10a^3yy + 5a^4y - a^5$.
$- b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = o.$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - b$

Pour remplir tous les termes de la même équation $y^5 **** - b = o$, & en former une qui ſoit du ſixiéme degré, je multiplie par x l'équation propoſée, elle ſe change en $x^6 **** - bx* = o$. & par la ſubſtitution il vient $x^6 = y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy$

$$\begin{aligned} -bx = \quad & -by + ab \\ & -6a^5y + a^6 \end{aligned} \Big\} = o.$$

Si l'on vouloit une équation de huit dimenſions à la place de $x^5 **** - b = o$, on multipliera par x^3, & l'on fera $x^8 ***** - bx^3 *** = o$.

On fera les mêmes choſes, ſi l'on ſouhaitoit d'augmenter les racines fauſſes, en prenant $y + a = x$.

ARTICLE VI.

Multiplier & diviſer les racines ſans les connoître.

M. DESCARTES.

DE plus on peut, ſans connoître les valeurs des vrayes racines d'une équation, les multiplier ou diviſer toutes par telle quantité connuë, qu'on veut. Ce qui ſe fait en ſuppoſant, que la quantité inconnuë étant multipliée ou diviſée par celle qui doit multiplier ou diviſer les racines, eſt égale à quelqu'autre. Puis diviſant ou multipliant la quantité connuë du ſecond terme, par cette même, qui doit multiplier ou diviſer les racines; & par ſon quarré, celle du troiſiéme, & par ſon cube, celle du quatriéme; & ainſi juſques au dernier.

Les racines de l'équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$ ſont $x - a = o$, $x + a = o$, $x + b = o$. Si vous voulez multiplier chaque racine par c : pour cela prenez $cx = y$, $x = \frac{y}{c}$; mettez $\frac{y^3}{c^3}$ pour x^3, $\frac{yy}{cc}$ pour xx, $\frac{y}{c}$ pour x ; l'équation devient $\frac{y^3}{c^3} + \frac{byy}{cc} - \frac{aay}{c} - aab = o$; multipliez tout par c^3, il vient $y^3 + bcyy - aaccy - aabc^3 = o$; dont les racines ſont $y - ac = o$, $y + ac = o$, $y + bc = o$. Comme on le connoîtra en multipliant ces racines l'une par l'autre : or ces racines contiennent les racines $+a$, $-a$, $-b$ de la premiere équation multipliées par c. Là deſſus eſt fondée la Regle abregée pour multiplier les racines d'une équation par une quantité quelconque. Soit la même équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$, dont il faut multiplier les racines par c ; on change l'inconnuë x en une autre inconnuë y, on multiplie le ſecond terme par c, le troiſiéme par cc, le quatriéme par c^3, & ainſi de ſuite, s'il y en avoit davantage ; & il vient $y^3 + bcyy - aaccy - aabc^3 = o$, la même transformée qu'auparavant. Et lorſqu'on connoîtra les racines de cette équation, on les diviſera par c, pour avoir les racines de la propoſée.

Au contraire vous voulez diviſer par c l'équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$; faites $\frac{x}{c} = y$, $x = cy$; ſubſtituez cy pour x, $ccyy$ pour xx, c^3y^3 pour x^3 ; l'équation ſera $c^3y^3 + bccyy - aacy - aab = o$; diviſez tout par c^3 ; le quotient eſt $y^3 + \frac{byy}{c} - \frac{aay}{cc} - \frac{aab}{c^3} = o$, dont les racines ſont $+\frac{a}{c}$, $-\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{c}$, comme vous le connoîtrez en multipliant entr'elles ces trois quantitez $y - \frac{a}{c} = o$, $y + \frac{a}{c} = o$, $y + \frac{b}{c} = o$. Là-deſſus eſt fondée la Regle abregée pour diviſer les racines d'une équation par une quantité quelconque. Soit donc la même équation $x^3 + bxx - aax - aab = o$, dont il faut diviſer les racines par c ; changez l'inconnuë x en une autre inconnuë y, diviſez le ſecond terme par c, le troiſiéme par cc, le quatriéme par c^3, & ainſi de ſuite, s'il y en avoit d'autres : il vient $y^3 + \frac{byy}{c} - \frac{aay}{cc} - \frac{aab}{c^3} = o$, la même transformée qu'auparavant. Et quand vous aurez trouvé la valeur des racines de cette transformée, vous les multiplierez par c, pour avoir les racines de la propoſée.

ARTICLE VII.

Oter les fractions & les incommenſurables d'une équation.

M. DESCARTES.

CE qui peut ſervir pour reduire à des nombres entiers & rationaux, les fractions, ou ſouvent auſſi les nombres ſourds, qui ſe trouvent dans les termes des équations comme ſi on a $x^3 - \sqrt{3}xx + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}}$, & qu'on veüille en avoir une autre en ſa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut ſuppoſer $y = x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connuë du ſecond terme, qui eſt auſſi $\sqrt{3}$; & par ſon quarré qui eſt 3, celle du troiſiéme, qui eſt $\frac{26}{27}$; & par ſon cube, qui eſt $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui eſt $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$.

Puis ſi on en veut encore une autre en la place de celle-ci, dont les quantitez connuës ne s'expriment que par des nombres entiers; il faut ſuppoſer $z = 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$, où les racines étant 2, 3, & 4; on connoît de là, que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & que celles de la premiere étoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

1, Multipliez les racines d'une équation par une quantité, qui puiſſe être diviſée juſte par le denominateur de la fraction, qui eſt au ſecond terme, s'il y en a une; dont le quarré puiſſe être diviſé juſte par le denominateur de la fraction, qui eſt au troiſiéme terme, ſuppoſé qu'il y en ait là une; dont le cube puiſſe être diviſé juſte par le denominateur de la fraction, qui eſt au quatriéme terme; dont le quarré de quarré puiſſe être diviſé juſte par le denominateur du cinquiéme terme, &c. les fractions diſparoiſſent, & l'équation ne contient plus que des entiers. C'eſt pour cela, que M. DESCARTES, afin d'ôter les fractions de $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$, prend $3y = z$, & qu'après avoir changé y^3 en z^3, yy en zz, y en z, il multiplie le ſecond terme par 3, ce qui produit $9zz$, le troiſiéme par 9, ce qui produit $26z$; le quatriéme par 27, ce qui produit 24, & toute la reduite eſt $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$. Et les raci-

nes z étant trouvées, il faut les diviſer par 3, pour avoir les valeurs de y, parceque étant $3y = z$, l'on a $y = \frac{z}{3}$; car on a fait ici la même choſe que ſi on avoit multiplié y par 3. Car ſoit $3y = z$, $y = \frac{z}{3}$ la ſubſtitution donne $\frac{z^3}{27} - \frac{zz}{3} + \frac{26z}{27} - \frac{8}{9} = 0$, & multipliant tout par 27, $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$.

Generalement pour faire diſparoître toutes les fractions d'une équation quelconque $x^3 - \frac{axx}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$; on multiplie tous les denominateurs enſemble; le produit eſt bcd; on change x en une autre inconnuë z, ce qui fait $z^3 - \frac{azz}{b} + \frac{aaz}{c} + \frac{a^3}{d}$: enſuite on multiplie le ſecond terme par bcd, le troiſiéme par le quarré $bbccdd$, le quatriéme par le cube $b^3c^3d^3$; & il vient $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3b^3c^3dd = 0$. Ou bien l'on prend $bcdx = z$, $x = \frac{z}{bcd}$. Après cela l'on ſubſtituë cette valeur de x à ſa place dans l'équation propoſée; le quarré de cette valeur à la place de xx; le cube de la même valeur à la place de x^3; la reduite eſt $\frac{z^3}{b^3c^3d^3} - \frac{azz}{b^2ccdd} + \frac{aaz}{bccd} + \frac{a^3}{d}$; enfin l'on multiplie tout par $b^3c^3d^3$, & il vient $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3b^3c^3dd = 0$, la même reduite qu'auparavant.

2. Cette Methode ſert ſouvent à délivrer une équation de ſes quantitez irrationelles. Soit propoſée l'équation $x^4 - 4bx^3\sqrt{a} - 2bcxx + \frac{cdax}{a\sqrt{a}} + ddff = 0$. Formons les puiſſances de l'irrationelle $\sqrt{a}$ qui eſt dans l'équation, ce ſont $\sqrt{a}$, a, $a\sqrt{a}$, aa, $aa\sqrt{a}$, a^3, $a^3\sqrt{a}$, a^4, &c. L'incommenſurable $\sqrt{a}$ ne ſe trouve que dans les puiſſances 1e, 3e, & en nombre impair: il faut donc, afin que l'équation puiſſe être délivrée de ſes incommenſurables, qu'elles ſe trouvent dans les termes, qui doivent être multipliez par les puiſſances qui ſont incommenſurables; il faut encore que les autres termes n'en ayent point. Selon la Methode le ſecond terme doit être multiplié par $\sqrt{a}$: ainſi il doit être multiplié ou diviſé par $\sqrt{a}$; car s'il eſt multiplié par $\sqrt{a}$, comme ici $-4bx^3\sqrt{a}$, le produit eſt $-4abx^3$, l'on met z pour x ſelon la Methode.

Si ce ſecond terme étoit diviſé par $\sqrt{a}$, & qu'il fût $= \frac{4bz^3}{\sqrt{a}}$, le produit de $\sqrt{a} \times -\frac{4bz^3}{\sqrt{a}}$ eſt $= \frac{-4bz^3\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = -4bz^3$, parceque $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$.

Selon la Methode le troiſiéme terme doit être multiplié par a quarré de $\sqrt{a}$, c'eſt pourquoi il ne doit point contenir d'incommenſurable, parcequ'elle y reſteroit. Le quatriéme terme ſelon la Methode doit être multiplié par le cube $a\sqrt{a}$ de $\sqrt{a}$, il faut donc qu'il ſoit ou multiplié ou diviſé par $\sqrt{a}$. Car s'il étoit multiplié par $a\sqrt{a}$, & que ce fût $acddz\sqrt{a}$ le produit de $\sqrt{a} \times acddz\sqrt{a}$ ſeroit $aacddz$.

S'il eſt diviſé par $\sqrt{a}$, comme ici $+\frac{cddz}{a\sqrt{a}}$, le produit de $a\sqrt{a} \times \frac{cddz}{a\sqrt{a}}$ eſt $\frac{acddz\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = cddz$, parceque $\frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = 1$. Selon la Methode le cinquiéme terme doit être multiplié par aa quarré de quarré de $\sqrt{a}$, ainſi il ne

doit point avoir d'incommenſurable. L'équation propoſée ſe reduira donc ſelon la Methode à $z^4 - 4abz^3 - 2abcz z + cddz + aadff = 0$, & quand on aura trouvé les valeurs de z, il faudra les diviſer par $\sqrt{a}$ pour avoir celles de x; car pour avoir la transformée, on a dû prendre $x\sqrt{a} = z$, $x = \frac{z}{\sqrt{a}}$.

Lorſque l'incommenſurable d'une équation eſt $\sqrt[3]{a}$, l'on formera toutes ſes puiſſances, dont on peut avoir beſoin $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{aa}$, a, $a\sqrt[3]{a}$, $a\sqrt[3]{aa}$, aa, $aa\sqrt[3]{a}$, &c. Ce qui fait connoître quels termes de l'équation doivent être multipliez ou diviſez par $\sqrt[3]{a}$, ou par quelques-unes de ſes puiſſances, afin que le ſigne radical diſparoiſſe. Par exemple le ſecond terme de l'équation, qui doit être multiplié par $\sqrt[3]{a}$, peut être ou multiplié par $\sqrt[3]{aa}$, comme $bx^3\sqrt[3]{aa}$, parceque $\sqrt[3]{a} \times bx^3\sqrt[3]{aa} = abx^3$; car $\sqrt[3]{a^3} = a$; ou multiplié par $\sqrt[3]{a^5}$; comme $bx^3\sqrt[3]{a^5}$, parceque $\sqrt{a} \times bx^3\sqrt[3]{a^5} = bx^3\sqrt[3]{a^6} = aabx^3$, car $\sqrt[3]{a^6} = aa$; ou multiplié par $\sqrt[3]{a^8}$, comme $bx^3\sqrt[3]{a^8}$, par $\sqrt[3]{a} \times bx^3\sqrt[3]{a^8} = bx^3\sqrt[3]{a^9} = a^3bx^3$, car $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; &c. ou diviſé par $\sqrt[3]{a}$ comme $\frac{bx^3}{\sqrt[3]{a}}$, car $\sqrt[3]{a} \times \frac{bx^3}{\sqrt[3]{a}} = bx^3$, ou diviſé par $\sqrt[3]{a^4}$, comme $\frac{bx^3}{\sqrt[3]{a^4}}$, parceque $\sqrt[3]{a} \times \frac{bx^3}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{bx^3\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{bx^3\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{bx^3}{a}$, car $\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{1}{a}$; &c.

On voit pourquoi M. DESCARTES a dit que par cette Methode, on délivroit toûjours une équation de ſes fractions, & ſouvent de ſes quantitez incommenſurables.

Au reſte nous avons dans l'Exemple de M. DESCARTES $y = \frac{z}{3}$, $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$; c'eſt les racines de la derniere équation $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$ étant $z - 2 = 0$, $z - 3 = 0$, $z - 4 = 0$; celles de la ſeconde $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$ ſeront $y - \frac{2}{3} = 0$, $y - 1 = 0$, $y - \frac{4}{3} = 0$, parceque $y = \frac{z}{3}$; & celles de la premiere $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, ſeront $x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$, $x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$, $x - \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0$, parceque $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$. En effet ſi vous multipliez ces trois racines enſemble, il viendra $x^3 - \frac{3xx}{\sqrt{3}} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, & multipliant le numerateur & le denominateur du ſecond terme $-\frac{3xx}{\sqrt{3}}$ par $\sqrt{3}$, vous ferez $-xx\sqrt{3}$. Cependant dans la Geometrie de M. DESCARTES on lit que les trois racines ſont $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, le tiers des precedentes & qui ne produiſent pas l'équation.

3. Il y a auſſi d'autres Methodes pour délivrer une équation de ſes incommenſurables. 1°. Puiſque ſi deux racines ſont égales, leurs deux quarrez, ou leurs deux cubes, ou leurs deux quarrez de quarrez, &c. ſont encore égaux : on peut élever les deux membres de l'équation à la puiſſance, qui eſt déſignée par l'expoſant des racines. Ainſi l'on quarrera les deux

deux membres de $x = \sqrt{a+y}$, pour avoir $xx = a+y$; on quarrera encore les deux membres de $\sqrt{ax} = \sqrt{c-d}$, pour avoir $ax = c-d$; on cubera les deux membres de $xx = \sqrt[3]{a^3-y^3}$, pour avoir $x^6 = a^3 - y^3$, &c. Lorſqu'il y a une ou pluſieurs commenſurables avec une ou pluſieurs incommenſurables, on met toutes les quantitez commenſurables d'un même côté chaque fois qu'on éleve les deux membres à la puiſſance requiſe. Soit $x = \sqrt{b + \sqrt{aa-xx}}$, on fait d'abord $xx = b + 2\sqrt{aab - bxx} + aa - xx$; enſuite après avoir ordonné ainſi les termes $2xx - aa - b = +2\sqrt{aab-bxx}$, on fait les quarrez $4x^4 - 4aaxx - 4bxx + a^4 + 2aab + bb = 4aab - 4bxx$; $4x^4 - 4aaxx + a^4 + bb = 2aab$. Lorſqu'il y a deux racines ſous un même ſigne, $x = \sqrt[3]{bx + \sqrt{aa+xx}}$, on commence par élever tout à la troiſiéme puiſſance, $x^3 = bx + \sqrt{aa+xx}$: après cela l'on éleve $x^3 - bx = \sqrt{aa+xx}$ au quarré $x^6 - 2bx^4 + bbxx = aa + xx$.

Mais quand les expoſans des racines ſont differens, on commence par leur donner un même expoſant $\sqrt{a} = \sqrt[6]{bbxx}$, dont les expoſans ſont 2, 3; on cubera $\sqrt{a}$, & l'on quarrera $\sqrt[3]{bbxx}$, & ce ſera $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{b^4x^4}$, ce qui ne change point les valeurs, car $\sqrt{aa} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[5]{a^5} = a$, $\sqrt{25} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[5]{3125} = 5$. Et l'équation ſe reduit à $a^3 = b^4x^4$.

2°. Parceque le calcul de la Methode precedente devient quelquefois embarraſſant, vous ſubſtituerez de ſimples lettres à la place des incommenſurables, vous éleverez l'équation aux puiſſances convenables, & lorſque vous verrez que l'équation eſt délivrée de toutes les quantitez incommenſurables, vous mettrez à la place de ces lettres ſubſtituées leurs veritables valeurs. Soit $yy + \sqrt[3]{byy} = \sqrt{bx}$: faites $\sqrt[3]{byy} = s$, $\sqrt{bx} = v$; donc $byy = s^3$, $bx = vv$; ainſi lorſque dans l'équation vous n'aurez que des s^3, s^6, vv, v^4, v^6, &c. le calcul ceſſera. L'équation propoſée ſe change en $yy + s = v$; à cauſe qu'il y a $\sqrt[3]{byy}$, vous mettez s ſeule d'un côté, & vous élevez les deux membres de $s = v - yy$ à la troiſiéme puiſſance $s^3 = v^3 - 3vvyy + 3vy^4 - y^6$. Vous rangez d'un ſeul côté les incommenſurables v^3, $3vy^4$ qui reſtent, & vous quarrez les deux membres de $v^3 + 3vy^4 = s^3 + 3vvyy + y^6$; les quarrez ſont $v^6 + 6v^4y^4 + 9vvy^8 = s^6 + 6s^3vvyy + 2s^3y^6 + 9v^4y^4 + 6vvy^8 + y^{12}$. Comme il n'y a plus d'incommenſurable, vous ſubſtituerez les valeurs de v^6, v^4, vv, s^6, s^3, & il viendra $b^3x^3 + 6bbxxy^4 + 9bxy^8 = bby^4 + 6bbxy^4 + 2by^3 + 9bbxxy^4 + 6bxy^8 + y^{12}$.

4. Lorſque la premiere operation ne délivre pas l'équation des incom. menſurables & des fractions; on fait de nouvelles operations, juſqu'à ce qu'on ait fait, ce que l'on deſire; comme on le voit dans l'Exemple de M. DESCARTES. Mais enſuite après avoir connu les racines de la derniere équation, l'on a égard aux quantitez qui ont été ſubſtituées, ſi l'on

veut déterminer les racines des équations precedentes. C'eſt pour cela que les racines de la derniere équation de l'Exemple de M. DESCARTES, $z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0$ étant $2, 3, 4$; celles de la ſeconde $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$ ſont $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$, parceque l'on avoit fait $z = 3y$, $y = \frac{z}{3}$. Ainſi diviſant par 3 les valeurs de $z, 2, 3, 4$; on a les valeurs de $y, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$.

De même les racines de la premiere équation $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$ ſont $\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{4}{9}\sqrt{3}$; parcequ'on avoit fait $y = x\sqrt{3}$, $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$: ainſi diviſant les valeurs de $y, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$ par $\sqrt{3}$, l'on a les valeurs de $x, \frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}$, qui ſont égales à $\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Car ſi l'on multiplie par $\sqrt{3}$ le numerateur & le denominateur de chacune des fractions $\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}$, leur valeur ne change pas. Or les produits ſont $\frac{2\sqrt{3}}{3\times 3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\frac{1\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3\times 3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

ARTICLE VIII.

Rendre la quantité connuë de l'un des termes d'une équation égale à telle autre quantité que l'on voudra.

M. DESCARTES.

CEtte Operation peut auſſi ſervir pour rendre la quantité connuë de quelqu'un des termes de l'équation égale à quelqu'autre donnée: comme ſi ayant $x^3 * - bbx + c^3 = 0$, on veut avoir en ſa place une autre équation, en laquelle la quantité connuë du terme, qui occupe la troiſiéme place, à ſavoir celle, qui eſt ici bb ſoit $3aa$. Il faut ſuppoſer $y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis écrire $y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$.

Vous voulez que dans l'équation $x^3 * - bbx + c^3 = 0$, la quantité connuë du troiſiéme terme, ſoit $3aa$ au lieu de bb: vous n'avez qu'à tellement multiplier les racines de l'équation, que $\frac{3aa}{bb}$ multiplie le troiſiéme terme bbx; car le produit ſera $\frac{3aabbx}{bb} = 3aax$. Or ſelon la Methode, le troiſiéme terme doit être multiplié par le quarré de la quantité, qui multiplie toutes les racines, & $\frac{3aa}{bb}$ eſt le quarré de $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$. Multipliez donc toutes les racines par $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, c'eſt-à-dire prenez $y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, ou $y = \frac{ax}{b}\sqrt{3}$; donc $x = \frac{by}{a\sqrt{3}}$. Maintenant multipliez le ſecond terme, qui eſt nul par $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, le produit eſt auſſi nul; multipliez le troiſiéme terme bbx par le quarré $\frac{3aa}{bb}$, le produit eſt $3aax$; multipliez le quatriéme terme par le cube $\frac{3aa}{bb}\sqrt{\frac{3aa}{bb}} = \frac{3a^3}{b^3}\sqrt{3}$, le produit eſt $\frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3}$; &

l'équation reduite eſt $y^3 * - 3aay + \frac{2a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$. Dont les racines, lorſqu'on les aura trouvées, doivent être diviſées par $\sqrt{\frac{3aa}{bb}} = \frac{a}{b}\sqrt{3}$, pour avoir les racines de la propoſée : parcequ'on a pris $y = \frac{a}{b}x\sqrt{3}$, $x = \frac{by}{a\sqrt{3}}$.

On demande que la quantité connuë du quatriéme terme de la même équation ſoit $3aa$. Il faut multiplier ce quatriéme terme c^3 par $\frac{3aa}{c^3}$; vous regardez donc $\frac{3aa}{c^3}$ comme un cube, parceque ſuivant la Methode, le quatriéme terme doit être multiplié par le cube de la quantité, qui multiplie les racines de la propoſée. Or la racine du cube $\frac{3aa}{c^3}$ eſt $\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$, dont le quarré eſt $\sqrt[3]{\frac{9a^4}{c^6}} = \frac{a}{cc}\sqrt[3]{9a}$. Ainſi après avoir changé x en une autre inconnnë y, vous multipliez le ſecond terme de l'équation propoſée, qui eſt nul, par $\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$; le produit eſt nul; vous multipliez le troiſiéme terme bbx par le quarré $\frac{a}{cc}\sqrt[3]{9a}$, le produit eſt $\frac{abby}{cc}\sqrt[3]{9a}$; vous multipliez le quatriéme terme par le cube $\frac{3aa}{c^3}$, le produit eſt $3aa$; & la transformée $y^3 * - \frac{abby}{cc}\sqrt[3]{9a} + 3aa = 0$. Dont les racines ſeront diviſées par $\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$, pour avoir les racines de la propoſée, parcequ'on a fait $y = x\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}$, $x = \frac{y}{\sqrt[3]{\frac{3aa}{c^3}}} = \frac{cy}{\sqrt[3]{3aa}}$.

ARTICLE IX.

Délivrer la haute puiſſance d'une Equation des quantitez, qui la multiplient, ou qui la diviſent.

CEtte Methode ſert encore à faire diſparoître les quantitez qui multiplient ou qui diviſent la haute puiſſance d'une équation. Soit propoſée l'équation $4xx - 3x + bb = 0$. Nous ferons $4x = z$, $x = \frac{z}{4}$, & la transformée ſera $\frac{4zz}{16} - \frac{3z}{4} + bb = 0$, ou $\frac{1}{4}zz - \frac{3}{4}z + bb = 0$.

Nous multiplierons tout par 4; & la reduite ſera $zz - 3z + 4bb = 0$.

Les racines de z étant trouvées, on les diviſera par 4, pour avoir les valeurs de x.

Quelquefois la ſeule multiplication & la ſeule diviſion ſuffiſent, ſans qu'il reſte aucune fraction. Ainſi l'on diviſera par 4 & l'on multipliera par 3 l'équation $\frac{4}{3}z^3 - 4zz - \frac{4}{3}z + \frac{8}{3} = 0$, & la reduite ſera $z^3 - 3zz - 1z + 2 = 0$.

ARTICLE X.

M. DESCARTES.

AU reſte tant les vrayes racines, que les fauſſes ne ſont pas toûjours réelles ; mais quelquefois ſeulement imaginaires : c'eſt-à-dire qu'on peut bien toûjours en imaginer autant que j'ai dit, en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui correſponde à celles qu'on imagine. Comme encore qu'on en puiſſe imaginer trois en celle-ci $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$, il n'y en a toutesfois qu'une réelle, qui eſt 2, & pour les deux autres, quoiqu'on les augmente, ou diminuë, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne ſçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

Voyez Sect. 1. Art. 1. & 3. dans leſquels cet Article eſt expliqué.

Diviſez $x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0$ par $x - 2 = 0$, le quotient eſt $xx - 4x + 5 = 0$. Ainſi $x - 2 = 0$, ou $x = 2$ eſt une racine réelle vraye de l'équation. Pour avoir les racines de $xx - 4x + 5 = 0$, ou de $xx - 4x = -5$; vous ajoûterez 4 de chaque côté : & les racines de $xx - 4x + 4 = -1$ ſont $x = 2 \pm \sqrt{-1}$, qui ſont imaginaires.

PARTIE TROISIE'ME.

De la Reſolution des Equations.

1. ON apprendra comment on peut trouver le plus grand diviſeur commun de deux quantitez ; & tous les diviſeurs d'une même quantité : parceque ces deux Problêmes ſont neceſſaires pour ce qui ſuit. 2. On apportera differentes Methodes pour découvrir toutes les racines d'une équation. 3 On donnera la maniere de reduire les équations cubiques. 4. Les équations qui ont quatre dimenſions. 5. On apportera une Regle generale pour reduire les équations de quelque degré qu'elles ſoient.

SECTION I.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux quantitez, & tous les diviſeurs d'une quantité.

ARTICLE I.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux quantitez.

1. SOient propoſez les nombres *60. 20*; diviſez le plus grand par le plus petit : & parceque la diviſion eſt exacte, *20* eſt le plus grand diviſeur commun des nombres *60. 20.*

2. Soient propoſez les nombres *64. 48*; diviſez le plus grand par le plus petit; le quotient, qui n'eſt pas exact, eſt *1*, que vous negligez; le reſte eſt *16*. Diviſez le moindre *48* des deux propoſez par *16*, la diviſion eſt juſte : ainſi le dernier diviſeur *16* eſt le plus grand diviſeur commun des nombres *64. 48.*

3. Soient propoſez les nombres *100. 22*; diviſez le premier par le ſecond; le quotient non exact eſt *4*, que vous negligez; le premier reſte eſt *12*. Diviſez *22* le moindre des propoſez par le reſte *12* : le quotient non exact eſt *1*, que vous negligez; le ſecond reſte eſt *10*. Diviſez le premier reſte *12*, par le ſecond *10* : le quotient non exact eſt encore *1*, que vous negligez; le troiſiéme reſte eſt *2*. Diviſez le ſecond reſte *10* par le troiſiéme *2*, la diviſion eſt exacte : ainſi le dernier diviſeur *2* eſt le plus grand diviſeur commun des nombres *100. 22.*

4. La Regle eſt donc d'ôter par le moyen de la diviſion le plus petit nombre propoſé du plus grand; c'eſt-à dire de le ſouſtraire autant de fois que l'on peut. S'il ne reſte rien la premiere fois, ou ſi la diviſion ſe fait juſte : le plus petit nombre propoſé eſt le plus grand diviſeur commun des deux. Mais s'il reſte quelque choſe, on ſouſtrait par la diviſion le premier reſte du plus petit nombre propoſé; & s'il reſte encore quelque choſe, on ôte par la diviſion le ſecond reſte du premier; & enſuite le troiſiéme reſte du ſecond, &c. juſqu'à ce qu'on faſſe une ſoûſtraction, qui ne laiſſe rien, c'eſt-à-dire qu'on ait trouvé un diviſeur exact : qui eſt le plus grand diviſeur commun des deux nombres propoſez. Ce diviſeur eſt *1*. lorſque les nombres propoſez ſont premiers entr'eux.

5. Les Operations ſont les mêmes pour deux équations litterales propoſées.

Mais l'on conſidere d'abord ſi elles peuvent toutes deux ſe diviſer par une même quantité, ce qui les diminuë. On fait donc, ſi on le peut, cette

diviſion, qui n'eſt qu'une preparation pour l'autre.

Les propoſées ſont $3ax^4 - 12aax^3 + 18a^3xx - 12a^4x + 3a^5 = 0$, $3axx - 3a^3 = 0$; qui peuvent être diviſées toutes deux par $3a$, & être par là reduites à $x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4 = 0$, $xx - aa = 0$. Et quand on aura trouvé leur diviſeur commun, on le multipliera par $3a$; le produit ſera le diviſeur commun des équations propoſées.

6. Quelquefois après la diviſion, la haute puiſſance du reſte eſt plus grande que la haute puiſſance du diviſeur: alors on continuë à diviſer ce reſte par le même diviſeur. Et cela ſe repete, juſqu'à ce que la haute puiſſance du reſte ſoit moindre que la haute puiſſance du diviſeur. Diviſons $x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4ax^3 + a^4$ par $xx - aa$: le premier quotient, qu'il faut negliger eſt xx; le premier reſte eſt $-4ax^3 + 7aaxx - 4a^3x + a^4$, dont la haute puiſſance x^3 eſt plus grande que celle du diviſeur xx: ainſi nous ferons la ſeconde operation avec le même diviſeur $xx - aa$. Le quotient qu'on neglige eſt $-4ax$; le ſecond reſte eſt $+7aaxx - 8a^3x + a^4$, dont la haute puiſſance $7aaxx$ n'eſt pas moindre que xx du diviſeur: ainſi nous nous ſervirons encore du même diviſeur $xx - aa$.

Le quotient qu'on neglige eſt $7aa$; le troiſiéme reſte eſt $-8a^3x + 8a^4$, dont la puiſſance $-8a^3x$ eſt moindre que celle du diviſeur $xx - aa$. Il faut donc maintenant diviſer $xx - aa$ par le dernier reſte $-8a^3x + 8a^4$, ou plûtôt par $x - a$, comme on le va dire.

7. Quand l'une des deux quantitez peut ſeule, même dès le commencement, être reduite à de moindres termes, comme ici le diviſeur $-8a^3x + 8a^4$, qui étant diviſé par $-8a^3$, ſe reduit à $x - a$, l'on fait cette reduction: mais après qu'on aura trouvé le plus grand diviſeur commun, l'on n'aura aucun égard à cette reduction, qui ne s'eſt faite, que dans l'une des deux quantitez. C'eſt donc avec la reduite $x - a$ que nous diviſerons $xx - aa$; le quotient exact eſt $x + a$. Et là finiſſent les diviſions; & il faut multiplier le dernier diviſeur $x - a$ par $3a$, afin d'avoir $3ax - 3aa$ pour le plus grand diviſeur commun des quantitez $3ax^4 - 12aax^3 + 18a^3x + 3a^5 = 0$, $3axx - 3a^3 = 0$.

8. Lorſque le quotient eſt une fraction, comme en diviſant $3xx - 7x + 4 = 0$ par $-2xx + 5x - 3 = 0$, le quotient eſt $\frac{3}{-2}$: on multiplie le dividende $+3xx - 7x + 4$ par -2; le produit eſt le nouveau dividende $-6xx + 14x - 8 = 0$, que l'on diviſe enſuite par $-2xx + 5x - 3 = 0$, le quotient eſt 3, que l'on neglige; le reſte eſt $-x + 1$; avec lequel l'on diviſe le diviſeur precedent $-2xx + 5x - 3$; le quotient eſt $+2x - 3$ ſans aucun reſte.

Ainſi le dernier diviſeur $-x + 1 = 0$, ou $x - 1 = 0$ eſt le plus grand diviſeur commun cherché.

ARTICLE II.

Trouver tous les Diviſeurs d'une quantité.

	Diviſeurs ſimples.	produits.						
1. POur trouver tous les diviſeurs exacts de 120.	*1.*							
	2.							
	2.	*4.*						
	2.	*8.*						
	3.	*6.*	*12.*	*24.*				
	5.	*10.*	*20.*	*40.*	*15.*	*30.*	*60.*	*120.*

Parceque *120* eſt un nombre pair, je le diviſe par *2*, le quotient eſt *60*; j'écris le diviſeur *2* ſous *1*. Après cela je diviſe le quotient *60* encore par *2*, le quotient eſt *30*; j'écris le diviſeur *2* ſous le precedent diviſeur *2*. Je diviſe de même le quotient *30* par *2*, le quotient eſt *15*; j'écris auſſi le diviſeur *2* ſous les precedens. Le quotient *15*, qui eſt un nombre impair, ne peut être diviſé par *2*, ainſi je le diviſe par le plus petit nombre impair *3*, qui ſuive *2*, le quotient eſt *5*; j'écris le diviſeur *3* ſous *2*. Le quotient *5* ne peut être diviſé par *3*, c'eſt pourquoi je le diviſe par *5* nombre impair qui ſuit *3*, le quotient eſt *1*; j'écris le diviſeur *5* ſous les autres. Tous les diviſeurs ſimples ſont donc *1. 2. 2. 2. 3. 5.*

Que ſi l'on ne trouvoit aucun autre nombre, que l'unité qui pût diviſer le propoſé, en eſſayant ces ſortes de diviſions: le nombre propoſé n'auroit aucun diviſeur que l'unité, & ſeroit un nombre premier; ce qui ne peut arriver à aucun nombre pair, puiſqu'il peut toûjours être diviſé par *2*. Quand le nombre eſt impair, on ne tente pas la diviſion par *2*: mais il la faut tenter par tout nombre impair, juſqu'à ce qu'on ſoit venu à celui, qui eſt la racine quarrée du nombre propoſé, s'il eſt quarré; ou s'il ne l'eſt pas, juſqu'à ce qu'on ſoit venu à un nombre dont le quarré eſt plus grand que le nombre propoſé. On doit appliquer tous ces nombres impairs de ſuite, quand même on en trouveroit qui ne fuſſent pas des diviſeurs exacts. Ainſi la diviſion de *121* doit ſe tenter par *3. 5. 7. 9. 11.* le quarré de *11* étant *121*. la diviſion de *1249* doit ſe tenter par *3. 7. 9. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37.* le quarré de *37* étant *1369*, qui eſt plus grand que le nombre propoſée *1249*.

J'ai omis *5* parcequ'il eſt certain, que *5* ne diviſe juſte que des nombres qui finiſſent par *5* ou *0*; j'ai encore omis *21. 27. 33.* parcequ'ils ſont

multiples de 3, par lequel la diviſion n'auroit pas pû ſe faire : ce qui eſt general ; car tout nombre, qui n'a pas pû être diviſé par un nombre quelconque 3, ne pourra jamais être diviſé par aucun de ſes multiples 6, 9, 12, 15, &c. C'eſt auſſi pour cette raiſon qu'on ne tente ces diviſions par aucun nombre pair, que par 2, dont tous les nombres pairs ſont multiples.

Multipliez les diviſeurs ſimples les uns par les autres & vous trouverez tous les diviſeurs exacts, du nombre propoſé qui ſeront, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 15. 20. 24. 30. 40. 60. 120.

	Diviſeurs ſimples.	Produits.
2. Pour trouver tous	1.	aa.
les diviſeurs exacts de	a.	$a^3 + acc$.
la grandeur litterale a^6	a.	$a^4 + aacc$.
$+ 2a^4cc + aac^4$, je	$aa + cc$.	$a^4 + 2aacc + c^4$.
diviſe par a, le quo-	$aa + cc$.	$a^5 + 2a^3cc + ac^4$.
tient eſt $a^5 + 2a^3cc$		$a^6 + 2a^4cc + aac^4$.

$+ ac^4$, & j'écris le diviſeur a. Je diviſe le quotient encore par a, le nouveau quotient eſt $a^4 + 2aacc + c^4$, & j'écris le ſecond diviſeur a ſous le premier. Je tente la diviſion de $a^4 + 2aacc + c^4$ par $a + c$, $a - c$, mais inutilement. Je diviſe donc par $aa + cc$, le quotient eſt $aa + cc$, & j'écris le diviſeur $aa + cc$ ſous les autres. Le quotient $aa + cc$ ne ſauroit plus être diviſé que par 1, ou par $aa + cc$ & le quotient eſt 1, j'écris encore le diviſeur $aa + cc$. Et multipliant les diviſeurs ſimples, je trouve les diviſeurs produits tels qu'ils ſont marquez.

SECTION II.

Découvrir toutes les Racines d'une Equation.

I.

CEtte premiere Methode ſera enſeignée par M. DESCARTES Section III.

1. Il ne doit point y avoir de fractions ni de termes irrationaux dans l'équation : & ſi elle en contient il faut l'en délivrer de la maniere que l'on a dit Part. 2. Sect. 2. Art. 7. Tous les termes ſont d'un côté & zero de l'autre.

2. Soit donc propoſée l'équation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$. On cherche Sect. 1. Art. 2. tous les diviſeurs exacts du dernier terme

terme *120* : parceque Part. 2. Sect. 1. Art. 2. n. 9. ce dernier terme peut contenir toutes les valeurs de x ou toutes les racines de l'équation.

3. On examine la diſpoſition des ſignes + & — ; comme Part. 2. Sect. 1. Art. 3. & s'ils marquent, qu'il ne peut y avoir que des racines vrayes ; l'on tente la diviſion de l'équation propoſée par des binomes, c'eſt-à-dire par des quantitez compoſées de l'inconnuë — un des diviſeurs du dernier terme: comme ici par $x - 1 = 0, x - 2 = 0, x - 3 = 0$, &c. Au contraire ſi la diſpoſition des ſignes fait connoître qu'il ne peut y avoir que des racines fauſſes, l'on tente la diviſion par des binomes compoſez de l'inconnuë + un diviſeur exact du dernier terme : ce ſeroit donc par $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. Enfin ſi la diſpoſition des ſignes montre qu'il y a dans l'équation des racines vrayes & des fauſſes, l'on tentera la diviſion par $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, &c.

On commence par les plus ſimples diviſeurs, *1*, *2*, *3*, &c. & l'on pourſuit juſques au dernier, à moins qu'on n'ait trouvé toutes les racines, que l'équation doit avoir ; car alors on s'arrête.

4. Lorſqu'un binome quelconque $x - 1 = 0$, ne diviſe pas ſans reſte l'équation propoſée, il ne contient pas une des racines de l'équation ; mais s'il la diviſe exactement, il en eſt une racine vraye ; & c'eſt $x = 1$. De même ſi le binome $x + 1 = 0$, diviſe exactement une équation, il en eſt une racine fauſſe, à ſavoir $x = -1$.

5. J'eſſaye de diviſer la propoſée par $x - 2 = 0$; elle réüſſit ; ainſi $x = 2$ eſt une racine vraye de l'équation. Le quotient eſt $x^3 - 2xx - 23x + 60 = 0$, & l'équation eſt deſcenduë d'un degré : parceque comme à meſure qu'on multiplie une équation par une nouvelle racine elle monte d'un degré ; auſſi à meſure qu'on diviſe une équation par une de ſes racines, elle doit deſcendre d'un degré. Il faut obſerver qu'une racine $xx - 2 = 0$, qui par la multiplication augmenteroit une équation de deux degrez, la diminueroit auſſi de deux degrez par la diviſion.

Si les ſignes du quotient $x^3 - 2xx - 23x + 60 = 0$, faiſoient juger qu'il n'a que des racines vrayes ; l'on ne feroit la diviſion que par un binome compoſé de l'inconnuë — un des diviſeurs exacts de *60*, qui ſont *1. 2. 3. 4. 5. 6. 10. 12. 15. 20. 30. 60.* Mais l'équation contient *2* racines vrayes, *1.* fauſſe.

Ainſi je recommence la diviſion par les diviſeurs les plus ſimples de *60*, excepté ceux qui n'ont pû réüſſir auparavant ; qui ſont -1, $+1$. J'applique de nouveau $x - 2 = 0$, qui ne diviſe plus exactement ; enſuite $x + 2 = 0$, qui ne le fait pas non plus ; après $x - 3 = 0$, dont la diviſion eſt exacte. Ainſi la ſeconde racine vraye eſt $x = 3$. Le quotient $xx + 1x - 20 = 0$, eſt d'un degré moindre que la quantité diviſée ; & il contient une racine vraye & une fauſſe.

Les diviſeurs du dernier terme 20 ſont 1. 2. 4. 5. 10. 20. Il faut donc tenter la diviſion par $x - 4 = 0$, qui eſt juſte ; la troiſiéme racine vraye ſera donc $x = 4$. Et le quotient $x + 5 = 0$ prouve que la quatriéme racine de la propoſée eſt la fauſſe $x = -5$.

6. Dès que l'équation eſt deſcenduë au ſecond degré, on peut en connoître les deux racines par la Methode de Liv. I. en ajoûtant de chaque côté le quarré de la moitié du Coefficient du ſecond terme.

7. Soit propoſée l'équation $y^6 + aay^4 - 2cc y^4 - a^4yy + c^4yy - a^6 - 2a^4cc - aac^4 = 0$. Les diviſeurs exacts du dernier terme $a^6 + 2a^4cc + aac^4$ ſont 1. a. aa. &c. tels qu'on les a trouvez, Sect. 1. Art. 2. n. 2. De plus il ne faut pas tenter la diviſion par x, mais par $xx -$ ou $+$ chaque diviſeur, ſuivant Part. 2. Sect. 1. Art. 2. La diviſion exacte ne ſe fait, que par le binome $yy - aa - cc = 0$: ainſi une racine vraye eſt $yy = aa + cc$. Le quotient $y^4 + 2aayy - ccyy + a^4 + aacc = 0$, ne peut point ſe diviſer exactement par aucun binome compoſé de $yy +$ ou $-$ un des diviſeurs exacts du dernier terme $a^4 + aacc$. Ainſi les deux autres racines ne ſe trouveront qu'avec la Methode de Liv. 1. Part. 2. Art. 1. & elles ſont $yy = -aa + \frac{1}{2}cc \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4 - 2aacc}$, incommenſurables, & même imaginaires lorſque cc eſt moindre que $8aa$.

8. Toutes les racines d'une équation étant incommenſurables, comme de celle-ci $x^4 - aaxx - bbxx - cxx + aac + bbc = 0$, dont les racines ſont $x - \sqrt{c} = 0$, $x + \sqrt{c} = 0$, $x - \sqrt{aa + bb} = 0$, $x + \sqrt{aa + bb} = 0$; ou étant toutes imaginaires comme de celle-ci $x^4 - 4x^3 + 8xx - 12x + 15 = 0$., dont les racines ſont $x - 2 + \sqrt{-1} = 0$, $x - 2 - \sqrt{-1} = 0$, $x - \sqrt{-3} = 0$, $x + \sqrt{-3} = 0$: on ne trouvera aucune des racines par la Methode preſente. Dès que cette Methode ne découvrira aucune racine ; elles ſeront toutes incommenſurables, ou toutes imaginaires, ou partie incommenſurables, partie imaginaires.

9. Mais comme les diviſeurs du dernier terme ſont quelquefois en très-grand nombre ; & que c'eſt une peine exceſſive, que de tenter la diviſion de l'équation par tous ces diviſeurs l'un après l'autre, & pris non ſeulement avec le ſigne $-$, mais encore avec le ſigne $+$ on a cherché differentes voyes, pour diminuer ce travail. C'eſt ce que l'on verra dans les Methodes ſuivantes.

II.

1. Cette Methode eſt fondée ſur ce principe, que ſi dans une équation, où tous les termes ſont d'un côté, & zero de l'autre, on ſubſtituë une valeur de l'inconnuë à ſa place, tous les termes de l'équation ſe détruiſent, & l'équation ſe reduit à $0 = 0$.

Soit $x - a = 0$; donc $x = +a$; ſubſtituons cette valeur de x à ſa place, il vient $a - a = 0$, $0 = 0$.

Soit $xx + 2bx + bb = o$, les deux racines ſont $x + b = o$, $x + b = o$; donc $x = -b$; ſubſtituons $-b$ à la place de x, & $+bb$ quarré de $-b$ à la place de xx; l'équation ſe changera en $bb - 2bb + bb = o$, $o = o$.

Soit x^4 $+ abxx$ $- ax^3 + acxx - abcx$ $- bx^3 + adxx - abdx$ $- cx^3 + bcxx - acdx$ $- dx^3 + bdxx - bcdx$ $+ cdxx$ $+ abcd = o$, dont les diviſeurs du dernier terme ſont a, b, c, d, ab, ac, ad, bc, bd, cd, abc, abd, acd, bcd, $abcd$.

Si l'on ſubſtituë a pour x, aa pour xx, a^3 pour x^3, a^4 pour x^4, on fera la premiere reduite qui ſuit. Si l'on ſubſtituë b pour x, bb pour xx, b^3 pour x^3, b^4 pour x^4, on aura la ſeconde reduite qui ſuit. Si l'on ſubſtituë de même c, on aura la troiſiéme reduite, & ſi l'on ſubſtituë d, ce ſera la quatriéme reduite. Dans toutes ces reduites les termes ſe détruiſent également, & l'équation devient $o = o$.

I.

$+ a^3b$
$- a^4 + a^3c - aabc$
$- a^3b + a^3d - aabd$
a^4 $+ abcd = o.$
$- a^3c + aabc - aacd$
$- a^3d + aabd - abcd$
$+ aacd$

II.

$+ ab^3$
$- ab^3 + abbc - abbc$
$- b^4 + abbd - abbd$
b^4 $+ abcd = o.$
$- b^3c + b^3c - abcd$
$- b^3d + b^3d - bbcd$
$+ bbcd$

III.

$+ abcc$
$- ac^3 + ac^3 - abcc$
$- bc^3 + accd - abcd$
c^4 $+ abcd = o.$
$- c^4 + bc^3 - accd$
$- c^3d + bccd - bccd$
$+ c^3d$

IV.

$+ abdd$
$- ad^3 + acdd - abcd$
$- bd^3 + ad^3 - abdd$
d^4 $+ abcd = o.$
$- cd^3 + bcdd - acdd$
$- d^4 + bd^3 - bcdd$
$+ cd^3$

Les racines de l'équation propoſée ſont $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$, $x - d = o$.

2. Le même arrive aux équations numeriques. Soit $x^3 + 9xx + 26x + 24 = 0$; dont les racines $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 4 = 0$, ou $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$. Substituez -2 à la place de x, de sorte que -2 multiplie $+26$ comme x le multiplie ; & $+4$ quarré de -2 à la place de xx, de sorte que $+4$ multiplie $+9$ comme xx le multiplie ; & -8 cube de -2 à la place de x^3. La reduite sera $-8 + 36 - 52 + 24 = 0$, $0 = 0$.

Substituez aussi de la même sorte -3 à la place de x, 9 à la place de xx, -27 à la place de x^3 ; vous ferez $-27 + 81 - 78 + 24 = 0$, $0 = 0$.

Mettez encore -4 pour x, $+16$ pour xx, -64 pour x^3 ; il viendra $-64 + 144 - 104 + 24 = 0$, $0 = 0$.

3. C'est pourquoi après avoir trouvé tous les diviseurs exacts du dernier terme de l'équation, il faut les substituer l'un après l'autre avec le signe $+$ & $-$ selon que les signes $+$ & $-$ de l'équation l'indiquent, à la place de l'inconnuë de la façon qu'on vient de le voir ; en commençant par les plus simples. Lorsque la substitution fera que tous les termes se détruisent, la quantité, qu'on aura substituée avec le signe $+$, sera une racine vraye de l'équation, celle, qu'on aura substituée avec le signe $-$, en sera une racine fausse.

4. Mais comme on peut être obligé de substituer tous les diviseurs du dernier terme ; ce seroit encore, quand ces diviseurs sont en grand nombre, un travail assez long.

III.

La Methode, qui suit, est pour les grandeurs numeriques. Soit proposée l'équation $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$.

1. Vous chercherez les diviseurs exacts du dernier terme 120, qui sont $1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 15. 20. 24. 30. 40. 60. 120$. Ensuite je suppose $x + 1 = y$, $y - 1 = x$, c'est-à-dire que Part. 2. Sect. 2. Art. 2. vous augmentez de 1. les racines vrayes de l'équation proposée. La transformée sera $y^4 - 8y^3 - yy + 126y - 240 = 0$. dont les diviseurs du dernier terme 240, sont $1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 10. 12. 15. 16. 20. 24. 30. 40. 48. 60. 120. 240$. Or puisque les racines vrayes de cette transformée n'ont qu'une unité par dessus les racines vrayes de la proposée : il suit, que les racines de la transformée étant diminuées de 1, elles peuvent être les racines vrayes de la proposée. Vous prendrez donc les racines de la transformée diminuées de 1, & ce sont $0. 1. 2. 3. 4. 5. 7. 9. 11. 14. 15. 19. 23. 29. 39. 47. 59. 119. 239$. Mais il n'y a que les racines qui se trouvent ici les mêmes avec celles de la proposée, qui puissent être ses vrayes racines ; à savoir $1. 2. 3. 4. 5. 15$. Ce qui diminuë déja de beaucoup le nombre des racines avec lesquelles il faut faire les divisions de la premiere Methode,

ou les ſubſtitutions de la ſeconde. Cependant comme la propoſée n'a que trois racines vrayes, vous chercherez bientôt à les diminuer davantage.

D'un autre côté comme les racines fauſſes de la propoſée ſont diminuées de l'unité dans la transformée, Part. 2. Sect. 2. Art. 2. n. 3. il ſuit que ſi vous augmentez de *1* les racines de la transformée : elles peuvent être les racines fauſſes de la propoſée. Prenez donc les racines de la transformée augmentées de l'unité, & ce ſont *2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 11. 13. 16. 17. 21. 25. 31. 41, 49. 61. 121. 241.* Mais il n'y a que les racines qui ſe trouvent ici les mêmes avec celles de la propoſée, qui puiſſent être ſes racines fauſſes, à ſavoir *2. 3. 4. 5. 6. 16.* cependant comme la propoſée n'a qu'une racine fauſſe, il en faudra encore diminuer le nombre.

3. Pour déterminer davantage les racines tant vrayes que fauſſes de l'équation propoſée : vous feindrez encore $x - 1 = y$, $y + 1 = x$; c'eſt-à-dire que Part. 2. Sect. 2. Art. 2. n. 2. vous diminuez de l'unité les racines vrayes de la propoſée. La transformée ſera $y^{+*} - 25yy + 60y - 36 = 0$, dont les diviſeurs exacts du dernier terme *36* ſont *1. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 18. 36.* Or puiſque les vrayes racines de cette transformée ſont moindres d'une unité, que les vrayes racines de la propoſée : vous prendrez les racines de la transformée augmentées de 1, & ce ſont *2. 3. 4. 5. 7. 10 13. 19. 37.* Mais il n'y a que celles qui ſont les mêmes que les diviſeurs de *120* dernier terme de la propoſée, & que les diviſeurs diminuez de 1 de *240* dernier terme de la premiere transformée, qui puiſſent être les racines vrayes de la propoſée ; à ſavoir *2. 3. 4. 5.*

Comme les racines fauſſes de la propoſée ſont augmentées de l'unité dans la transformée, Part. 2. Sect. 2. Art. 2. n. 3. il ſuit que ſi vous diminuez de 1 les diviſeurs de la ſeconde transformée ; ils pourront être les racines fauſſes de la propoſée. Ces diviſeurs diminuez de 1 ſont 0. 1. 2. 3. 5. 8. 11. 17. que vous comparez avec les diviſeurs de 120 dernier terme de la propoſée & avec les diviſeurs augmentez de 1. de la premiere transformée : & il n'y a que les nombres communs dans ces trois ordres de diviſeurs, à ſavoir *2. 3. 5.* qui puiſſent être la racine fauſſe de la propoſée.

4. Si vous voulez encore diminuer le nombre des racines tant vrayes que fauſſes ; vous pourrez faire $x + 2 = y$, $x - 2 = y$; $x + 3 = y$, &c.

5. Après que vous aurez trouvé les nombres qui peuvent être racines de l'équation propoſée, ou bien ſelon la premiere Methode vous diviſerez par un binome compoſé de l'inconnuë + ou — un de ces nombres : ou bien ſuivant la ſeconde Methode vous ſubſtituerez chacun de ces nombres à la place de l'inconnuë.

IV.

1. Cette quatriéme Methode eſt pour les grandeurs litterales. Soit propoſée l'équation de la deuxiéme Methode n. 1. $x^4 \begin{matrix} - a^3 \\ - bx^2 \\ - c^3 \end{matrix}$, &c. On peut feindre une égalité entre tous les termes, où abd ſe trouve, & zero ; $-abdx+abcd=0$; $abdx=abcd$; $x=c$; $x-c=0$. Si c diviſe exactement le dernier terme $abcd$ de la propoſée, il peut être une racine de cette même propoſée : l'on eſſaye donc la diviſion de toute la propoſée par $x-c$, & parceque la diviſion eſt juſte, $x-c=0$ eſt une racine cherchée.

On fera le même à l'égard du quotient $x^3 \begin{matrix} - axx + abx \\ - bxx + adx - abd = 0. \\ - dxx + bdx \end{matrix}$ & l'on formera une équation $+abx-abd=0$ de tous les termes, où ab ſe trouve, qui ſe reduit à $x-d=0$; & parceque d diviſe le quotient abd ; on tentera la diviſion de toute l'équation par $x-d=0$, cette diviſion étant achevée ſans aucun reſte, on a découvert une nouvelle racine de la propoſée.

On continuera de la même ſorte ſur le nouveau quotient, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait trouvé toutes les racines de l'équation.

Lorſque une équation feinte de tous les termes, où abd ſe trouve, ne réüſſit pas, on en feint d'autres de tous les termes, où bcd ſe trouve ; de tous les termes, où bc ſe trouve ; de tous les termes, où d ſe trouve, &c.

2. Voici qui eſt encore pour les équations litterales. Je diviſe l'équation propoſée en deux ſommes : dans la premiere je mets tous les termes, où c ſe trouve, ainſi l'équation de Methode 2. n. 1. étant propoſée, la premiere ſomme eſt $-cx^3+acxx+bcxx+cdxx-abcx-acdx-bcdx+abcd=0$; dans la ſeconde je mets tous les autres termes, $x^4-ax^3-bx^3-dx^3+abxx+adxx+bdxx-abdx=0$. Je diminuë l'une & l'autre par la diviſion, s'il ſe peut ; la premiere peut toûjours être diviſée par la quantité commune à tous les termes, comme ici par c ; la ſeconde le peut ici être par x. Et j'ai $-x^3+axx+bxx+dxx-abx-adx-bdx+abd=0$, & $x^3-axx-bxx-dxx+abx+adx+bdx-abd=0$. Je cherche le plus grand diviſeur commun de ces deux quantitez, en diviſant la premiere par la ſeconde : la diviſion eſt exacte & le quotient -1 ; ainſi Sect. 1. Art. 1. n. 1.

La ſeconde quantité eſt le plus grand diviſeur commun des deux. Mais parceque cette ſeconde quantité n'eſt pas une racine de la propoſée, car elle

en a quatre, qui chacune ſont x : je diviſe la propoſée par ce diviſeur commun : le quotient $x - c = o$ de la diviſion exacte eſt une racine vraye de la propoſée.

Le diviſeur commun $x^3 - axx - bxx - dxx + abx + adx + bdx - abd = o$, contient les autres racines. Je le diviſe encore en deux ſommes, dans la premiere deſquelles je range tous les termes qui ont b, $-bxx + abx + bdx - abd = o$; dans l'autre ſont les autres termes $x^3 - axx - dxx + adx = o$; qui ſe diviſent déja l'une par b, l'autre par x ; & elles ſont $-xx + ax + dx - ad = o$, $xx - ax - dx + ad = o$. La ſeconde diviſe exactement la premiere : la ſeconde eſt donc le plus grand diviſeur commun des deux, & par conſequent de la propoſée, que je diviſe par cette ſeconde. Le quotient exact $x - b$ eſt une autre racine vraye de l'équation propoſée.

Le diviſeur commun $xx - ax - dx + ad = o$ contient les deux autres racines. J'en fais auſſi deux parties, dont la premiere eſt compoſée des termes, où a ſe trouve ; la ſeconde eſt compoſée des autres termes, $-ax + ad = o$, $xx - dx = o$. La diviſion de la premiere par a, de la ſeconde par x, laiſſe $-x + d = o$, $x - d = o$. La ſeconde diviſe exactement la premiere, la ſeconde contient x lineaire, ainſi $x - d = o$ eſt la troiſiéme racine vraye de la propoſée.

Enfin je diviſe $xx - ax - dx + ad = o$ par $x - d = o$; le quotient $x - a = o$ eſt la quatriéme racine vraye de la propoſée.

On auroit pû diviſer d'abord l'équation propoſée $x^4 - bx^3 - cx^3 - ax^3$ &c. en deux autres, dont la premiere contienne tous les termes où eſt ab, la ſeconde tous les autres ; on auroit ou $+abxx - abcx - abdx + abcd = o$, $x^4 - ax^3 - bx^3 - cx^3 - dx^3 + acxx + adxx + bcxx + bdxx + cdxx - acdx - bcdx = o$. Et diviſant la premiere par ab, la ſeconde par x, il ſeroit venu $xx - cx - dx + cd = o$, $x^3 - axx - bxx - cxx - dxx + acx + adx + bcx + bdx + cdx - acd - bcd$. La ſeconde eſt diviſée exactement par la premiere, qui ſera le plus grand diviſeur des deux, & un diviſeur de la propoſée.

Mais comme ce commun diviſeur n'eſt pas une grandeur lineaire, elle n'eſt pas une racine de la propoſée : on diviſera donc la propoſée par ce commun diviſeur ; le quotient exact $xx - ax - bx + ab = o$, contient deux racines de la propoſée. On ſeparera donc cette équation en deux autres, dont la premiere ait les termes où a ſe trouve, & la ſeconde tous les autres, ce ſont $-ax + ab = o$, $xx - bx = o$, & diviſant l'une par a, l'autre par x, il vient $-x + b = o$, $x - b = o$, par laquelle on diviſe la propoſée ; & la diviſion exacte qui ſe fait, prouve que

$x - b = o$ eſt une des racines de la propoſée, qui ſera diminuée d'un degré : après quoi l'on cherchera de la même façon les autres racines.

SECTION III.

La reduction des Equations cubiques.

L'On a expliqué Liv. 2. Part. 1. Sect. 1. ce que c'eſt que le Problême plan, ſolide, plus que ſolide.

ARTICLE I.

La reduction des Equations cubiques, lorſque le Problême eſt plan.

M. DESCARTES.

OR quand pour trouver la conſtruction de quelque Problême, on vient à une équation, en laquelle la quantité inconnuë a trois dimenſions; premierement ſi les quantitez connuës, qui y ſont, contiennent quelques nombres rompus, il les faut reduire à d'autres entiers, par la multiplication tantôt expliquée; & s'ils en contiennent de ſourds, il faut auſſi les reduire à d'autres rationaux autant qu'il ſera poſſible, tant par cette même multiplication, que par divers autres moyens, qui ſont aſſez faciles à trouver. Puis examinant par ordre toutes les quantitez, qui peuvent diviſer ſans fraction le dernier terme, il faut voir, ſi quelqu'une d'elles jointe avec la quantité inconnuë par le ſigne + ou —, peut compoſer un binome, qui diviſe toute la ſomme; & ſi cela eſt, le Problême eſt plan, c'eſt-à-dire, il peut être conſtruit avec la Regle & le Compas. Car ou bien la quantité connuë de ce binome eſt la racine cherchée; ou bien l'équation étant diviſée par lui, ſe reduit à deux dimenſions, en ſorte qu'on en peut trouver après la racine par ce qui a été dit au premier Livre.

Par exemple ſi on a $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$. le dernier terme, qui eſt 64 peut être diviſé ſans fraction par 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64; c'eſt pourquoi il faut examiner par ordre, ſi cette équation ne peut point être diviſée par quelqu'un des binomes

mes $yy - 1$, ou $yy + 1$, $yy - 2$, ou $yy + 2$, $yy - 4$, &c. Et on trouve qu'elle le peut être par $yy - 16$ en cette ſorte.

Je commence par le dernier terme, & diviſe $- 64$ par $- 16$, ce qui fait $+ 4$, que j'écris dans le quotient. Puis je multiplie $+ 4$ par

$$\begin{array}{l} y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0 \\ -y^6 - 8y^4 - 4yy \\ \hline\hline - 16 \\ 0 - \frac{16y^4 - 128yy}{16 \quad 16} \\ \hline + y^4 + 8yy + 4 = 0 \text{ quotient.} \end{array}$$

$+ yy$, ce qui fait $+ 4yy$; c'eſt pourquoi j'écris $- 4yy$ dans la ſomme, qu'il faut diviſer : car il y faut toûjours écrire le ſigne $+$ ou $-$ tout au contraire à celui que produit la multiplication. Et joignant $- 124yy$ avec $- 4yy$, j'ai $- 128yy$, que je diviſe derechef par $- 16$, & j'ai $+ 8yy$, pour mettre dans le quotient, & en le multipliant par yy, j'ai $- 8y^4$, pour joindre avec le terme qu'il faut diviſer, qui eſt auſſi $- 8y^4$; & ces deux enſemble font $- 16y^4$, que je diviſe par $- 16$, ce qui fait $+ 1y^4$ pour le quotient, & $- 1y^4$, pour joindre avec $+ 1y^4$, ce qui fait 0, & montre que la diviſion eſt achevée. Mais s'il étoit reſté quelque quantité, ou bien qu'on n'eut pû diviſer ſans fraction quelqu'un des termes precedens, on eut par là reconnu, qu'elle ne pouvoit être faite.

Tout de même ſi on a $y^6 \overset{+aa}{\underset{-2cc}{}} \; y^4 \overset{-a^4}{\underset{+c^4}{}} \; yy \overset{-a^6}{\underset{-aac^4}{}} - 2a^4cc = 0$, le dernier terme ſe peut diviſer ſans fraction par a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, & ſemblables.

Mais il n'y en a que deux, qu'on ait beſoin de conſiderer, à ſavoir aa, & $aa + cc$; car les autres donnant plus ou moins de dimenſions dans le quotient, qu'il n'y en a en la quantité connuë du penultiéme terme, empêcheroit que la diviſion ne s'y pût faire. Et notez que je ne compte ici les dimenſions de y^6 que pour trois à cauſe qu'il n'y a point d'y^5, ni d'y^3, ni d'y en toute la ſomme.

Or en examinant le binome $yy - aa - cc = o$, on trouve que la diviſion ſe peut faire par lui en cette ſorte.

$$
\begin{array}{l}
\quad + aa \quad - a^4 \quad - \quad a^6 \\
+ y^6 \quad y^4 \quad yy - 2a^4cc = o. \\
\quad - 2cc + c^4 \quad - aac^4 \\
\\
- y^6 \quad - 2aa - \quad a^4 \quad \text{———} \\
\quad - + \quad cc - aacc - aa - cc \\
\quad o \quad \text{———} \quad \text{———} \\
\quad - aacc - aa - cc \\
\hline
\qquad\qquad + 2aa \quad + a^4 \\
+ y^4 \qquad\quad yy \qquad\quad = o. \text{ quotient.} \\
\qquad\quad - cc \quad + aacc
\end{array}
$$

Ce qui montre que la racine cherchée eſt $aa + cc$. Et la preuve en eſt aiſée à faire par la multiplication.

1. Lorſqu'il faut reſoudre un Problême dont l'équation eſt cubique, il faut examiner, ſi le Problême eſt plan. Pour le connoître l'on ôte d'abord les fractions & les quantitez irrationelles, s'il y en a, par l'Art. 3. Sect. 2. Part. 2. Enſuite l'on détermine tous les diviſeurs exacts du dernier terme par l'Art. 2. Sect. 1. Part. 3. Enfin par la Sect. 2. Part. 3. l'on cherche ſi on découvrira une racine de cette équation. Si l'on trouve une racine, le Problême eſt plan, ſelon M. DESCARTES : car ou cette racine trouvée $yy - 16 = o$ eſt la racine, qui donne la ſolution du Problême, ou elle ne l'eſt pas. Si elle l'eſt, l'on aura $y = \pm 4$, qui ſe peut déterminer avec la Regle & le Compas. Si elle ne l'eſt pas, une des deux racines du quotient $y^4 + 8yy + 4 = o$ donnera cette ſolution : or cette équation étant quarrée, on en trouvera les deux racines, Liv. 1. Part. 2. Art. 1. 2. 3. par la Regle & le Compas. Ainſi quelle que ſoit cette racine, on n'aura beſoin que de la Regle & du Compas pour le conſtruire, & le Problême eſt plan.

2. L'on a montré Liv. 1. Part. 2. Art. 1. n. 1. que les équations $y^4 + 8yy + 4 = o$, $y^4 \begin{array}{l} + 2aayy + a^4 \\ - ccyy + aacc \end{array} = o$ ſont quarrées. Où l'on a remarqué qu'il faut, afin que le Problême ſoit plan, qu'on puiſſe extraire la racine quarrée non ſeulement de la premiere équation, mais encore du quotient, ou de la ſeconde équation, comme on le peut ici.

3. La premiere racine qu'on trouve par cette diviſion, peut être ou n'être pas la racine cherchée ; de ſorte qu'elle ſera racine de l'équation, ſans être racine du Problême. La raiſon de cela eſt, que comme on l'a

dit, Liv. 1. Part. 1. Sect. 4. Regle 10. Il n'y a jamais qu'une racine, qui donne exactement la solution du Problême tel qu'il est proposé ; les autres racines demandent le changement de quelques circonstances. Or comme c'est la racine, qui resout exactement le Problême, que l'on cherche seule ; il peut arriver que la premiere division en donne une autre.

En voici un Exemple, Fig. 125. soient données les cinq lignes paralleles entr'elles, Aa, Bb, Dd, Ee, Ff: il faut trouver un point k entre les paralleles Aa, Bb; duquel ayant tiré les lignes kA, kB, kD, kE, kF perpendiculaires sur les données : le parallelepipede sous kB, kE, kF soit égal au parallelepipede sous kA, kD & une donnée $BF = 4a$. Fig. 125.

On connoît la distance des paralleles données. Soit $BA = 8a$, $BD = 7a$, $DE = a$, $EF = 2a$, $BF = 4a$; kB, y ; donc $kA = BA - Bk$, $8a - y$; $kD = kB + BD$, $y + 7a$; $kE = kB + BE$, $y + 6a$; $kF = kB + BF$, $y + 4a$.

Par la supposition $kB \times kE \times kF = kA \times kD \times 4a$; $y^3 + 10ayy + 24aay = 4aay - 4ayy + 224a^3$; $y^3 + 14ayy + 20aay - 224a^3 = 0$. Après avoir cherché les diviseurs exacts de $224a^3$, on trouvera, que la division ne se fait sans reste, que par $y + 8a = 0$. C'est-à-dire que $y = -8a$, ou $-y = 8a$ est une racine de l'équation, & n'est pas la racine cherchée du Problême ; puisque c'est BC qui est $-y = 8a$.

Le quotient de la division est $yy + 6ay - 28aa = 0$, dont les racines sont $y = -3a \pm \sqrt{37aa}$, & c'est la seule racine $y = -3a + \sqrt{37aa} = kB$ qui resolve parfaitement le Problême. La troisiéme racine $y = -3a - \sqrt{37aa}$, ou $-y = 3a + \sqrt{37aa}$ donne le point K : car les $-y$ se prennent en allant de Bb vers Cc.

Voyez aussi Sect. 4. Art. 2. §. 1. Part. 4. Sect. 4. Art. 1. Ex. 1. &c.

4. Il reste à expliquer la Methode, dont M. DESCARTES se sert pour la division. A represente la Methode ordinaire, B celle de M. DESCARTES telle qu'il l'employe ici, C celle de M. DESCARTES qui auroit plus de rapport à l'ordinaire.

A		B		C	
144	$1.2.$	144	$1.2.$	144	$1.2.$
12		12		12	
2.4		-2		$+24$	
12		$+2$		$1.\ 2$	
24		$+1.2$		$+1\ \ 2$	
0		$12.$		0	
		-1			
		0			

L'on veut diviser 144 par 12. Dans la Methode ordinaire l'on met le

diviſeur 12 ſous les premiers chifres du dividende. M. DESCARTES le met ſous les derniers chifres. Ce qui revient au même, car de quel côté que l'on commence, le diviſeur doit ſucceſſivement diviſer tout le dividende.

Dans la Methode ordinaire l'on demande combien de fois 1 premier nombre du diviſeur eſt dans la partie correſpondante du dividende. M. DESCARTES demande combien de fois 2 dernier nombre du diviſeur eſt dans la partie correſpondante 4 du dividende.

Dans la Methode ordinaire après avoir trouvé que 1 du diviſeur eſt une fois dans 1 du dividende; l'on écrit 1 dans le quotient, & cet 1, qui vaut ici une dizaine, ſe met le premier dans le quotient, en allant de gauche à droite.

M. DESCARTES après avoir connu que 2 du diviſeur eſt contenu deux fois dans 4 du dividende; il écrit 2 dans le quotient, en allant de droite à gauche.

Dans la Methode ordinaire on multiplie tout le diviſeur 12 par le quotient 1, le produit 12 s'écrit ſous 14 du dividende, lorſque ce produit eſt different du diviſeur; ici il eſt inutile de l'écrire; on ſouſtrait le produit 12 du dividende 14, il reſte 2, que l'on écrit. M. DESCARTES multiplie le diviſeur 12 par ſon quotient 2, le produit eſt 24, il écrit 2 ſous le dividende dans le rang des dizaines; il n'écrit pas 4 ſecond nombre du produit 24, parceque le dernier nombre du produit doit toûjours être exactement égal au dernier nombre de ſon dividende : autrement la diviſion ne ſe feroit pas juſte.

M. DESCARTES veut qu'on écrive le ſigne contraire —, qu'on ajoûte le produit — 2 au nombre correſpondant + 4 du dividende. La ſomme eſt + 2 qu'on écrit ſous — 2. Il ſemble que cela n'eſt fait, que pour s'écarter davantage de la maniere ordinaire : car ſi vous multipliez le diviſeur 12 par le quotient 2, que vous écriviez le produit 24 avec ſon ſigne +, & que vous le ſouſtraiyez de 44, il reſtera également 2 ou 20. En effet c'eſt la même choſe, de mettre le ſigne que donne la multiplication du diviſeur par le quotient & de ſouſtraire, ou de mettre un ſigne contraire & d'ajoûter.

Dans la Methode ordinaire j'écris 4 du dividende, qui n'a pas encore été diviſé à côté du reſte 2, & le dividende total de la ſeconde operation eſt 24. J'applique le diviſeur 12, comme on voit en *A*, je demande 1 dans 2 combien de fois; c'eſt 2 que j'écris à la ſeconde place du quotient, en allant de gauche à droite; je multiplie le diviſeur 12 par ce 2 du quotient, j'écris le produit 24, que je ſouſtrais du dividende 24, & il ne reſte rien.

Dans *C* je deſcends 1 du dividende devant 2 qui reſte, & j'applique mon diviſeur 12; je demande 2 dans 2 combien de fois, c'eſt 1 que je

mets au quotient à la place des dixaines ; je multiplie le diviſeur 12 par le nouveau quotient 1 , le produit 12 s'écrit avec le ſigne + qui lui convient, on le ſouſtrait du dividende, & il ne reſte rien. Mais en *B* M. DESCARTES met *1* du dividende devant 2 qui reſtoit, ce qui fait + 12 , que j'ai écrit ſous le reſte 2 ; il applique le diviſeur 12 , & demande 2 du diviſeur combien de fois dans 2 du dividende ; c'eſt *1* qu'il écrit devant le *2* du quotient ; il multiplie *1* du diviſeur par *1* du quotient, le produit + *1* ſe met avec un ſigne contraire ſous *1* du dividende, & c'eſt — *1*, qu'il ajoûte à + *1* du dividende, & il ne reſte rien. Il ne paroît pas ici, non plus que dans la premiere operation que M. Deſcartes multiplie le ſecond nombre *2* du diviſeur par le quotient *2 ;* mais il fait certainement cette operation, & il n'écrit pas le produit, parcequ'il doit toûjours être égal au dividende correſpondant ; autrement la diviſion exacte par ce diviſeur ſeroit impoſſible.

Comparons à preſent l'Exemple de M. DESCARTES qui eſt en *D* ; avec ce même Exemple en *E*, où l'on approche plus de la Methode ordinaire.

D.

$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \mid y^4 + 8yy + 4.$

$yy - 16$

$- 4yy$

$-8y^4 - 128yy$

$yy - 16$

$- 8y^4$

$y^6 - 16y^4$

$yy - 16$

$-y^6$

0

E.

$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \mid y^4 + 8yy + 4$

$yy - 16$

$+ 4yy - 64$

$- 8y^4 - 128yy$

$yy - 16$

$+8y^4 - 128yy$

$y^6 - 16y^4$

$yy - 16$

$y^6 - 16y^4$

0

En *D* M. Deſcartes demande combien de fois *16* dans *64* ; c'eſt *4*, qui ſe met avec + dans la derniere place du quotient. Cela ſe fait auſſi en *E*.

En *D* l'on n'écrit pas le produit *64* du quotient *4* par le diviſeur *16*, parceque ce produit doit exactement être — *64*, qui s'il étoit écrit avec un ſigne contraire ; & enſuite ajoûté au dividende — *64* , il ne reſteroit rien. En *E* l'on pourroit de même ne pas écrire le produit — *64*, parcequ'étant ſouſtrait du dividende — *64* , il ne reſte rien.

En *D* l'on multiplie + *yy* du diviſeur par + *4* du quotient, le produit + *4yy* s'écrit avec un ſigne contraire, & c'eſt — *4yy*, qui étant ajoûté à — *124yy* du dividende fait la ſomme de — *128yy* que l'on écrit. En *E* le produit + *4yy* s'écrit avec ſon ſigne, on le ſouſtrait de — *124yy* du dividende, le reſte eſt — *128yy*.

On deſcend $- 8y^4$ du dividende, & on le place devant $- 128yy$, on applique le diviſeur $yy - 16$; & $- 16$ diviſant $- 128yy$ donne $+ 8yy$ pour le quotient, où on l'écrit avant $+ 4$. En D l'on n'écrit pas le produit $128yy$ du quotient $+ 8yy$ par le diviſeur $- 16$, pour la raiſon, qu'on a déja apportée. Mais on multiplie le diviſeur $+ yy$ par le quotient $+ 8yy$, le produit s'écrit avec un ſigne contraire, & c'eſt $- 8y^4$, que l'on ajoûte à $- 8y^4$ du dividende, la ſomme eſt $- 16y^4$ que l'on écrit. En E le produit total $+ 8y^4 - 128yy$ s'écrit avec ſon ſigne, on fait la ſouſtraction, le reſte $- 16y^4$ s'écrit.

On deſcend y^6 vis à-vis de $- 16y^4$, la diviſion de $- 16y^4$ par $- 16$ donne pour le premier terme du quotient $+ y^4$. En D l'on n'écrit pas le produit de $- 16$ par $+ y^4$; mais le produit $+ y^6$ du diviſeur yy par le quotient y^4 s'écrit avec un ſigne contraire, & c'eſt $- y^6$, que l'on ajoûte à $+ y^6$ du dividende, il reſte 0. En E, l'on écrit avec ſon ſigne le produit $+ y^6 - 16y^4$; qui étant ſouſtrait du dividende $+ y^6 - 16y^4$ le reſte eſt 0.

Le diviſeur $yy - 16 = 0$ eſt donc une racine de l'équation $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, & cette racine eſt $yy = 16$, qui contient deux valeurs $y = \pm 4$. Les autres racines de l'équation ſont contenuës dans le quotient $y^4 + 8yy + 4 = 0$, & ſont $yy = -4 \pm \sqrt{12}$ toutes deux fauſſes, & ſe reduiſent la premiere à $y = \pm \sqrt{-4 + \sqrt{12}}$, la ſeconde à $y = \pm \sqrt{-4 - \sqrt{12}}$ toutes quatre imaginaires. Ainſi l'on voit que l'équation propoſée, parceque ſa haute puiſſance y^6 à ſix dimenſions, contient ſix racines ou ſix valeurs de y.

Faiſons encore la diviſion du ſecond Exemple de M. Deſcartes. Pour plus grande facilité j'écris 1 ſur les quantitez du dividende qui ſervent à la premiere operation, 2 ſur celles qui ſervent à la ſeconde, &c. je fais le même ſur les differentes quantitez des reſtes. J'écris encore 1 ſur la partie du dividende qui vient de la premiere operation, 2 ſur celle qui vient de la ſeconde, &c.

$$\begin{array}{llllllll}
\overset{5.}{y^6} & + \overset{3.}{aay^4} & - \overset{4.}{2ccy^4} & - \overset{1.}{a^4yy} & + \overset{4.}{c^4yy} & - \overset{1.}{a^6} & - \overset{1.}{2a^4cc} & - \overset{2.}{aac^4} = 0. \\
 & & & + yy & & - aa & - cc & \\
 & & & - a^4yy & & + a^6 & + a^4cc &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
 & \overset{3.}{} & & \overset{2.}{} & \overset{2.}{} \\
1.\text{ reſte} & - 2a^4yy & 0 & - a^4cc & - aac^4 \\
 & + yy & & - aa & - cc \\
 & - aaccyy & & + a^4cc & + aac^4 \\
 & & & 0 & 0
\end{array}$$

3.	3.	3.	
$+ aay^4$	$- 2a^4yy$	$- aaccyy$	2. reſte.
yy	$- aa$	$- cc$	
$- 2aay^4$	$+ 2a^4yy$	$+ 2aaccyy$	

5.		4.	
$- aay^4$	0	$+ aaccyy$	3. reſte.

4.		4.
$- 2ccy^4$		$+ c^4yy$
$+ yy$	$- aa$	$- cc$
$+ ccy^4$	$- aaccyy$	$- c^4yy$

5.	5.	5.			
$+ y^6$	$- aay^4$	$- ccy^4$	0	0	4. reſte.
$yy -$	aa	$- cc$			
$- y^6$	$+ aay^4$	$+ ccy^4$			
0	0	0			

Quotient $\overset{5.}{y^4} - \overset{4.}{ccyy} + \overset{3.}{2aayy} + \overset{2.}{aacc} + \overset{1.}{a^4}$.

Pour la premiere Operation j'applique le diviſeur $yy - aa - cc$ ſous $- a^4yy - a^6 - 2a^4cc$; & $- aa$ diviſant $- a^6$, le quotient eſt $+ a^4$. Le produit du quotient par le diviſeur eſt $+ a^4yy - a^6 - a^4cc$, que j'écris avec des ſignes contraires, & c'eſt $- a^4yy + a^6 + a^4cc$, qui étant ajoûté au dividende correſpondant, la ſomme eſt $- 2a^4yy - a^4cc$, que j'écris comme premier reſte.

Pour la ſeconde Operation je deſcends $- aac^4$ du dividende, j'applique le diviſeur, & $- aa$ diviſant $- a^4cc$ donne $+ aacc$ pour le quotient. Le produit de ce quotient par le diviſeur eſt $+ aaccyy - a^4cc - aac^4$, qui étant écrit avec des ſignes contraires, & ajoûté au dividende $- a^4cc - aac^4$, la ſomme eſt $- aaccyy$ ſecond reſte.

Pour la troiſiéme Operation je deſcends $+ aay^4$ du dividende, $- 2a^4yy$ du premier reſte. J'applique le diviſeur, & $- aa$ diviſant $- 2a^4yy$ donne pour quotient $+ 2aayy$. Le produit de ce quotient par le diviſeur eſt $+ 2aay^4 - 2a^4yy - 2aaccyy$, qui étant écrit avec des ſignes contraires, & ajoûté au dividende $+ aay^4 - 2a^4yy + 2aaccyy$, la ſomme eſt $- aay^4 + aaccyy$ que j'écris comme troiſiéme reſte.

Pour la quatriéme Operation à $+ aaccyy$ du troiſiéme reſte je joins $- 2ccy^4$ & c^4yy du premier dividende. J'applique le diviſeur, & $- aa$ diviſant $+ aaccyy$ donne pour quotient $- ccyy$. Le produit de ce quo-

tient par le diviſeur eſt $-cc y^4 + aacc yy + c^4 yy$, que j'écris après en avoir changé les ſignes, c'eſt $+cc y^4 - aacc yy - c^4 yy$, que j'ajoûte à ſon dividende, la ſomme eſt $-cc y^4$ quatriéme reſte.

Pour la cinquiéme Operation à ce reſte $-cc y^4$ l'on joint $+y^6$ du premier dividende & $-aa y^4$ du troiſiéme reſte. On applique le diviſeur, & $-aa$ diviſant $-aa y^4$ donne $+y^4$ pour quotient. Le produit de ce quotient par le diviſeur produit $+y^6 - aa y^4 - cc y^4$, on l'écrit après avoir changé ſes ſignes, on l'ajoûte à ſon dividende, la ſomme eſt 0. Et la diviſion eſt juſte.

Le diviſeur $yy - aa - cc = 0$ eſt donc une racine de la propoſée, ou $yy = aa + cc$, qui a deux valeurs $y = \pm\sqrt{aa + cc}$. Les autres racines ſont contenuës dans le quotient $y^4 - ccyy + 2aayy + aacc + a^4 = 0$, ou $y^4 - ccyy + 2aayy + a^4 = -aacc$: ajoûtez de chaque côté $\frac{1}{4}c^4 - aacc$, vous ferez $y^4 - ccyy + 2aayy + \frac{1}{4}c^4 - aacc + a^4 = \frac{1}{4}c^4 - 2aacc$, dont les racines ſont $yy = \frac{1}{2}cc - aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^4 - 2aacc}$, qui ſe reduiſent à $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}cc - aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - 2aacc}}$.

Ainſi l'équation propoſée, qui a y^6 pour haute puiſſance contient ſix racines.

Dans toutes les racines de ces deux Exemples, l'on n'a que des extractions de racines quarrées à faire ; ces extractions ne demandent que la Regle & le Compas, comme on l'a enſeigné, Liv. 1. Part. 2. Ainſi les Problêmes ſeront plans.

5. La preuve que M. Deſcartes donne de ſa diviſion eſt la multiplication, ce qui convient à toutes ſortes de Methodes : en effet, ſi l'on multiplie le diviſeur par le quotient, le produit doit être le dividende même, lorſque la diviſion a été bien faite. Au reſte je n'ai vû perſonne, qui ait ſuivi cette Methode de M. Deſcartes.

6. Il ne faut pas omettre la remarque de M. Deſcartes touchant le choix des diviſeurs. Il dit que parmi les diviſeurs du dernier terme de l'équation litterale, dont nous venons de parler, il ne faut choiſir que aa & $aa + cc$, & qu'il ſuffit de tenter la diviſion avec ces deux là ; parceque les autres donnent plus ou moins de dimenſions dans le quotient, qu'il n'y en a dans la quantité connuë du penultiéme terme, empêcheroient que la diviſion ne s'y pût faire. Il eſt vrai, que $aa + cc$ diviſant le dernier terme $-a^6 - 2a^4 cc - aac^4$ donne au quotient a^4 égal à la quantité connuë du penultiéme terme $-a^4 yy$, & que ſi l'on diviſoit par a, le quotient ſeroit a^5 plus grand que la quantité connuë a^4, du penultiéme terme ; & que ſi l'on diviſoit $a^3 + acc$, le quotient a^3 ſeroit plus petit que cette même quantité.

Cette remarque n'eſt pourtant pas univerſelle : car dans l'équation $x^4 + ax^3$

$+ aaxx$
$ax^3 \quad - a^4x - a^5 = 0$. Si l'on a $x - aa = 0$, ou $x + aa$
$- a^4xx$
$= 0$ pour diviſeur & qu'on applique $\pm aa$ ſous $- a^5$, le quotient ſera a^4 moindre que la quantité connuë du penultiéme terme $- a^4x$, & cependant la diviſion ſe fera juſte, puiſque les racines de l'équation ſont $x - aa = 0$, $x + aa = 0$, $x + \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x + \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$.

Il en ſeroit de même ſi l'on diſoit dans la Methode ordinaire, que tout diviſeur du dernier terme, qui a plus ou moins de dimenſions que la quantité connuë du ſecond terme, ne doit pas être pris ; puiſqu'ici aa qui diviſe exactement la propoſée, a plus de dimenſions, que la quantité connuë du ſecond terme ax^3.

ARTICLE II.

La reduction des Equations cubiques, lorſque le Problême eſt ſolide.

M. DESCARTES.

MAis lorſqu'on ne trouve aucun binome, qui puiſſe ainſi diviſer toute la ſomme de l'équation propoſée, il eſt certain, que le Problême, qui en dépend, eſt ſolide. Et ce n'eſt pas une moindre faute après cela, de tâcher à le conſtruire, ſans y employer que des cercles & des lignes droites, que ce ſeroit d'employer des Sections coniques à conſtruire ceux, auſquels on n'a beſoin que de cercles. Car enfin tout ce qui témoigne quelque ignorance, s'appelle faute.

Lorſqu'une équation cubique ne peut pas être diviſée par un binome, elle ne peut pas être abaiſſée à une équation du ſecond degré. Lorſqu'une équation n'eſt pas du ſecond degré, ou de celles qu'on peut regarder comme du ſecond degré, je ne puis pas extraire une racine quarrée. Et comme c'eſt pour une telle racine, qu'on employe la Regle & le Compas, je ne m'en puis plus ſervir pour la reſolution de mon Problême, qui deſlors n'eſt pas un Problême plan.

Mais comme une équation cubique ne demande au plus que l'extraction d'une racine cubique, & que les Sections coniques donnent cette extraction ; le Problême ſera ſolide, puiſqu'un Problême ſolide eſt celui pour la conſtruction duquel il ne faut au plus que des Sections coniques. L'on verra Part. 4. Sect. 1. Art. 1 2. comment on extrait la racine cubique par le moyen des Sections coniques.

On a parlé Part. 1. Sect. 2. des lignes, dont il faut se servir pour la construction d'un Problême.

SECTION IV.

ARTICLE I.

La reduction des Equations de quatre dimensions, lorsque le Problême est plan: & quels sont ceux, qui sont solides.

M. DESCARTES.

QUe si on a une équation dont la quantité inconnuë ait quatre dimensions, il faut en même façon, après en avoir ôté les nombres sours, & rompus, s'il y en a, voir si on pourra trouver quelque binome, qui divise toute la somme, en le composant de l'une des quantitez, qui divisent sans fraction le dernier terme. Et si on en trouve un, ou bien la quantité connuë de ce binome est la racine cherchée; ou du moins après cette division, il ne reste en l'équation, que trois dimensions, ensuite dequoi il faut derechef l'examiner en la même sorte.

Mais lorsqu'il ne se trouve point de tel binome, il faut en augmentant ou diminuant la valeur de la racine, ôter le second terme de la somme, en la façon tantôt expliquée. * Et après la reduire à une autre, qui ne contienne que trois dimensions. Ce qui se fait en cette sorte. Au lieu de x^4. * $pxx. qx. r. = o$, il faut écrire

$$+ y^6. \; 2py^4 \; \begin{matrix} + pp \\ \cdot \; 4r \end{matrix} \; yy - qq = o.$$

Et pour les signes + ou — que j'ai omis, s'il y a eu + p en la precedente équation, il faut mettre en celle-ci + $2p$; ou s'il y a eu — p, il faut mettre — $2p$; & au contraire s'il y a eu + r, il faut mettre — $4r$; ou s'il y a eu — r, il faut mettre + $4r$; & soit qu'il y ait eu + q, ou — q, il faut toûjours mettre — qq, & + pp. Au moins si on suppose que x^4, & y^6 sont marquez du signe +; car ce seroit tout le contraire, si on y supposoit le signe —.

* Part 2. Sect. 2. Art. 3.

1. L'équation $x^4. * pxx. qx. r. = o.$ repreſente toute équation de quatre dimenſions, qui n'a ni incommenſurables, ni fractions ; dont le premier terme n'eſt multiplié que par l'unité, le ſecond eſt évanoüi, p repreſente les quantitez connuës, qui multiplient xx au troiſiéme terme, q celles qui multiplient x au quatriéme terme, r celles qui compoſent le dernier terme. Les ſignes + & — ont été omis, parcequ'ils peuvent être indifferemment partout, excepté devant x^4, où l'on ſuppoſe +.

2. Regardons l'équation $x^4 *. pxx. qx. r = o.$ Comme produite par deux autres du ſecond degré $xx + yx^3 + z = o$, $xx - yx + v = o$. On met $+yx$ dans l'une, $-yx$ dans l'autre, afin que le ſecond terme ſoit nul dans le produit de ces deux équations, les ſignes qui ſont devant z & v peuvent être tels que l'on voudra. Ce produit eſt $x^4 * \begin{matrix} + zxx \\ - yyxx \\ + vxx \end{matrix} \begin{matrix} - yzx \\ + vyx \end{matrix} + v\zeta = o.$ que l'on ſuppoſe égal à la propoſée, de ſorte que chaque terme de l'une ſoit égal à chaque terme de l'autre, & que l'on puiſſe comparer & égaler chaque terme de l'une à chaque terme de l'autre.

3. Que la propoſée ſoit $x^4 * + pxx - qx + r = o.$ Comparons les troiſiémes termes, il viendra $z = p + yy - v.$

Les quatriémes, il viendra $v = \frac{-q}{y} + z$; & pour z ſubſtituant ſa valeur déja trouvée, $v = \frac{-q}{2y} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy.$ Et mettant cette valeur de v dans $z = p + yy - v$, l'on fait $z = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y}.$

Les cinquiémes termes $+ vz = + r.$ Pour v & z ſubſtituons leur valeur, ce ſera $\frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}y^4 - \frac{qq}{4yy} = r.$

Multiplions tout par $4yy$, le produit eſt $y^6 + 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ - 4ryy \end{matrix} - qq = o,$ qui eſt la transformée.

On voit qu'il y a dans la propoſée $+ pxx$, & dans la transformée $+ 2py^4$; qu'il y a $+ r$ dans la propoſée, & $- 4ryy$ dans la transformée ; qu'il y a $- qx$ dans la propoſée, & $+ ppyy - qq$ dans la transformée.

4. Que la propoſée ſoit $x^4 * - pxx + qx - r = o.$

La comparaiſon des troiſiémes termes donne $z = - p + yy - v.$

Des quatriémes, $v = \frac{q}{y} + z$ & pour z mettant ſa valeur, il vient $v = \frac{q}{2y} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy$; & mettant cette valeur de v dans $z = - p + yy - v$, l'on fait $z = - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y}.$

Des cinquiémes termes, $+ v\zeta = - r.$ Pour v & z ſubſtituons leur valeur ; c'eſt $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}y^4 - \frac{qq}{4yy} = - r.$ Multiplions tout par $4yy$; le produit eſt $y^6 - 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ + 4ryy \end{matrix} - qq = o$, qui eſt la reduite.

On voit qu'il y a $-pxx$ dans la propoſée, & $-2py^4$ dans la reduite; qu'il y a $-r$ dans la propoſée, & $+4ryy$ dans la reduite; qu'il y a $+qx$ dans la propoſée, & $+ppyy-qq$ dans la reduite.

5. Soit la propoſée $x^4 * -pxx-qx+r=o$. La transformée ſera $y^6 - 2py^4 \begin{matrix} +ppyy \\ -4ryy \end{matrix} -qq=o$.

On voit qu'il y a $-pxx$ dans la propoſée, & $-2py^4$ dans la transformée, qu'il y a $+r$ dans la propoſée, & $-4ryy$ dans la transformée; qu'il y a $-qx$ dans la propoſée, & $+ppyy-qq$ dans la transformée.

6. Quels que ſoient les ſignes de la propoſée $x^4 * pxx . qx . r=o$, pourveu que l'on ait $+x^4$, & que la transformée ait auſſi $+y^6$; on trouvera, ainſi que M. DESCARTES l'aſſure, que s'il y a $+p$ dans la propoſée, il faudra mettre $+2p$ dans la transformée; s'il y a $-p$ dans la propoſée, il faut mettre $-2p$ dans la transformée; s'il y a $+r$ dans la propoſée, il faut mettre $-4r$ dans la transformée; s'il y a $-r$ dans la propoſée, il faut mettre $+4r$ dans la transformée; & que toûjours il faut mettre $-qq+pp$ dans la transformée.

Mais ſi l'on ſuppoſe $-x^4$, il eſt certain que l'équation qui étoit $x^4 * -pxx+qx-r=o$ ſe changera en $-x^4 * +pxx-qx+r=o$; & que la transformée de la premiere aura tous les ſignes changez.

7. J'ai dit n. 2. que l'on pouvoit mettre indifferemment $+$ ou $-z$, $+$ ou $-v$ dans les équations du ſecond degré $xx+yx-z=o$, $xx-yx-v=o$. En effet ſuppoſons les telles, qu'on vient de les écrire, leur produit eſt $x^4 * \begin{matrix} -zxx \\ -vxx \end{matrix} \begin{matrix} +yzx \\ -yyxx \end{matrix} -vyx+vz=o$. Prenons à preſent l'équation de n. 3. $x^4 * +pxx-qx+r=o$. La transformée ſera la même que n. 3.

M. DESCARTES.

Par Exemple ſi on a $+x^4 * -4xx-8x+35=0$, il faut écrire en ſon lieu $y^6-8y^4-124yy-64=0$. Car la quantité que j'ai nommée p étant -4, il faut mettre $-8y^4$ pour $2py^4$, & celle que j'ai nommée r étant 35, il faut mettre $\begin{matrix} +16 \\ -140 \end{matrix} yy$ c'eſt-à-dire $-124yy$; au lieu de $\begin{matrix} +pp \\ -4r \end{matrix} yy$; & enfin q étant 8, il faut mettre -64 pour $-qq$.

Tout de même au lieu de $x^4 * -17xx-20x-6=o$, il faut

écrire $+y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$. Car 34 eſt double de 17, & 313 en eſt le quarré joint au quadruple de 6, & 400 eſt le quarré de 20.

Tout de même auſſi au lieu de $z^4 * {}^{+\frac{1}{2}aazz - a^3}_{-cc} z^{+\frac{5}{16}a^4}_{-acc-\frac{1}{4}aacc} = 0$, il faut écrire $y^6 {}^{+aa}_{-2cc} y^4 {}^{-a^4}_{+c^4} yy {}^{-a^6}_{-aac^4} - 2a^4cc = 0$. Car p eſt $\frac{1}{2}aa - cc$, & pp eſt $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$, & $4r$ eſt $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$, & enfin $-qq$ eſt $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$.

8. La transformée de $x^4 * - 4xx - 8x + 35 = 0$, ou de $x^4 * - pxx - qx + r = 0$ eſt $y^6 - 2py^4 {}^{+ppyy}_{-4ryy} - qq = 0$, ou $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$.

La transformée de $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$, ou de $x^4 * - pxx - qx - r = 0$ eſt $y^6 - 2py^4 {}^{+ppyy}_{+4ryy} - qq = 0$, ou $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$.

Dans l'équation $z^4 {}^{+\frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5}{16}a^4}_{-cczz - accz - \frac{1}{4}aacc} = 0$, il faut ſuppoſer $cc > \frac{5}{4}aa$; donc $aacc > \frac{5}{4}a^4$, $\frac{1}{4}aacc > \frac{5}{16}a^4$; & le dernier terme $+\frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc$ eſt negatif $= -r$, & $r = \frac{1}{4}aacc - \frac{5}{16}a^4$. $+4r = +aacc - \frac{5}{4}a^4$. De plus ſi $cc > \frac{5}{4}aa$, donc $cc > \frac{1}{2}aa$, & le ſecond terme $+\frac{1}{2}aa - cc$ eſt negatif $= -p$, & $p = cc - \frac{1}{2}aa$. L'équation propoſée eſt donc $z^4 * - pzz - qz - r = 0$, dont la transformée eſt $y^6 - 2py^4 {}^{+ppyy}_{+4ryy} - qq = 0$, c'eſt-à-dire $y^6 {}^{+aay^4 - a^4yy}_{-2ccy^4 + c^4yy} - a^6 - 2a^4cc = 0$. Car $+pp + 4r = \frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4 + aacc - \frac{5}{4}a^4 - aac^4 = -a^4 + c^4$.

M. DESCARTES.

Après que l'équation eſt ainſi reduite à trois dimenſions, il faut chercher la valeur de yy par la Methode déja expliquée;

& ſi elle ne peut être trouvée, on n'a point beſoin de paſſer outre, car il ſuit de là infailliblement que le Problême eſt ſolide. Mais ſi on la trouve, on peut diviſer par ſon moyen la precedente équation en deux autres, en chacune deſquelles la quantité inconnuë n'aura que deux dimenſions, & dont les racines ſeront les mêmes que les ſiennes. A ſavoir au lieu de $x^4 * . pxx . qx . r . = 0$, il faut écrire ces deux autres $+ xx - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} = 0$, & $xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} = 0$. Et pour les ſignes + & — que j'ai omis, s'il y a $+ p$ en l'équation precedente, il faut mettre $+ \frac{1}{2}p$ en chacune de celles-ci, & $- \frac{1}{2}p$ s'il y a en l'autre $- p$. Mais il faut mettre $+ \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $- yx$; & $- \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+ yx$, lorſqu'il y a $+ q$ en la premiere. Et au contraire s'il y a $- q$, il faut mettre $\frac{-q}{2y}$ en celle où il y a $- yx$; & $+ \frac{q}{2y}$ en celle où il y a $+ yx$. Enſuite dequoi il eſt aiſé de connoître toutes les racines de l'équation propoſée, & par conſequent de conſtruire le Problême; dont elle contient la ſolution, ſans y employer que des cercles, & des lignes droites.

9. Nous avons dit n. 2. que l'équation du quatriéme degré $x^4 * + zxx - yzx - yyxx + vz = 0$, qui eſt le produit des deux équations du ſecond degré $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + v = 0$, étoit tellement égale à la propoſée $x^4 * . pxx . qx . r = 0$, que l'on pouvoit les égaler terme à terme, de la maniere qu'on l'a fait, n. 3. 4. 5. Dans la transformée $y^6 . 2py^4 + ppyy . 4ryy + zxx - yzx - vyx + vxx - qq$, qui en reſulte, la valeur de y eſt la même que dans $x^4 * - yyxx + vz = 0$, & la même par conſequent que dans les équations $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + v = 0$. C'eſt pourquoi ſi je puis connoître la valeur de y dans la transformée, j'aurai les valeurs de v & de z, qui ne contiennent n. 3. 4. 5. d'autre inconnuë que y; & dès que j'aurai ſubſtitué ces valeurs de z & de v dans $xx + yx +$

$z = o$, $xx - yx + v = o$. Ces équations n'auront plus d'inconnuë que x; & parcequ'elles ſont du ſecond degré, l'on découvrira la valeur de x avec la Regle & le Compas Liv. 1. Part. 2. & le Problême eſt plan.

10. De là M. DESCARTES conclud, que ſi je ne puis pas trouver la valeur de y dans la transformée $y^6. \begin{matrix} +ppyy \\ \cdot 4ryy \end{matrix} - qq = o$ par la Methode de Sect. 3. le Problême eſt ſolide. Et alors on revient à l'équation propoſée $x^4 *. pxx. qx. r = o$, que l'on conſtruit, comme on l'enſeignera, Part. 4. Sect. 1. Art. 2.

11. Mais ſi la transformée fait connoître l'inconnuë y, l'on n'a plus beſoin de s'arrêter à la propoſée $x^4 *. pxx. qx. r = o$. Mais aux deux $xx + yx + z = o$, $xx - yx + v = o$, qui ſont les racines de l'équation $x^4 * - yyxx \begin{matrix} +zxx \\ -yzx \\ +vyx \\ +vxx \end{matrix} + vz$, qui eſt ſuppoſée égale à $x^4 *. pxx$ $qx. r = o$, c'eſt-à-dire qu'il faut conſiderer les deux racines de cette propoſée, qui ſe changent en ces deux $xx - yx + \frac{1}{2}yy. \frac{1}{2}p. \frac{q}{2y} = o$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy. \frac{1}{2}p. \frac{q}{2y} = o$. Ce qui ſe fait, comme on va le montrer, en ſubſtituant pour z & v leur valeur.

La propoſée eſt n. 3. $x^4 * + pxx - qx + r = o$, $v = \frac{-q}{2y} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy$, $z = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y}$. Subſtituez ces valeurs de z & de v à leur place dans $xx - yx + v = o$, $xx + yx + z = o$, vous aurez $xx - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \frac{-q}{2y}$, $xx + xy + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$. L'on doit obſerver qu'il y a $+p$ dans la propoſée, & $+\frac{1}{2}p$ dans chacune de ces deux reduites; qu'il y a $-q$ dans la propoſée, $\frac{-q}{2y}$ dans celle, où il y a $-xy$, & $\frac{+q}{2y}$ dans celle où il y a $+xy$; qu'il y a $+\frac{1}{2}yy$ dans les deux.

La propoſée eſt n. 4. $x^4 * - pxx + qx - r = o$, $v = \frac{q}{2y} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy$, $z = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y}$. Subſtituez ces valeurs de v & de z dans $xx - yx + v = o$, $xx + yx + z = o$. Vous aurez $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p \frac{-q}{2y}$. L'on obſervera qu'il y a $-p$ dans la propoſée, & $-\frac{1}{2}p$ dans chacune des deux reduites; qu'il y a $+q$ dans la propoſée, & qu'il y a $\frac{+q}{2y}$ dans celle qui a $-xy$, & $-\frac{q}{2y}$ dans celle qui a $+xy$; qu'il y a $+\frac{1}{2}yy$ dans chacune.

Quelqu'autre propoſée que l'on examine, l'on trouvera qu'il faut placer les ſignes + & −, comme M. Deſcartes l'a determiné.

12. Après avoir formé ces deux reduites, on les égale à zero, & l'on en extrait les racines quarrées. Par exemple ſi l'on a 1° $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = o$; $x = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{-\frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}p \frac{-q}{2y}}$. Si l'on a 2° $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = o$; $x = -\frac{1}{2}y \pm \sqrt{-\frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}}$. Et par ce

moyen l'on a les quatre valeurs de x, non ſeulement dans ces deux dernieres reduites, mais dans la propoſée x^4, &c. c'eſt ce que M. Deſcartes va prouver par des Exemples.

M. DESCARTES.

Par exemple à cauſe que faiſant $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$, pour $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$, on trouve que yy eſt 16, on doit au lieu de cette équation $+x^4 - 17xx - 20x - 6 = 0$, écrire ces deux autres $+xx - 4x - 3 = 0$, & $xx + 4x + 2 = 0$. Car y eſt 4, $\frac{1}{2}y$ eſt 8, p eſt 17, & q eſt 20, de façon que $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait $- 3$, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait $+ 2$. Et tirant les racines de ces deux équations, on trouve toutes les mêmes, que ſi on les tiroit de celle, où eſt x^4; à ſçavoir on en trouve une vraye, qui eſt $\sqrt{7} + 2$, & trois fauſſes, qui ſont $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.

13. Diviſez $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$ par $yy - 16 = 0$, la diviſion eſt juſte, & le quotient eſt $y^4 - 18yy + 25 = 0$.

L'équation $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$, ou $x^4 * - pxx - qx - r = 0$ demande les reduites $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$, dans leſquelles on met $- \frac{1}{2}p$, parceque dans la propoſée il y a $- pxx$ ou $- 17xx$; on met $\mp\frac{q}{2y}$ dans celle où il y a $- yx$, & $+ \frac{q}{2y}$ dans celle où il y a $+ yx$, parceque dans la propoſée il y $- q$ ou $- 6$.

Etant donc $yy - 16 = 0$, $y = 4$, $\frac{1}{2}yy = 8$, $p = 17$, $q = 20$, $\frac{q}{2y} = \frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = -3$; $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 2$; l'équation $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$ eſt $xx - 4x - 3 = 0$; $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$ eſt $xx + 4x + 2 = 0$.

Extrayez les racines de $xx - 4x - 3 = 0$, elles ſont $x = 2 + \sqrt{7}$ racine vraye, $x = 2 - \sqrt{7}$ racine fauſſe; extrayez les racines de $xx + 4x + 2 = 0$, elles ſont $x = -2 + \sqrt{2}$, $x = -2 - \sqrt{2}$ toutes deux fauſſes.

Ces trois racines fauſſes ſont exprimées d'une maniere poſitive dans le Livre de M. Deſcartes. $2 - \sqrt{7}$ eſt exprimée $-2 + \sqrt{7}$, ou $\sqrt{7} - 2$, comme en cette équation $x - 2 + \sqrt{7} = 0$; $-2 + \sqrt{2}$ eſt exprimée $+2 - \sqrt{2}$, comme ſi c'étoit $x + 2 - \sqrt{2} = 0$; $-2 - \sqrt{2}$ eſt exprimée $+2 + \sqrt{2}$, comme ſi c'étoit $x + 2 + \sqrt{2} = 0$.

14. Ces quatre racines ſont les mêmes, qu'on tireroit de la propoſée $x^4 * - 17xx - 20x - 6 = 0$. Puiſque en les multipliant on produit la propoſée & qu'en diviſant la propoſée, 1° par la racine vraye, 2° par deux fauſſes

fauſſes l'une après l'autre, il ne reſte rien que la derniere racine fauſſe $x + 2 + \sqrt{2} = 0$.

15. Nous avons dit n. 13. que la diviſion de $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 = 0$ par $yy - 16 = 0$ donne le quotient $y^4 - 18yy + 25 = 0$, donc $yy = 9 \pm \sqrt{56}$; $y = \pm\sqrt{9 \pm \sqrt{56}}$. Si l'on met ces valeurs de yy & de y dans les deux équations $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$; on aura d'autres valeurs de x, par exemple la premiere $xx - x\sqrt{9 + \sqrt{56}} = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{56} + \frac{10}{\sqrt{9 + \sqrt{56}}}$ en ajoûtant dans chaque membre $\frac{9}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{56}$, donne $x = \frac{1}{2}\sqrt{9 + \sqrt{56}} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{56} + \frac{10}{\sqrt{9 + \sqrt{56}}}}$.

M. DESCARTES.

Ainſi ayant $x^4 * - 4xx - 8x + 35 = 0$, pourceque la racine de $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$ eſt derechef 16, il faut écrire $xx - 4x + 5 = 0$, & $xx + 4x + 7 = 0$. Car ici $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ fait 5, & $+ \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ fait 7. Et pourcequ'on ne trouve aucune racine ni vraye ni fauſſe en ces deux dernieres équations; on connoît de là, que les quatre de l'équation, dont elles procedent, ſont imaginaires; & que le Problême pour lequel on l'a trouvée, eſt plan de ſa nature; mais qu'il ne ſauroit en aucune façon être conſtruit, à cauſe que les quantitez données ne peuvent ſe joindre.

16. L'on a vû n. 8. que la transformée de $x^4 * - 4xx - 8x + 35 = 0$ ou de $x^4 * - pxx - qx + r = 0$ eſt $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, qui peut être diviſée juſte par $yy - 16 = 0$, & le quotient eſt $y^4 + 8yy + 4 = 0$.

Les deux équations du ſecond degré ſeront $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$; dans chacune il y a $-\frac{1}{2}p$, parceque dans la propoſée il y a $-p$; dans celle, où il y a $-yx$, l'on a mis $\mp\frac{q}{2y}$, & $\pm\frac{q}{2y}$ dans celle, où il y a $+yx$, parceque dans la propoſée il y a $-qx$.

Après qu'on aura ſubſtitué 16 pour yy, 4 pour y, ces deux équations ſe reduiſent à $xx - 4x + 5 = 0$; $xx + 4x + 7 = 0$. Or les deux racines de $xx - 4x + 5 = 0$ ſont $x = -2 \pm \sqrt{-1}$, & les deux de $xx + 4x + 7 = 0$ ſont $x = -2 \pm \sqrt{-3}$, toutes quatre imaginaires.

Les racines du quotient $y^4 + 8yy + 4 = 0$. ſont $yy = -4 \pm \sqrt{12}$; $y = \pm\sqrt{-4 \pm \sqrt{12}}$, qui ſont auſſi toutes imaginaires.

M. DESCARTES.

Tout de même ayant $z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} zz \quad z = 0$, pourcequ'on trouve $aa+cc$ pour yy, il faut écrire $zz - \sqrt{aa+cc}\, z + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, & $zz + \sqrt{aa+cc}\, z + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$. Car y eſt $\sqrt{aa+cc}$, & $\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ eſt $\frac{1}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ eſt $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. D'où on connoît que la valeur de z eſt $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, ou bien $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Et pourceque nous avions fait ci-deſſus $z + \frac{1}{2}a = x$, nous aprenons que la quantité x, pour la connoiſſance de laquelle nous avons fait toutes ces Operations eſt $+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}}$.

17. On a vû n. 8. que la transformée de $z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \\ -a^6 \end{matrix} \begin{matrix} zz - a^3 z \\ -acc \\ +\frac{1}{16}a^4 \end{matrix} = 0$ eſt $y^6 \begin{matrix} +aay^4 - a^4yy \\ -2ccy^4 + c^4yy \\ -aac^4 \end{matrix} \begin{matrix} -2a^4cc = 0. \text{ \& Sect.} \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix}$ 3. Art. 1. n. 4. qu'une des racines de cette transformée eſt $yy - aa - cc = 0$, $yy = aa + cc$, $y = \pm\sqrt{aa+cc}$.

Comme la propoſée peut s'exprimer par $z^4 * - pzz - qz - r = 0$, les deux équations du ſecond degré ſeront $zz - yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$; ou la premiere $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$; la ſeconde $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$. Et parceque ſi l'on multiplie, ou ſi l'on diviſe le numerateur & le denominateur d'une fraction par une même quantité, la valeur de la fraction ne change pas, je multiplie le numerateur & le denominateur de $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ par $\sqrt{aa+cc}$, le produit eſt $\frac{a^3\sqrt{aa+cc} + acc\sqrt{aa+cc}}{2aa + 2cc}$; je diviſe le numerateur & le denominateur de ce produit par $aa+cc$, le quotient eſt $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, que je mets à la place de $\frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$ dans les

deux équations precedentes, ce qui fait $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$.

18. Maintenant pour avoir les valeurs de z, j'arrange la premiere équation ainſi $zz - z\sqrt{aa+cc} = -\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, & je trouve $z = \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, qui ſont les deux valeurs de z, que M. Deſcartes donne.

De l'autre équation $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$, je tirerai de la même maniere $z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, deux autres valeurs de z.

19. Enfin parceque Part. 2. Sect. 2. Art. 3. l'on a fait $z + \frac{1}{2}a = x$, $z = x - \frac{1}{2}a$ je ſubſtituë la valeur de z à ſa place, après avoir changé $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ en $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$. Ce qui fait ces quatre valeurs de x.

$$z = x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$
$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$
$$z = x - \tfrac{1}{2}a = -\sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$
$$x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

Celle dont M. Deſcartes ſe ſervira eſt la ſeconde, à ſavoir $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Les deux premieres racines ſont toûjours réelles parceque dans $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$ eſt $>$ que $\frac{1}{2}aa$; en effet le quarré $\frac{1}{16}c^4 + \frac{1}{4}acc\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}aacc > \frac{1}{4}a^4$.

Afin que les deux dernieres racines ſoient réelles, il faut que $cc > 8aa$, $c > \sqrt{8aa}$. Car l'on a $\sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, ainſi il faut que $\frac{1}{4}cc > \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, $cc - 2aa > 2a\sqrt{aa+cc}$, & en les quarrant $c^4 > 8aacc$, $cc > 8aa$. Mais lorſque cc ſera moindre que $8aa$, ce qui eſt ſous le ſigne radical, deviendra negatif, & la racine ſera imaginaire. Lorſque $cc = 8aa$, ce qui eſt ſous le ſigne radical, ſera nul, & les deux dernieres racines ſe reduiront à $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$.

De plus quand ces quatre valeurs de x ſont réelles, la premiere eſt évidemment poſitive, puiſque tous les termes ont $+$. La ſeconde eſt auſſi poſitive, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} > \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; ce qui ſe voit en quarrant les deux membres; la troiſiéme eſt fauſſe, ce qui ſe prouve de la même maniere. La quatriéme eſt encore fauſſe parceque les deux termes qui ont le ſigne $-$ ſont plus grands que $\frac{1}{2}a$.

ARTICLE II.

Exemple de ces ſortes de Reductions.

M. DESCARTES.

MAis afin qu'on puiſſe mieux connoître l'utilité de cette Regle, il faut que je l'applique à quelque Problême.

Si le quarré AD, & la ligne BN étant donnez, il faut prolonger le côté AC juſques à E, en ſorte que EF tirée de E vers B ſoit égale à BN. On apprend de Pappus, qu'ayant premierement prolongé BD juſques à G, en ſorte que DG ſoit égale à DN, & ayant décrit un cercle dont le diametre ſoit BG, ſi on prolonge la ligne droite AC, elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E, qu'on demandoit. Mais pour ceux qui ne ſauroient point cette conſtruction, elle ſeroit aſſez difficile à rencontrer, & en la cherchant par la Methode ici propoſée, ils ne s'aviſeroient jamais de prendre DG pour la quantité inconnuë, mais plûtôt CF ou FD, à cauſe que ce ſont elles, qui conduiſent le plus aiſément à l'équation : & lors ils en trouveroient une, qui ne ſeroit pas facile à démêler, ſans la Regle que je viens d'expliquer. Car poſant a pour BD ou CD, & c pour EF, & x pour DF, on a $CF = a - x$; & comme CF ou $a - x$, eſt à FE ou c, ainſi FD ou x, eſt à BF, qui par conſequent eſt $\frac{cx}{a-x}$. Puis à cauſe du triangle rectangle BDF, dont les côtez ſont l'un x, & l'autre a, leurs quarrez qui ſont $xx + aa$ ſont égaux à celui de la baſe qui eſt $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$, de façon que multipliant le tout par $xx - 2ax + aa$, on trouve que l'équation eſt $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = ccxx$, ou bien $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$. Et on connoît par les Regles precedentes, que ſa racine, qui eſt la longueur de la ligne DF, eſt $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

FIG. 218.

Que ſi on poſoit BF, ou CE, ou BE par la quantité inconnuë, on viendroit derechef à une équation, en laquelle il y auroit quatre

dimenſions, mais qui ſeroit plus aiſée à demêler, & on y viendroit aſſez aiſément ; au lieu que ſi c'étoit DG qu'on ſuppoſât, on viendroit beaucoup plus difficilement à l'équation, mais auſſi elle ſeroit très-ſimple. Ce que je mets ici pour vous avertir, que lorſque le Problême propoſé n'eſt point ſolide, ſi en le cherchant par un chemin on vient à une équation fort compoſée, on peut ordinairement venir à une plus ſimple, en le cherchant par un autre.

§. 1. *Lorſque* DF *eſt l'inconnuë.*

1. Les triangles CEF, BFD ſont équiangles, donc $CF, a - x : EF, c :: FD, x : BF, \frac{cx}{a-x}$.

De plus le triangle BDF rectangle en D donne $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$, c'eſt-à-dire $\frac{ccxx}{aa-2ax+xx} = aa + xx$; $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x - ccxx + a^4 = 0$.

2. Pour reſoudre cette équation. 1°. L'on en a fait évanoüir le ſecond terme, Part. 2. Sect. 2. Art. 3. en prenant $x - \frac{1}{2}a = z$, la reduite a été $z^4 + \frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5}{16}a^4 - cczz - acc z - \frac{1}{4}aacc = 0$, à la place de laquelle on a ſubſtitué ; Part. 3. Sect. 4. Art. 1. n. 8. cette transformée $y^6 + aay^4 - a^6 - 2ccy^4 - a^4yy - 2a^4cc = 0$. L'on avoit trouvé un peu auparavant, Sect. 3. $+ c^4yy - aac^4$ Art. 1. n. 4. que cette transformée ſe diviſoit ſans fraction par $yy - aa - cc = 0$.

Enſuite Sect. 4. Art. 1. n. 17. & 18. les valeurs de z ont été déterminées $z = \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, & n. 19. les valeurs de x ſont $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

3. Fig. 229. Soit AB, $a = 4$; BN, $c = 5$; cc, 25 ſera moindre que $8aa$, 128. Fig. 229.

Les deux dernieres valeurs de x ſont imaginaires, car $\sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}} = \sqrt{-\frac{7}{4} - 2\sqrt{41}}$.

La premiere racine vraye $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ se construit ainsi. Prenez $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} = 2 + \sqrt{\frac{41}{4}}$; ajoûtez $Kf = \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}} = \sqrt{-\frac{7}{4} + 2\sqrt{41}}$; joignez Bf; la ligne Df est x, & la droite fe est égale à BN, c; mais elle ne resout pas le Problême parfaitement, puisqu'on demande, que la ligne FE qui doit être égale à BN coupe le côté DC du quarré donné entre D & C, & le côté AC prolongé. Ainsi l'on voit, comme on l'a dit, Sect. 3. Art. 1. n. 3. que la premiere racine, qui se presente, n'est pas toûjours la racine cherchée.

La racine dont M. DESCARTES se sert est la seconde vraye, $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, qui donne la construction parfaite du Problême. Car si de $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$ vous soustrayez $KF = \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, il restera DF. Menez par les points B, F la ligne BFE, FE est la ligne cherchée égale à BN, c.

5. Soit $cc = 8aa$, substituez $8aa$ pour cc dans les valeurs de x, vous aurez la premiere valeur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{9}{4}a^4}}} = 2a + \sqrt{3aa}$; la seconde $x = 2a - \sqrt{3aa}$; la troisiéme & la quatriéme $x = -a$.

FIG. 230. On construira la premiere racine $x = 2a + \sqrt{3aa}$, Fig. 230. en prenant $DK = 2a$, & en ajoûtant $Kf = \sqrt{3aa}$, & Df sera $2a + \sqrt{3aa} = x$. L'on joindra Bf, & fe sera égale à BN, c.

La seconde $x = 2a - \sqrt{3aa}$ se construira en retranchant $KF = \sqrt{3aa}$ de $DK = 2a$; le reste DF est $2a - \sqrt{3aa} = x$; l'on tirera par B & F la ligne BFE, & FE sera égale à BN, $c = \sqrt{8aa}$.

Pour la troisiéme & quatriéme racine $x = -a$, $-x = a$, prenez de l'autre côté de D, la ligne $DP = a = -x$; la ligne PBL est égale à BN, & c'est la double ligne $c = \sqrt{8aa}$, qui répond à la double racine égale DP, $-x$; aussi la ligne PBL est un *Minima*, comme on le prouvera n. 7.

5. Soit Fig. 231. bN, $c = 3a$, & par consequent $cc > 8aa$. Les quatre valeurs de x, sont $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{7}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}}$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}}$. Les deux dernieres valeurs sont réelles, car FIG. 231. $\frac{7}{4}aa > \sqrt{\frac{1}{2}a^4}$. Elles sont fausses, parceque dans la premiere $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa} > + \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}$. Mais la quantité $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa}$ qui est plus grande que $+ \sqrt{\frac{7}{4}aa - \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}$, est negative; car $\frac{1}{2}a < \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, leurs quarrez étant $\frac{1}{4}aa < \frac{1}{2}aa$: la premiere de ces deux dernieres valeurs de x est donc fausse. La seconde l'est à plus forte raison.

Pour construire la premiere racine vous prendrez $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, &

Digitized by Google

$Kf = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}$; & Df ſera $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}} = x$; joignez Bf, fe eſt égale à bN, *c.*

La ſeconde ſe conſtruit en ſouſtrayant $KF = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}$ de $DK = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa}$; & DF ſera $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}} = x$. Tirez BFE, FE eſt égale à bN, *c.*

La troiſiéme ſe doit conſtruire en prenant au deſſous de BD, la quantité $DK = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, dont on retranchera $KP = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}$; & DP ſera $\sqrt{\frac{1}{2}aa} - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}} = -x$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}}$. Par les points P, B menez PBH, elle eſt égale à bN, *c.*

Pour conſtruire la quatriéme vous couperez encore $DK = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, à quoi vous ajoûterez $KG = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \sqrt{\frac{1}{2}aa}}$; de DG vous ôterez $Gp = \frac{1}{2}a$; & Dp ſera $\sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \sqrt{\frac{1}{2}aa}} - \frac{1}{2}a = -x$, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \sqrt{\frac{1}{2}a^4}}}$. Par les points p, B tirez pBh, elle eſt égale à bN, *c.*

6. Dans tous les cas, qu'on vient d'examiner le ſeul point F & la ſeule ligne FE reſolvent parfaitement le Problême ; les autres lignes, quoique égales à la donnée BN ou bN n'en donnent la ſolution qu'en y mettant quelque changement ; puiſque le Problême demande une ligne qui ſoit égale à BN & qui coupe le côté AC prolongé du côté de E, & le côté CD entre les points C & D.

Afin que toutes les lignes qu'on a tirées égales à la donnée BN ſatisfiſſent au Problême, il faudroit le propoſer ainſi. Etant donné le quarré $ABCD$, & les côtez AC, CD étant prolongez, trouver toutes les lignes, qui 1° ſoient tirées par le point B, qui 2° coupent les côtez AC, CD, & dont 3° la partie compriſe entre ces deux côtez ſoit égale à une donnée BN.

Lorſque $cc < 8aa$ n. 3. Fig. 229. les deux lignes FE, fe reſoudroient le Problême. Lorſque $cc = 8aa$ n. 4. Fig. 230. les trois lignes FE, fe PL le reſoudroient. Lorſque $cc > 8aa$ n. 5. Fig. 231. Ce ſeroient les quatre lignes FE, fe, PH, ph qui ſatisferoient à la queſtion.

7. On peut concevoir Fig. 229. une infinité de lignes MH, mh, qui ſont toutes deux égales entr'elles, & dont l'une a le point M au deſſus de P, l'autre le point m au deſſous. A meſure que les points M, m approchent plus du point P, juſqu'à ce qu'enfin ces points M, m tombent ſur P, & que ces deux lignes égales n'en faſſent plus qu'une PL. Je dis que ſi les côtez du quarré $ABDC$ ſont chacun a, & que PL ſoit $\sqrt{8aa}$. La ligne PL eſt la plus petite des lignes qu'on puiſſe tirer par le point B, & qui ſe terminent aux deux côtez prolongez CD, CA.

Etant $PL, c = \sqrt{8aa}$, ou $cc = 8aa$, ſi l'on ſubſtituë cette valeur de cc en ſa place dans $x^4 - 2ax^3 \overset{+\,2aaxx}{\underset{-\,ccxx}{}} - 2a^3x + a^4 = 0$, l'on ſera $x^4 - 2ax^3 - 6aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$. Et parcequ'on ſuppoſe dans cette équation deux racines égales, on en comparera chaque terme, autant qu'il ſera neceſſaire, avec chaque terme de $x^4 \overset{-\,2ex^3}{\underset{+\,eexx + eefx}{+\,fx^3}} + eegg = 0$. Suivant Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 2. & 3.

Les ſeconds termes $-2ex^3 + fx^3 = -2ax^3$; $f = -2a + 2e$.

Les derniers termes $+eegg = +a^4$; $gg = \frac{a^4}{ee}$.

Les quatriémes termes $+eefx - 2eggx = -2a^3x$; où l'on ſubſtituë les valeurs de gg & de f déja trouvées, après avoir diviſé par x, & il vient $-2aee + 2e^3 - \frac{2a^4}{e} = -2a^3$; diviſez par 2, pour e ſubſtituez x; c'eſt $-axx + x^3 - \frac{a^4}{x} = -a^3$, d'où l'on tire $x^4 - ax^3 + a^3x - a^4 = 0$.

Cette équation ſe diviſe exactement par $x - a = 0$; le quotient eſt $x^3 + a^3 = 0$; qui ſe diviſe encore exactement par $x + a = 0$; le quotient eſt $xx - ax + aa$, dont les deux racines imaginaires ſont $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{3}{4}aa}$.

La racine fauſſe $x + a = 0$, $-x = a$, montre qu'il faut prendre DP, $-x = a$, & par les points P, B mener $PBL = \sqrt{8aa}$, qui eſt la plus courte des lignes qu'on puiſſe tirer par le point B, de telle ſorte qu'elle ſoit terminée aux côtez CA, CD prolongez. CP ſera donc $CD + DP = 2a$; CL ſera auſſi $2a$: car à cauſe de l'angle droit C, $\overline{CL}^2 = \overline{PL}^2 - \overline{PC}^2 = 8aa - 4aa = 4aa$; & $CL = 2a$.

La racine vraye $x - a = 0$, $x = a$, fait voir qu'il faut prendre DC, $+x = a$, & par les points B, C mener BC, qui ſera encore la plus courte ligne qu'on puiſſe tirer par le point B, de ſorte qu'elle coupe encore les deux côtez CD, CA. Mais cette plus petite n'eſt pas $\sqrt{8aa}$, mais ſeulement $\sqrt{2aa}$; car $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$, $aa + aa = 2aa$.

§. II. *Lorſque* BF *eſt l'inconnuë.*

Fig. 228. 1. Soit BF l'inconnuë x; chaque côté du quarré a; EF, c; $EB, c + x$.

Dans

Dans les triangles EAB, BDF équiangles : EB, $c+x$: BA, a :: BF, x : FD, $\frac{ax}{c+x}$; & $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$, $xx = aa + \frac{aaxx}{cc+2cx+xx}$;

donc $x^4 + 2cx^3 \overset{-2aaxx}{+ ccxx} - 2aacx - aacc = 0$, qui ne peut être divisée juste par aucun binome, tel que le demande la Section troisiéme : c'est pourquoi pour faire évanoüir le second terme, nous prendrons $x + \frac{1}{2}c = y$, $y - \frac{1}{2}c = x$.

La reduite est $y^4 * \overset{-2aayy}{*} \overset{+\frac{1}{16}c^4}{-\frac{1}{2}ccyy} \overset{*}{-\frac{3}{2}aacc} = 0$, qui est une équation quarrée. C'est pour cette raison que M. DESCARTES a dit, que lorsqu'on prenoit BF pour l'inconnuë, l'équation où l'on arrivoit étoit plus aisée à démêler.

Ses racines sont $yy = aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}$, qui se reduisent à $y = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$, $y = -\sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$. Pour y substituez sa valeur $x + \frac{1}{2}c$, vous formerez ces quatre valeurs de x.

$$1^e\ x = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}},$$
$$2^e\ x = -\tfrac{1}{2}c - \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}},$$
$$3^e\ x = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}},$$
$$4^e\ x = -\tfrac{1}{2}c - \sqrt{aa + \tfrac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}},$$

2. La premiere est réelle & vraye, la seconde est réelle & fausse ; afin que les deux autres soient réelles, il faut que cc ne soit pas moindre que $8aa$, car il faut que sous le signe radical $aa + \frac{1}{4}cc$ ne soit pas moindre que $\sqrt{a^4 + aacc}$, & qu'en quarrant tout $a^4 + \frac{1}{2}aacc + \frac{1}{16}c^4$ ne soit pas moindre que $a^4 + aacc$, $\frac{1}{16}c^4$ que $\frac{1}{2}aacc$, cc que $8aa$.

Lorsque $cc > 8aa$, la troisiéme valeur de x est fausse, la quatriéme est fausse. Mais si $cc = 8aa$, l'on a $\sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}} = \sqrt{3aa - \sqrt{9a^4}} = \sqrt{3aa - 3aa} = 0$, & les valeurs dernieres de x sont $-\frac{1}{2}c$. Ces deux mêmes valeurs sont imaginaires, lorsque $cc < 8aa$.

3. La quantité x est la ligne comprise entre le point B, & le côté CD. Ainsi étant $cc < 8aa$, & les deux dernieres valeurs de x imaginaires ; Fig. 229. la premiere valeur de $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$, est BF, la seconde $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$, ou $-x = \frac{1}{2}c + \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$ est Bf, les $+x$ se prennent sur DC determinée, les $-x$ ailleurs.

Etant $cc = 8aa$; Fig. 230. la premiere valeur est BF ; la seconde Bf ; les deux autres, qui sont $-x = \frac{1}{2}c$, s'expriment par BP.

Etant $cc > 8aa$; Fig. 231. la premiere valeur de x eſt BF ; la ſeconde Bf ; la troiſiéme BP, la quatriéme Bp : ce que le calcul fait connoître. Car ſi l'on fait $Bf, -x$, l'on trouvera dans les triangles AeB, fBD la même équation que n. 1. Cela arrivera dans les triangles ABH. PBD, en faiſant $BP, -x$; PH, c ; & dans les triangles ABh, pBD, en faiſant $Bp, -x$; ph, c.

§. III. *Lorſque* CE *eſt l'inconnuë.*

Fig. 228. 1. Soit Fig. 228. CE l'inconnuë x ; $EA, x+a$. Dans les triangles ſemblables EAB, ECF ; $EA, x+a :: AB, a :: EC, x : CF, \frac{xa}{x+a}$. Et dans le triangle rectangle ECF, $\overline{EF}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2$, $cc = xx + \frac{aaxx}{xx+2ax+aa}$, d'où l'on tire $x^4 + 2ax^3 + 2aaxx - 2accx - aacc - ccxx = 0$, qui ne ſe peut diviſer juſte par aucun binome, on en fait évanoüir le ſecond terme, en prenant $x + \frac{1}{2}a = z$, $z - \frac{1}{2}a = x$. La reduite eſt la même, que celle de Sect. 4. Art. 1. n. 17. Ainſi les racines ſeront les mêmes. Pour z ſubſtituant ſa valeur $x + \frac{1}{2}a$;

L'on fait $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

2. Les deux premieres valeurs ſont réelles, l'on jugera des deux dernieres comme n. 3. 4. 5. La premiere racine eſt vraye, les trois autres ſont fauſſes.

Fig. 229. la premiere eſt CE ; la ſeconde Ce ; les deux autres ſont imaginaires.

Fig. 230. la premiere eſt CE ; la ſeconde Ce ; la troiſiéme & la quatriéme $CL, -x = 2a$.

Fig. 231. la premiere eſt CE ; la ſeconde Ce ; la troiſiéme Ch ; la quatriéme CH.

3. Je ne vois pas que l'équation ſoit plus aiſée à démêler, que celle de §. 1.

§. IV. *Lorſque* BE *eſt l'inconnuë.*

1. Soit Fig. 228. BE l'inconnuë x, BF ſera $BE - FE$, $x - c$, & dans les triangles équiangles BEA, BFD, EB ; $x : BA, a :: BF, x - c : FD, \frac{ax-ac}{x}$ Et dans le triangle rectangle BDF, $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$ $xx - 2cx + cc = aa + \frac{aaxx-2aacx+aacc}{xx}$; $x^4 - 2cx^3 - 2aaxx + 2aacx - aacc = 0$; qui ne peut être diviſée juſte par $+ ccxx$

aucun binome. Vous en ferez disparoître le second terme, en prenant $x - \frac{1}{2}c = y$, $y + \frac{1}{2}c = x$.

La reduite est $y^4 * - 2aayy * + \frac{1}{16}c^4 = o$, même reduite, que celle de §. II. Ainsi ses racines seront les mêmes, $y = \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$, $y = -\sqrt{aa + \frac{1}{4}cc \pm \sqrt{a^4 + aacc}}$. A la place de y mettez sa valeur $x - \frac{1}{2}c$. Vous ferez $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc + \sqrt{a^4 + aacc}}$, $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{aa + \frac{1}{4}cc - \sqrt{a^4 + aacc}}$.

2. Les deux dernieres valeurs sont réelles dans les cas marquez §. II. n. 2. Car pour les deux premieres elles sont toûjours réelles. La premiere, la troisiéme, la quatriéme, sont positives; la seconde est negative.

La premiere positive est BE, comme le calcul vient de le prouver.

La seconde negative est Be, comme on le démontrera, en prenant Be, $-x$; ef, c; dans les triangles BeA, BfD.

La troisiéme positive est BH, que l'on fait $= x$, $HP = c$, dans les triangles BHA, BPD.

La quatriéme positive est Bh, que l'on pose $= x$, $hp = c$, dans les triangles BhA, BpD. Fig. 231.

La quantité $\pm x$ est toûjours prise entre le point B, & la ligne AC.

3. L'équation est ici plus aisée à démêler que §. I.

§. V. *Lorsque* DG *est l'inconnuë.*

1. Cette resolution fera voir, que lorsque le Problême proposé n'est point solide; si en le cherchant par un chemin, on vient à une équation fort composée, on peut ordinairement venir à une plus simple en le cherchant par un autre. Jusqu'à present l'on a eu des équations du quatriéme degré; maintenant on en aura une du second. Mais comme cette équation simple est plus difficile à trouver que les autres, cela prouve encore que parmi les Operations, la plus facile & la plus naturelle n'est pas toûjours la meilleure.

2. Supposons la chose faite, c'est-à-dire, que BE rencontre le côté AC prolongé de telle sorte, que FE soit égale à la donnée BN, Fig. 231. sur BE tirez la perpendiculaire EG, qui coupera BD prolongée en G; abaissez EL perpendiculaire sur BG; EL sera parallele & égale à CD, sur le diametre BG décrivez le demicercle BEG; l'angle BEG étant droit supp. il a son sommet E dans la circonference BEG. De plus les triangles BEG, BEL, LEG sont semblables; mais les triangles BFD, BEL équiangles sont encore semblables: ainsi les triangles BFD, EGL sont encore semblables; & parcequ'ils ont les côtez BD, EL égaux, les côtez BF, EG le seront aussi. Fig. 231.

3. Nommons chaque côté du quarré, $a = EL$; FE, c; DG, x; $BF, y = EG$; nous aurons $BG, a+x$; $BE, y+c$.

Dans les triangles ſemblables BGE, EGL, BG, $a+x : BE, c+y :: GE, y : EL, a$. & $cy+yy = aa+ax$. Le triangle rectangle BEG donne $\overline{BG}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EG}^2$, $aa+2ax+xx = 2yy+2cy+cc$. Pour $yy+cy$ ſubſtituez ſa valeur, qu'on vient de trouver : il viendra $x = \pm\sqrt{aa+cc}$.

4. La racine vraye $x = \sqrt{aa+cc}$ donne la conſtruction de Pappus, dans laquelle on prend DG, $x = DN$, Fig. 228. $= \sqrt{\overline{BN}^2 + \overline{BD}^2}$ $= \sqrt{cc+aa}$: Après quoi ſur le diametre BG l'on décrit le demi cercle BEG; l'on prolonge AC juſqu'en E, l'on joint BE, & FE eſt la ligne cherchée égale à BN. Fig. 228.

La racine fauſſe $x = -\sqrt{aa+cc}$, ou $-x = \sqrt{aa+cc}$, apprend qu'il faut Fig. 231. de l'autre côté de D prolonger DB juſqu'à ce que Dg, $-x$ ſoit $\sqrt{aa+cc}$: & que ſur le diametre Bg on doit décrire le demi-cercle BHg. Le côté CA ſe prolonge en H; la ligne HP menée par les points H, B eſt encore égale à la donnée BN. Fig. 231.

En effet joignez Hg, menez Hl parallele & égale à $AB = BD$: vous aurez les triangles ſemblables BHg, HlB, lHg, BDP, & les deux BDP, Hlg ſeront égaux à cauſe de $BD = Hl$: donc $Hg = BP$. Un calcul ſemblable au precedent donnera la même équation.

5. Bien plus Fig. 231. les deux autres points e, h, où ces deux cercles coupent encore le côté AC, ſatisfont au Problême, & les lignes ef, hp, tirées par les points e, h, B ſont égales à bN.

Pour le démontrer au point e, abaiſſez la perpendiculaire eM, & joignez eG.

Il eſt aiſé de montrer que ef eſt égale à FE.

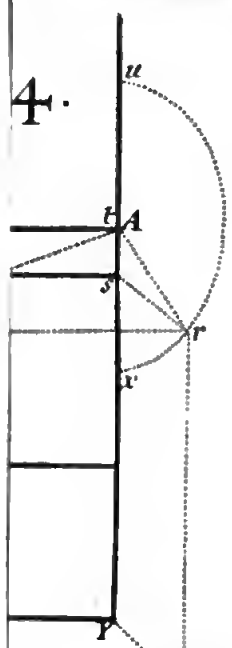
Pour démontrer la même choſe au point h, abaiſſez ſur Bg la perpendiculaire hm, qui eſt égale à $AB = BD$; joignez hg, & vous verrez que $hp = HP = bN$.

ARTICLE III.

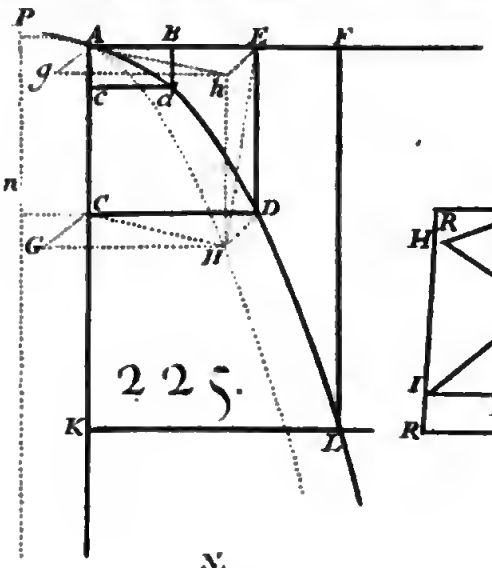
Les Problêmes de trois & quatre dimenſions ne demandent pas toûjours ces Operations.

1. LEs Problêmes de trois dimenſions n'ont quelquefois ni ſecond, ni troiſiéme terme, comme Liv. 1. Part. 1. Sect. 1. Probl. 4. alors l'on n'a qu'à trouver la racine cubique, ſuivant Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Quelquefois le ſecond terme manque, & alors il n'eſt pas neceſſaire de le faire évanoüir, comme il arrivera dans la triſection de l'angle, Part. 4. Sect. 2. Art. 3.

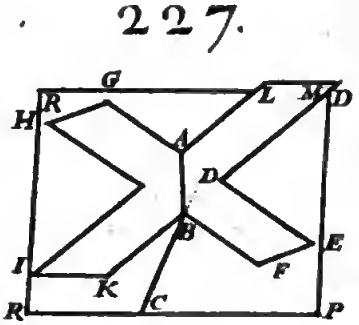
2. Les Problêmes de quatre dimenſions peuvent n'avoir ni ſecond, ni



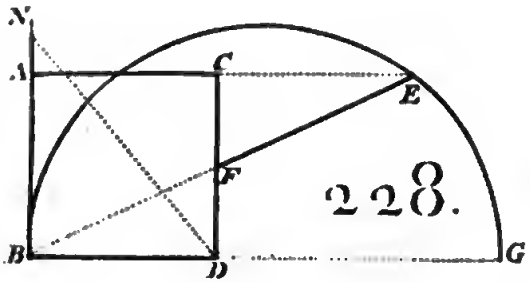
4.



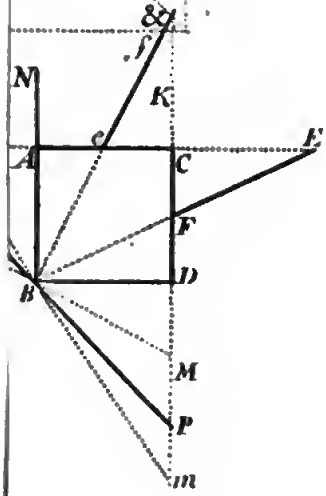
225.

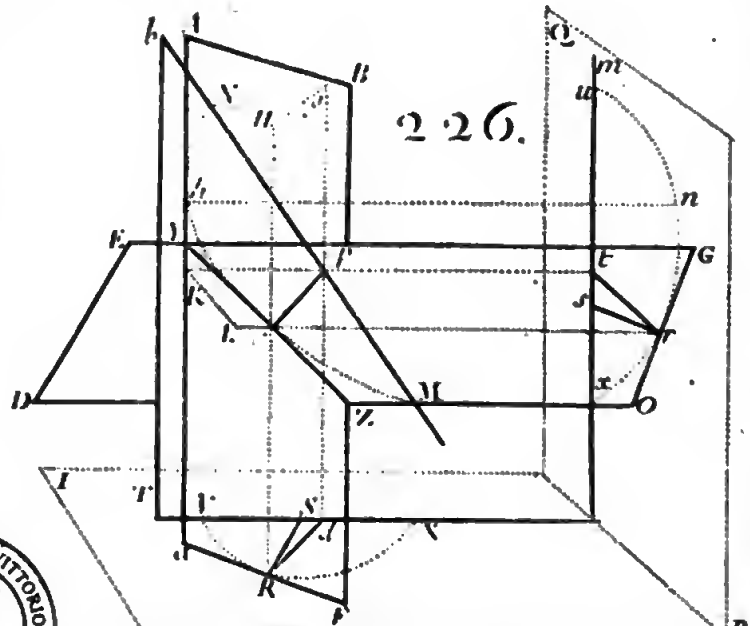


227.



228.





226.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE" NAPOLI

quatriéme terme ; & alors on les regarde comme des Problêmes quarrez. Ils peuvent n'avoir point de ſecond terme, alors il n'eſt pas beſoin de le faire évanoüir. Quelquefois en faiſant évanoüir le ſecond terme, le quatriéme diſparoît auſſi ; & alors, comme l'équation eſt plane, il n'eſt pas neceſſaire de faire les autres Operations, qu'il auroit fallu faire, ſi le quatriéme terme fût demeuré. On en a vû des Exemples, Art. 2. §. 2. 4. En voici encore un autre.

Trouver quatre nombres qui ſe ſurpaſſent de l'unité, & qui ſe multipliant produiſent 100.

Soit le premier nombre z, le ſecond $z+1$, le troiſiéme $z+2$, le quatriéme $z+3$, leur produit eſt $z^4+6z^3+11zz+6z-100=0$, qui ne peut être diviſé juſte par aucun binome compoſé de z & de quelque diviſeur exact de 100.

Pour faire évanoüir le ſecond terme prenez $z+\frac{3}{2}=x$.

La transformée eſt $x^4 * -\frac{1}{2}xx * -\frac{1501}{16}$; $x^4-\frac{1}{2}=\frac{1501}{16}$ dont les racines ſont $xx=+\frac{1}{4}\pm\sqrt{101}$, qui ſe reduiſent $x=\pm\sqrt{+\frac{1}{4}\pm\sqrt{101}}$; mettez pour x ſa valeur $z+\frac{3}{2}$, les quatre racines ſont $z=-\frac{3}{2}+\sqrt{+\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$, $z=-\frac{3}{2}-\sqrt{+\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$, $z=-\frac{3}{2}+\sqrt{+\frac{1}{4}-\sqrt{101}}$, $z=-\frac{3}{2}-\sqrt{+\frac{1}{4}-\sqrt{101}}$. Que le premier nombre cherché ſoit $z=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$, le ſecond eſt $z=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$, le troiſiéme $z=+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$, le quatriéme $z=+\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{101}}$. Le produit du premier par le quatriéme eſt $-1+\sqrt{101}$, celui du ſecond par le troiſiéme eſt $+1+\sqrt{101}$: & le produit de $-1+\sqrt{101}$, par $+1+\sqrt{101}$ eſt 100. Les autres valeurs de z donnent auſſi 100.

SECTION V.

Regle generale pour reduire les Equations de toutes ſortes de dimenſions.

M. DESCARTES.

JE pourrois ajoûter diverſes Regles pour démêler les équations, qui vont au cube ou au quarré de quarré : mais elles ſeroient ſuperfluës ; car lorſque les Problêmes ſont plans, on en peut toûjours trouver la conſtruction par celles-ci.

Je pourrois auſſi en ajoûter d'autres pour les équations, qui montent juſqu'au ſurſolide, ou au quarré de cube, ou au delà ; mais j'aime mieux les comprendre toutes en une, & dire en gene-

ral, que lorſqu'on a tâché de les reduire à une même forme, que celles d'autant de dimenſions, qui viennent de la multiplication de deux autres qui en ont moins, & qu'ayant denombré tous les moyens, par leſquels cette multiplication eſt poſſible, la choſe n'a pû ſucceder par aucun, on doit s'aſſurer, qu'elles ne ſçauroient être reduites à de plus ſimples. En ſorte que ſi la quantité inconnuë a trois ou quatre dimenſions, le Problême pour laquelle on le cherche eſt ſolide, & ſi elle en a cinq ou ſix, il eſt d'un degré plus compoſé; & ainſi des autres.

Au reſte j'ai omis ici les démonſtrations de la plûpart de ce que j'ai dit, à cauſe qu'elles m'ont ſemblé ſi faciles, que pourveu que vous preniez la peine d'examiner methodiquement, ſi j'ai failli, elles ſe preſenteront à vous d'elles-mêmes: & il ſera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les liſant.

Nous apportons en chaque endroit la démonſtration de ce que M. DESCARTES enſeigne dans ſa Geometrie.

Nous allons appliquer la Regle, que M. DESCARTES vient de donner, 1. aux équations cubiques, 2. aux équations quarré-quarrées. 3. aux équations ſurſolides, 4. aux équations quarré-cubes. Ce qui ſervira d'explication à la Regle dont il s'agit. L'on pourroit de même travailler ſur les équations qui ont plus de dimenſions.

Lorſqu'on parle ici des équations de trois, quatre, &c. dimenſions, l'on entend celles où une des inconnuës au moins eſt du troiſiéme, quatriéme, &c. degré. Car pour celles où le produit des deux inconnuës xyy, $xxyy$, &c. ſe trouve, ſans qu'il y ait x^3, y^4, &c. elle ſe reduiſent par la diviſion à un moindre degré, comme celle-ci $aax - xyy - 2aay - ayy = o$ ſe reduit à $x = \frac{2aay + ayy}{aa - yy}$, & celle-ci $xxyy - abxx - aayy + aabb = o$ ſe reduit à $xx = \frac{aayy - aabb}{yy - ab}$, & c'eſt ſous cette forme qu'on cherche les valeurs de x.

ARTICLE I.

Pour les Equations de trois dimenſions.

1. SOient propoſées ces équations cubiques $x^3 \begin{matrix} -axx + abx \\ -bxx + acx - abc \\ -cxx + bcx \end{matrix} = o$. $x^3 - bxx + aax - aab = o$. $z^3 - 7zz + 5z - 12 = o$.

On diviſe le nombre 3 expoſant de la plus haute puiſſance x^3, z^3, en autant de nombres, qu'il ſe peut, de ſorte que tous les nombres de chaque diviſion pris enſemble faſſent 3. La premiere diviſion eſt 1, 1, 1; la ſeconde 1, 2; & l'on n'en peut point faire d'autres. Ce qui montre qu'une équation de trois dimenſions peut être diviſée ou 1° par trois équations 1, 1, 1, chacune du premier degré; comme $x^3 \begin{matrix} -axx+abx \\ -bxx+acx \\ -cxx+bcx \end{matrix} -abc=0$, peut être diviſée par ces trois $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$. Ou 2° par deux équations 1, 2, dont l'une eſt du premier degré, l'autre du ſecond; comme $x^3-bxx+aax-aab=0$, peut être diviſée par ces deux $x-b=0$, $xx+aa=0$.

2. Après qu'on a diviſé une équation $x^3 \begin{matrix} -axx+abx \\ -bxx+acx-abc=0, \\ -cxx+bcx \end{matrix}$ par une équation lineaire $x-a=0$, dont le quotient eſt $xx \begin{matrix} -cx \\ -bx \\ +bc=0 \end{matrix}$, l'on cherche encore, ſi ce quotient peut auſſi être diviſé juſte par un binome lineaire, & l'on trouve qu'il le peut par $x-b=0$, & le quotient eſt $x-c=0$. Alors on dit, que l'équation propoſée eſt reductible en trois autres équations chacune du premier degré $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, & qu'elle n'eſt pas proprement du troiſiéme degré, mais du premier; parceque toutes ſes racines $x=a=x=b$, $x=c$ ſe peuvent trouver, comme on trouve les équations du premier degré.

Mais après qu'on a diviſé une équation $x^3-bxx+aax-aab=0$, par un binome $x-b=0$, & qu'on a tenté inutilement de diviſer le quotient $xx+aa=0$ par un autre binome: l'on dit que la propoſée eſt reductible en deux autres, dont l'une $x-b=0$ eſt du premier degré, l'autre $xx+aa=0$ du ſecond; & qu'elle n'eſt pas proprement du troiſiéme, mais du premier & du ſecond; parceque ſes racines $x=b$, $xx=-aa$ ſe doivent chercher comme on fait celles du premier & du ſecond degré.

Lorſqu'enfin on ne trouve aucun binome, qui diviſe exactement une équation du troiſiéme degré $z^3-7zz+5z-12=0$: alors on dit qu'elle eſt irreductible, & qu'elle eſt proprement du troiſiéme degré; & il faut chercher ſes racines, comme on cherche celles du troiſiéme degré, Voyez Part. 4. Sect. 1. Art. 1.

3. J'ai crû devoir ici ajoûter quelques Regles, qui regardent toutes les

dimenſions ; je ne les ai pas miſes d'abord au commencement, parcequ'après ce qu'on vient de dire des équations cubiques, elles ſeront plus intelligibles.

Il faut diviſer l'expoſant d'une équation propoſée en autant de nombres qu'il ſe peut, de ſorte que tous ces nombres ajoûtez enſemble ſoient égaux à l'expoſant. Si l'équation eſt de quatre dimenſions, l'on diviſe l'expoſant 4, 1° en 1, 1, 1, 1. Ce qui montre qu'une équation de quatre dimenſions peut être diviſée par quatre binomes chacun d'une dimenſion ; 2° en 1, 1, 2. Ce qui prouve qu'une telle équation peut être diviſée par trois binomes, dont deux ſont d'une dimenſion, le troiſiéme de deux ; 3° en 2. 2. Ce qui fait voir que cette équation peut être diviſée par deux binomes, chacun de deux dimenſions ; 4° en 1. 3. Ce qui marque qu'une telle équation peut ſe diviſer par deux binomes, l'un d'une, l'autre de trois dimenſions.

On doit commencer la diviſion de la propoſée par tous les binomes du premier degré qui peuvent ſervir ; & ſi cette diviſion donne un quotient exact, on le diviſera encore par tous les binomes du premier degré qui peuvent être employez, & ſi cette diviſion donne encore un quotient, l'on tentera encore la diviſion par un binome du premier degré ; & ainſi de ſuite juſqu'à ce que ces ſortes de binomes ne réüſſiſſent pas.

Mais dès que les binomes du premier degré ſont inſuffiſans, ſoit que cela arrive à la premiere diviſion, ſoit aux autres ; l'on eſſayera de diviſer par tous les binomes du ſecond degré, qui peuvent être utiles, & l'on s'en ſervira, juſqu'à ce qu'ils ne donnent point de diviſion exacte. Alors on viendra aux binomes du troiſiéme degré, &c. Il ne faut jamais ſe ſervir d'un binome d'un degré plus élevé, qu'après que les binomes d'un degré plus ſimple ont été trouvez inutiles : dont la raiſon eſt, qu'une équation qui peut être diviſée juſte par un binome plus compoſé, le peut toûjours être par un plus ſimple, lequel ſeroit le quotient de la diviſion faite par le plus compoſé. Car ſi vous diviſez $x^3 - bxx + aax - aab$ par $xx + aa = o$, le quotient eſt $x - b = o$: comme ſi vous aviez diviſé par $x - b = o$, le quotient auroit été $xx + aa = o$. Or la diviſion par un binome plus ſimple eſt plus facile.

De là il ſuit, que ſi la diviſion n'a pas réüſſi par un binome plus ſimple, il ſeroit inutile de la tenter par un binome plus compoſé, qui auroit dû être le quotient du plus ſimple ; ce qui s'explique ainſi. Soit une équation du troiſiéme degré $x^3 - bxx + aax - aab = o$. Diviſez là par un binome du premier degré $x - b = o$, le quotient ſera du ſecond degré $xx + aa = o$. Si donc la diviſion n'avoit pas pû ſe faire avec le binome du premier degré, il n'auroit pas fallu la tenter avec un binome du ſecond. C'eſt pour cela que M. DESCARTES n'a demandé Sect. III. qu'une diviſion,

diviſion, pour connoître ſi une équation cubique eſt un Problême ſolide, ou non. Soit une équation quarré-quarrée $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$. Diviſez-là par $y - 2 = 0$ binome du premier degré, le quotient eſt $y^3 + 18yy + 107y + 210 = 0$ du troiſiéme degré: c'eſt pourquoi lorſque la diviſion n'eſt pas exacte avec un diviſeur du premier degré, vous ne devez pas la tenter avec un diviſeur du troiſiéme, qui devroit avoir pour quotient une équation du premier; car ſi l'on diviſe $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, par $y^3 + 18yy + 107y + 210 = 0$, le quotient eſt $y - 2 = 0$. Diviſez à preſent la même propoſée par le binome du ſecond degré $yy + 13y + 42 = 0$, le quotient eſt un autre binome du ſecond degré $yy + 3y - 10 = 0$.

M. DESCARTES n'a auſſi demandé, pour connoître, ſi une équation du quatriéme degré étoit un Problême ſolide, qu'une diviſion par $y - 2 = 0$, parceque ſi celle-là ne réüſſit pas, la diviſion par $y^3 + 18yy + 107y + 210 = 0$, ne réüſſiroit pas non plus. Il auroit pû demander la diviſion par un binome du ſecond degré, mais comme le quotient ſeroit auſſi un binome du ſecond degré; l'équation propoſée peut alors ſe diviſer en deux autres du ſecond degré chacune; or il a donné Sect. 4. Art. 1. une Methode pour diviſer la propoſée en ces deux équations, lorſque cela ſe peut faire. Par la même raiſon une équation de cinq dimenſions eſt irreductible, ſi elle ne peut être diviſée juſte par aucun binome du premier & du ſecond degré: car ſi elle pouvoit être diviſée exactement par un binome du troiſiéme degré, elle auroit pû l'être par un du ſecond: & ſi elle pouvoit être diviſée exactement par un binome du quatriéme, elle auroit pû l'être auſſi par un du premier: puiſque ces binomes ſont mutuellement le quotient les uns des autres.

Ainſi l'on fait cette Regle generale. Pour les équations du 2, 4, & autres degrez en nombre pair, il faut s'arrêter aux binomes dont le degré eſt la moitié du degré de l'équation propoſée; aux binomes du ſecond degré pour les équations du quatriéme, aux binomes du troiſiéme pour les équations du ſixiéme, &c. Pour les équations du 3, 5, & autres en nombre impair, il faut s'arrêter aux binomes dont le degré eſt la moitié de celui de l'équation propoſée; après qu'on l'a diminué d'une unité; aux binomes du premier degré pour les équations du troiſiéme; aux binomes du ſecond degré pour les équations du cinquiéme; aux binomes du troiſiéme pour les équations du ſeptiéme; &c. Car il eſt évident, que toutes les autres diviſions ſeroient ſuperfluës.

Lorſque l'équation cubique eſt $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, les binomes $yy - 1 = 0$, $yy - 2 = 0$, &c. ſont regardez comme du premier degré, &c.

ARTICLE II.

Pour les Equations de quatre dimenſions.

1. UNe équation quelconque de quatre dimenſions étant propoſée

$$y^4 \left\{\begin{array}{l} -3ay^3+3aayy-a^3y \\ +by^3-3abyy+3aaby \end{array}\right\} -a^3b=0.$$

$$x^4 \left\{\begin{array}{l} -bx^3+aaxx-aabx \\ -cx^3+bcxx-aacx \end{array}\right\} +aabc=0. \quad z^4-4z^3-16zz+3z-36=0. \quad x^4-4x^3-10xx-28x-8=0. \quad v^4-11v^3+21vv-7v+1=0.$$

Vous partagerez le nombre 4 expoſant de la haute puiſſance en autant de nombres qu'il ſe peut, de ſorte que tous ceux d'une diviſion pris enſemble faſſent 4. Premiere diviſion 1, 1, 1, 1; ſeconde 1, 1, 2; troiſiéme 1, 3; quatriéme 2, 2.

Ce qui fait voir qu'une équation du quatriéme degré peut être diviſée exactement, ou 1° par quatre binomes chacun du premier degré 1, 1, 1, 1, comme $y^4 \left\{\begin{array}{l} -3ay^3+3aayy-a^3y \\ +by^3-3abyy+3aaby \end{array}\right\} -a^3b=0$, peut ſe diviſer juſte par ces quatre $y-a=0$, $y-a=0$, $y-a=0$, $y+b=0$; ou 2° par trois binomes 1, 1, 2, dont deux ſoient chacun du premier degré, le troiſiéme du ſecond; comme $x^4 \left\{\begin{array}{l} -bx^3+aaxx-aabx \\ -cx^3+bcxx-aacx \end{array}\right\} +aabc=0$, peut être diviſée par ces trois $x-b=0$, $x-c=0$, $xx+aa=0$; ou 3° par deux équations 1, 3, dont l'une ſoit du premier degré, l'autre du troiſiéme; comme $z^4-4z^3-16zz+3z-36=0$, peut ſe diviſer juſte par ces deux $z+3=0$, $z^3-7zz+5z-12=0$; ou 4° par deux binomes chacun du ſecond degré 2, 2; comme $x^4-4x^3-10xx-28x-8=0$, par ces deux $xx+2x+4=0$; $xx-6x-2=0$.

2. Après que l'équation $y^4 \begin{matrix} -3ay^3+3aayy-a^3y \\ +by^3-3abyy+3aaby \end{matrix} -a^3b = 0$, a pû être diviſée juſte par $y-a=0$, $y-a=0$, $y-a=0$, $y+b=0$, l'on dit qu'elle eſt proprement du premier degré, parcequ'elle eſt reductible en des équations du premier degré. Après que l'équation $x^4 \begin{matrix} -bx^3+aaxx-aabx \\ -cx^3+bcxx-aacx \end{matrix} +aabc=0$, a été diviſée exactement par $x-b=0$, $x-c=0$, $xx+aa=0$, elle eſt reductible en deux équations du premier degré, & en une du ſecond; & elle paſſe pour n'être pas proprement du quatriéme, mais du premier & du ſecond, &c. Mais lorſqu'une équation $v^4-11v^3+21vv-7v+1=0$, n'a pû être diviſée exactement par aucun binome ni du premier, ni du ſecond degré; l'on ne tente pas la diviſion par d'autres. Cependant avant que de la declarer entierement irreductible, l'on fait les operations que l'on a expliquées, Sect. 4. Art. 1. Que ſi par cette voye l'on ne trouve aucune racine de $v^4-11v^3+21vv-7v+1=0$, elle eſt proprement du quatriéme degré, parcequ'elle eſt irreductible; & l'on doit chercher ſes racines, comme l'on fera celles des équations ſolides du quatriéme degré, Part. 4. Sect. 1. Art. 2. Exemple 4.

3. Il ne ſera pas inutile d'apporter ici un Exemple des équations de quatre dimenſions, pour leſquelles il faut ſuivre les Regles de Sect. 4. Art. 1. & de montrer, comment on connoît enfin ſi l'on a trouvé les racines de l'équation propoſée.

Soit $x^4-4x^3-10xx-28x-8=0$, dont on cherche les racines. Suivant la Methode de M. DESCARTES, d'abord vous tentez la diviſion par tous les binomes du premier degré, qui ſont compoſez de x + ou — chaque diviſeur exact du dernier terme 8, aucune de ces diviſions n'eſt exacte. Au lieu de tenter la diviſion par des binomes du ſecond degré, comme on le fera n. 5. M. DESCARTES veut, pour vous en épargner la peine, que vous faſſiez évanoüir le ſecond terme de la propoſée en faiſant $x-1=z$, $z+1=x$; la reduite eſt $z^4*-16zz-56z-49=0$; ou $z^4*-pzz-qz-r=0$. Vous la transformez en $y^6 \begin{matrix} +ppyy \\ -2py^4 \\ +4ryy \end{matrix} -qq=0$, ou $y^6-32y^4+452yy-3136=0$. qui ſe diviſe juſte par $yy-16=0$. donc $yy=16$,

$y = 4$. Enſuite à la place de $z^4 * - pzz - qz - r = 0$, ou $z^4 * - 16zz - 56z - 49 = 0$, vous écrivez ces deux $zz - yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$; ou $zz - 4\zeta - 7 = 0$, $zz + 4\zeta + 7 = 0$; dont les racines ſont $z = 2 \pm \sqrt{11}$, $z = -2 \pm \sqrt{-3}$.

Maintenant pour connoître, ſi les racines de la propoſée $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$ ſont trouvées, vous ſubſtituez la valeur de zz & de z dans $zz - 4z - 7 = 0$, $zz + 4z + 7 = 0$, & il vient $xx - 6x - 2 = 0$, $xx + 2x + 4 = 0$. Vous diviſez la propoſée par une de ces deux équations, le quotient exact eſt l'autre équation; par où il paroît quelles ſont les racines de $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$, de ſorte que les valeurs de x ſont $x = 3 \pm \sqrt{11}$, $x = -1 \pm \sqrt{-3}$. Ce que vous auriez auſſi trouvé en ſubſtituant $x - 1$ pour z dans les racines $z = 2 \pm \sqrt{11}$, $z = -2 \pm \sqrt{-3}$.

4. Une équation du quatriéme degré, qui ne peut pas être diviſée de la maniere, dont on a parlé auparavant peut quelquefois être abaiſſée au ſecond degré en faiſant évanoüir le ſecond terme. Soit donnée l'équation

$$x^4 + 4x^3 \quad + 4aaxx \quad - 2abbx \quad - bbxx \quad - 2aabb = 0,$$

laquelle ne peut pas être diviſée par aucun des binomes, qui peuvent être formez avec les quantitez connuës du dernier terme: ſuivant la Regle expliquée, Part. 2. Sect. 2. Art. 3. je fais $x + a = z$, $x = z - a$; ce qui donne $z^4 * - 2aazz * - bbzz - aabb + a^4 * = 0$.

Cette reduite eſt du ſecond degré, j'arrange ainſi les termes, $z^4 - 2aazz - bbzz = -a^4 + aabb$; dont la racine eſt $zz = aa + \frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, $\zeta = \pm\sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$; & $x = z - a = -a \pm \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$, où ſont contenuës les quatre valeurs de x, leſquelles ſe multipliant, produiſent l'équation propoſée, dont par conſequent elles ſont les quatre racines.

5. M. DESCARTES auroit pû nous conduire par le même chemin par lequel il a trouvé les Regles qu'il donne, Sect. 4. Art. 1. & nous dire que lorſqu'une équation de quatre dimenſions $x^4 - 4x^3 - 10xx - 28x - 8 = 0$, n'a pas pû être diviſée juſte par un binome du premier degré, il faut eſſayer, ſi elle pourra être diviſée par deux binomes du ſecond. Ce qui ſe fait ainſi, l'on fait évanoüir le ſecond terme de la propoſée, comme n. 3. & l'on a $z^4 * - 16zz - 56z - 49 = 0$, que l'on ſuppoſe être la même qu'une autre qui ſeroit produite par les deux équations $xx + yx$

$+zxx$
$-yzx$
$+z=0$, $xx-yx+v=0$; & c'eſt $x^4 *$ $+vz$
$-yyxx$
$+vyx$
$+vxx$
$=0$. Dont on compare chaque terme avec chaque terme de la propoſée comme on l'a enſeigné, Sect. 4. Art. 1. $y^6-32y^4+452yy-3136=0$; & le reſte comme n. 3.

6. L'on peut chercher ſi l'équation propoſée $x^4-4x^3-10xx-28x-8=0$; peut ſe diviſer en deux autres du ſecond degré, ſans ôter le ſecond terme ; ce qui fera connoître ſi le Problême eſt plan, & quelles ſont les racines de la propoſée.

$+yx^3+vxx$
$+svx$
Je regarde la propoſée comme égale à x^4+sx^3+syxx $+vz$
$+yzx$
$+zxx$
$=0$, qui a été produite par la multiplication des deux du ſecond degré $xx+yx+v=0$, $xx+sx+z=0$. & j'en compare les termes.

Les ſeconds $+y+s=-4$. $s=-4-y$.

Les derniers $+vz=-8$. $z=\frac{-8}{v}$.

Les quatriémes $+sv+yz=-28$. Je ſubſtituë les valeurs de s & de z ; il vient $-4v-vy-\frac{8y}{v}=-28$; $y=\frac{28v-4vv}{vv+8}$.

Puiſque les derniers termes ſont $+vz=-8$, -8 eſt le produit de $v\times z$, & v eſt un des diviſeurs de 8, qui ſont ± 1, ± 2, ± 4, ± 8.

Soit $v=+1$: donc $y=\frac{24}{9}$; $s=\frac{-60}{9}$; $z=\frac{-8}{v}=-8$. Je ſubſtituë ces valeurs dans les équations $xx+yx+v=0$, $xx+sx+z=0$; elles deviennent $xx+\frac{24}{9}x+1=0$, $xx-\frac{60}{9}x-8=0$. Je tente la diviſion de la propoſée $x^4-4x^3-10xx-28x-8=0$ par chacune de ces équations du ſecond degré. Elle n'eſt pas exacte, d'où je conclus qu'aucune de ces équations n'eſt la racine de la propoſée.

La diviſion ne réüſſit pas non plus en faiſant $v=-1$, $v=\pm 2$. Je poſe $v=+4$: donc $y=+2$, $s=-6$, $z=-2$. Je ſubſtituë ces valeurs, la diviſion réüſſit. De là je conclus que ces deux équations ſont racines de la propoſée, qui par conſequent ſe peut diviſer en deux autres du ſecond degré, que le Problême eſt plan ; & que les valeurs de x ſont les racines de $xx+2x+4=0$, $xx-6x-2=0$. à ſçavoir $x=-1\pm\sqrt{-3}$, $x=3\pm\sqrt{11}$, comme n. 3.

Après avoir ſubſtitué tous les diviſeurs de 8 à la place de v, ſi aucune diviſion n'avoit été juſte, ç'auroit été une marque, que le Problême étoit ſolide.

J'aurois pû faire évanoüir v en me ſervant des troiſiémes termes $+v+sy+z=-10$; en mettant pour s & z leur valeur, j'aurois trouvé $v-4y-yy-\frac{8}{v}=-10$; $vv+4vy-yyv+10v=8$, qui donneroit une valeur de v, laquelle ne contiendroit que des y d'inconnuës. Mais en ſubſtituant cette valeur de v & de vv dans $y=\frac{28v-4vv}{vv+8}$, l'inconnuë y monteroit trop haut, & il ſeroit plus difficile d'en connoître les racines, que celles de la propoſée même.

ARTICLE III.

Pour les Equations de cinq dimenſions.

1. SOit propoſée une équation quelconque du cinquiéme degré

$$y^5-3ay^4\begin{matrix}+3aay^3-a^3yy\\-bby^3+3abbyy\end{matrix}-3aaby+a^3bb=0.$$

$$x^5-bx^4\begin{matrix}+aax^3-aabxx\\-ccx^3+bccxx\end{matrix}-aaccx+aabcc=0.\quad z^5-6z^4-8z^3+35zz-42z+72=0.\quad v^5-9v^4-1v^3+49vv-13v+2=0.$$

$$y^5-by^4\begin{matrix}+aay^3-aabyy\\+ccy^3-bccyy\end{matrix}+aaccy-aabcc=0.$$

$$x^5-7x^4+8x^3-33xx+15x-36=0.$$

Nous diviſerons le nombre 5 expoſant de la plus haute puiſſance en autant de nombres, qu'il ſe peut, de ſorte que tous ceux de chaque diviſion pris enſemble faſſent 5. Premiere diviſion $1,1,1,1,1$; ſeconde $1,1,1,2$; la troiſiéme $1,1,3$; la quatriéme $1,4$; la cinquiéme $1,2,2$; la ſixiéme $2,3$. Ce qui fait voir qu'une équation du cinquiéme degré peut être diviſée juſte ou par cinq équations, chacune du premier degré $1,1,1,1,1$; comme l'équation $y^5-3ay^4\begin{matrix}+3aay^3-a^3yy\\-bby^3+3abbyy\end{matrix}-3aabby+a^3bb=0$, par $y-a=0$, $y-a=0$, $y-a=0$, $y-b=0$, $y+b=0$. Et alors cette équation n'eſt pas proprement du cinquiéme degré, mais du premier, auquel elle eſt reductible, parceque toutes ſes racines peuvent ſe trouver, comme celles des équations du premier degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut ſe diviſer juſte par quatre équations, dont trois ſont chacune du premier degré, la quatriéme

du ſecond 1, 1, 1, 2, comme $x^5 - bx^4 \begin{matrix} +aax^3 - aabxx \\ -ccx^3 + bccxx \end{matrix} - aaccx + aabcc = 0$. par $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x + c = 0$, $xx + aa = 0$. Et cette équation eſt proprement du premier & du ſecond degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut être diviſée exactement par trois équations, dont deux ſont du premier degré, & l'autre du troiſiéme 1, 1, 3; comme $z^5 - 6z^4 - 8z^3 + 35zz + 42z + 72 = 0$, par $z - 2 = 0$, $z + 3 = 0$, $z^3 - 7zz + 5z - 12 = 0$, qui ne peut plus être diviſée juſte. Et alors l'équation eſt proprement du premier & du troiſiéme degré, parceque deux de ſes racines ſe trouvent, comme on fait celles du premier degré, & la troiſiéme comme on trouve les cubiques. Ou une équation du cinquiéme degré peut être diviſée exactement par deux équations, l'une du premier, l'autre du quatriéme degré 1, 4; comme $v^5 - 9v^4 - 11v^3 + 35vv - 13v + 2 = 0$, par $v + 2 = 0$, $v^4 - 11v^3 + 21vv - 7v + 1 = 0$. Et cette équation eſt proprement du premier & du quatriéme degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut ſe diviſer juſte par une équation du premier degré & par deux du ſecond 1, 2, 2; comme $y^5 - by^4 \begin{matrix} +aay^3 - aabyy \\ +ccy^3 - bccyy \end{matrix} + aaccy - aabcc = 0$, $y - b = 0$, $yy + aa = 0$, $yy + cc = 0$. Et l'équation eſt proprement du premier & du ſecond degré. Ou une équation du cinquiéme degré peut ſe diviſer juſte par une équation du ſecond degré, & par une du troiſiéme 2, 3, comme $x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0$, par $xx + 3 = 0$, $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$. Et elle eſt proprement du ſecond & du troiſiéme degré.

2. Quoiqu'une équation du cinquiéme degré $x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0$. n'ait pas pû être diviſée juſte par un binome du premier degré; elle n'eſt pas toûjours entierement irreductible : ainſi il faut la transformer en une autre, qui vienne de la multiplication de deux équations, qui ſont d'un moindre degré. Mais parmi les ſix diviſions du nombre 5, qui ont été faites n. 1. il ne faut prendre aucune de celles où 1 ſe trouve : parceque ſi la propoſée avoit une racine du premier degré, elle ſe ſeroit manifeſtée par les diviſions, qui ont precedé. Il ne reſte donc que la diviſion faite en 2. 3. laquelle fait connoître, qu'il faut prendre la produite de deux équations, dont l'une ſoit du ſecond, l'autre du troiſiéme degré.

Pour plus grande facilité, je change la propoſée en celle-ci $x^5 - px^4 + qx^3 - rxx + sx - t = 0$, dont je comparerai les termes avec ceux

de $x^5 + fx^4 \begin{matrix} +gx^3 + hxx \\ +nx^3 + nfxx \end{matrix} \begin{matrix} \\ +ngx + nh = 0 \end{matrix}$. produite par la multiplication des deux $x^3 + fxx + gx + h = 0$, $xx + n = 0$, dans laquelle je ſuppoſe que le ſecond terme manque.

Les ſeconds termes $+fx^4 = -px^4$, $f = -p$.

Les troiſiémes $+gx^3 + nx^3 = +qx^3$, $g = q - n$.

Les cinquiémes $+ngx = +sx$, $g = \frac{s}{n} = q - n$; $s = qn - nn$; $nn - qn = -s$; $n = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} = 4 \pm 1$. Donc $n = 5$, $n = 3$. & $xx + n = 0$, ſe change en $xx + 5 = 0$, $xx + 3 = 0$.

Maintenant je diviſe la propoſée $x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 33xx + 15x - 36 = 0$ par $xx + 5 = 0$, la diviſion ne ſe fait pas exactement, d'où je conclus, que $xx + 5 = 0$ n'eſt pas une racine de la propoſée. Je fais enſuite la diviſion par $xx + 3 = 0$, le quotient exact eſt $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$, d'où je conclus que $xx + 3 = 0$ & $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$ ſont les racines de la propoſée. L'équation $xx + 3 = 0$, donne $x = \pm\sqrt{-3}$. L'équation $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$ ne peut plus ſe diviſer, ainſi on en cherche les racines, comme vous verrez Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. n. 2. ſi la propoſée n'avoit pû être diviſée ni par $xx + 5 = 0$, ni par $xx + 3 = 0$, elle auroit été proprement du cinquiéme degré, & entierement irreductible.

3. Soit propoſée l'équation $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8xx + 5x - 1 = 0$, qui n'a point pû être diviſée ni par aucun binome du premier degré, ni par aucun du ſecond, en ſuppoſant qu'il n'avoit point de ſecond terme: il faut encore voir, ſi elle pourroit être diviſée par un binome du ſecond degré, qui a un ſecond terme.

Pour cela l'on prend les deux équations $x^3 + fxx + gx + h = 0$, $xx + mx + n = 0$, dont le produit eſt

$$\begin{matrix} & & & +fx^4 & +gx^3 & +hxx & \\ & & & & & +hmx & \\ x^5 & & & & & & +hn = 0, \\ & & +mx^4 & +mfx^3 & +gmxx & & \\ & & & & +gnx & & \\ & & & +nx^3 & +fnxx & & \end{matrix}$$

dont il faut comparer les termes avec ceux de la propoſée, après l'avoir changé en $x^5 - px^4 + qx^3 - rxx + sx - t = 0$.

Les ſeconds termes $+fx^4 + mx^4 = -px^4$, $f = -p - m$.

Les troiſiémes $+g + mf + n = +q$, $g = q - mf - n$, & pour f mettant ſa valeur, $g = q + mp + mm - n$.

Les ſixiémes $+hn = -t$, $h = \frac{-t}{n}$.

Les

Les cinquiémes $+hm+gn=+s$, & mettant pour h ſa valeur, $=\frac{ms}{n}$ $+gn=s$; & ſubſtituant encore pour g ſa valeur, $mm+pm=\frac{sm}{nn}+q-n-\frac{s}{n}=0$. qui, après la ſubſtitution des valeurs de p, q, s, t, ſe change en $mm-\frac{+4m+6}{nn}-n=0$. $-\frac{s}{n}$

Dans l'équation du ſecond degré $xx+mx+n=0$, je dois découvrir la valeur de m & de n. Dans l'équation qui vient de reſulter de la comparaiſon des termes j'ai laiſſé n arbitraire, parceque les termes $hn=-t=-1$. font connoître que n eſt un diviſeur exact du dernier terme 1. de la propoſée. Ici ce dernier terme n'a point d'autre diviſeur exact que 1.

Il faut donc ſubſtituer 1 pour n dans $mm-\frac{+4m+6}{nn}-n=0$, il vient $-\frac{s}{n}$

$mm-\frac{+4m+6}{1}-1=0$, $mm+3m=0$, $m=-3$. Après quoi l'on doit $-\frac{s}{1}$

mettre la valeur -3 de m, $+1$ de n dans $xx+mx+n=0$; afin d'avoir $xx-3x+1=0$. avec laquelle on diviſe la propoſée $x^5-4x^4+6x^3-8xx+5x-1=0$. Et parceque la diviſion eſt juſte, & que le quotient eſt $x^3-1xx+2x-1=0$; ce diviſeur & ce quotient ſont les racines de la propoſée, le diviſeur $xx-3x+1=0$ donne $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$; le quotient $x^3-1xx+2x-1=0$ ne peut pas ſe diviſer; ainſi il faut chercher les valeurs de x, qu'il contient, comme on fait dans les équations cubiques. Voyez Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemp. 5. n. 2.

Si la diviſion precedente n'avoit pas réüſſi, j'aurois ſubſtitué -1 pour n, qui auroit donné $mm+3m+12=0$, $m=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{39}{4}}$.

Et j'aurois fait le reſte, comme auparavant. Si le dernier terme de la propoſée avoit pluſieurs diviſeurs exacts, je les aurois ſubſtitué de même avec le ſigne $+$ & -1, & ſi aucune diviſion n'avoit été exacte, la propoſée auroit été irreductible & proprement du cinquiéme degré. On chercheroit les racines, comme on fera Part. V.

La comparaiſon des quatriémes termes $+h+gm+fn=-r$ pourroit faire évanoüir m, de ſorte qu'il ne reſteroit que n d'inconnuë; mais n monteroit à un degré trop élevé.

4. Si l'équation étoit litterale, l'on prendroit de la même façon tous les diviſeurs du dernier terme, que l'on ſubſtitueroit les uns après les autres à la place de n, pour faire les diviſions de la propoſée.

ARTICLE IV.

Pour les Equations de ſix dimenſions.

1. DIviſez le nombre 6 expoſant de la haute puiſſance en autant de nombres qu'il ſe peut, de telle façon que la ſomme de tous les nombres de chaque diviſion pris enſemble faſſe 6. Premiere diviſion 1, 1, 1, 1, 1, 1; ſeconde 1, 1, 1, 1, 2; troiſiéme 1, 1, 1, 3; quatriéme 1, 1, 4; cinquiéme 1, 5; ſixiéme 1, 2, 3; ſeptiéme 1, 1, 2, 2; huitiéme 2, 2, 2; neuviéme 2, 4; dixiéme 3, 3.

Parmi ces diviſions, après avoir tenté de diviſer l'équation propoſée avec tous les binomes du premier degré, il faut laiſſer celles où 1 ſe trouve; parceque ſi la propoſée avoit une racine du premier degré, on l'auroit découverte par les precedentes diviſions. D'un autre côté la diviſion par 2, 2, 2. ſe peut laiſſer, parceque la diviſion par 2, 4. manifeſtera les racines du ſecond degré, s'il y en a. Il reſte donc 2, 4; & 3, 3. c'eſt-à-dire qu'il ſuffit de reduire l'équation propoſée à celles des transformées, qui viennent de la multiplication de deux autres, qui ont moins de dimenſions, & qui ſont ou une du ſecond degré & une du quatriéme, ou toutes deux du troiſiéme.

2, Etant propoſée une équation du ſixiéme degré $z^6 - 11z^5 + 23z^4 - 29z^3 + 43zz - 14z + 2 = 0$, ou $z^6 - pz^5 + qz^4 - rz^3 + szz - tz + v = 0$. Prenez une équation du quatriéme degré, $z^4 + fz^3 + gzz + hz + k = 0$ qui ait tous ſes termes, & une du ſecond $zz + n = 0$, qui n'ait point du ſecond terme; multipliez-les l'une par l'autre,

le produit eſt $z^6 + fz^5 + gz^4 + hz^3 + kzz + nz^4 + fnz^3 + gnzz + hnz + kn = 0$.

Comparez les termes avec ceux de la propoſée, pour en conclurre la valeur de n.

Les ſeconds termes $+ f = -p$.

Les ſeptiémes $+ v = kn$, $k = \frac{v}{n}$.

Les troiſiémes $g + n = +q$, $g = q - n$.

Les cinquiémes $k + gn = +s$; ſubſtituez les valeurs de k & de g; ce ſera $v + qnn - n^3 = ns$. Mais n monte ici au troiſiéme degré.

Il faut donc voir, ſi par la comparaiſon d'autres termes l'on pourra former une équation où n n'ait que deux dimenſions.

Les ſixiémes $+ hn = -t$, $h = \frac{-t}{n}$.

Les quatriémes $+h+fn=-r$ mettez pour h & f leur valeur, vous ferez $nn-\frac{rn}{p}=-\frac{s}{p}$; ſubſtituez les valeurs de p, r, t ; ce ſera $nn-\frac{29}{11}n=-\frac{14}{11}$; d'où l'on tire $n=\frac{29}{22}\pm\frac{11}{22}$; $n=2$, $n=\frac{7}{11}$. Donc $zz+n=zz+2=0$.

Diviſez à preſent la propoſée par $zz+2=0$, la diviſion ſera juſte, & le quotient $z^4-11z^3+21zz-7z+1=0$; ce qui montre que ces deux équations ſont les racines de la propoſée. $zz+2=0$ donne $z=\pm\sqrt{2}$. $\mathcal{Z}^4-11z^3+21zz-7z+1=0$ ne peut pas ſe diviſer, ainſi il faut en chercher les racines comme Part. 4. Sect. 1.

Quand aucune de ces diviſions ne réüiſſit, l'on vient à une transformée produite par deux équations, l'une du ſecond, l'autre du quatriéme degré, qui ont tous leurs termes. Soit propoſée $\mathcal{Z}^6-13z^5+45z^4-71z^3+57zz-16\mathcal{Z}+2=0$, ou $z^6-pz^5+qz^4-rz^3+szz-tz+v=0$, que l'on ſuppoſe égale à l'équation produite par les deux $z^4+fz^3+gzz+h\mathcal{Z}+k=0$, $\mathcal{Z}\mathcal{Z}+mz+n=0$; & c'eſt

$$\begin{array}{llll} & +fz^5 & +gz^4 & +hz^3 \\ & & & +kzz \quad +km\mathcal{Z} \\ z^6 & & & +kn+o. \\ +mz^5 & +fmz^4 & +gm\mathcal{Z}^3 & +hm\mathcal{Z}\mathcal{Z}+hn\mathcal{Z} \\ & +nz^4 & +fnz^3 & +gnzz \end{array}$$

Voici la comparaiſon des termes.

Les ſeconds $f+m=-p$, $f=-p-m$.

Les troiſiémes $g+fm+n=+q$, ou mettant pour f ſa valeur $g=q+mm+mp-n$.

Les ſeptiémes $+kn=v$, $k=\frac{v}{n}$.

Les ſixiémes $+km+hn=-t$, ou mettant pour k ſa valeur ; $h=\frac{t}{n}-\frac{vm}{nn}$.

Les cinquiémes $+k+hm+gn=s$, ou mettant pour k, h, g leurs valeurs, il vient

$$\begin{array}{llll} mm & & +n^3pm & +vn \\ & & -ntm & +qn^3 \\ & & & -n^4 \\ & & & -nns \\ \hline & & n^3-v & \end{array} = o.$$

$$\begin{array}{llll} mm & & +13n^3m & +2n \\ & & -16nm & +45n^3 \\ & & & -n^4 \\ & & & -57nn \\ \hline & & n^3-2 & \end{array} = o$$ en ſubſtituant les valeurs de p, q, s, t, v.

Après cela pour connoître la valeur de m, il faut mettre ſucceſſivement les differentes valeurs de n avec le ſigne + & —. Or parceque $kn = v = 2$, n eſt un diviſeur exact du dernier terme 2 de la propoſée. La ſubſtitution de ± 1 pour n ne donne pas une valeur de m telle qu'étant miſe dans $zz + mz + n = 0$, la diviſion de la propoſée ſe faſſe exactement. Je ſuppoſe donc $n = +2$, ce qui donne $mm + 12m + 20 = 0$. d'où l'on tire $m = -2$; & $zz - 2z + 2 = 0$, & cette derniere équation diviſe exactement la propoſée, & donne le quotient $z^4 - 11z^3 + 21zz - 7z + 1 = 0$. Ce diviſeur & ce quotient ſont donc des racines de la propoſée. $zz - 2z + 2 = 0$ fournit $z = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Mais $z^4 - 11z^3 + 21zz - 7z + 1 = 0$ ne peut plus être diviſée, & l'on en cherche les racines comme Part. 4. Sect. 1. Art. 2. Ex. 4.

3. Si les Operations de n. 1. 2. ne réüſſiſſent pas, l'on vient à deux équations du troiſiéme degré. Au commencement l'on ſuppoſe que le ſecond terme manque dans l'une des deux, enſuite qu'il ne manque dans aucune.

Soit propoſée l'équation $z^6 - 7z^5 + 7z^4 - 27z^3 + 17zz - 29z + 12 = 0$ ou $z^6 - pz^5 + qz^4 - rz^3 + szz - tz + v = 0$, que l'on ſuppoſe égale à une autre de même forme, produite par la multiplication de $z^3 + fzz + gz + h = 0$ par $z^3 + mz + n = 0$, & c'eſt

$$\begin{array}{llll} & +gz^4 & +hz^3 & +gmzz+hmz \\ z^6+fz^5 & +mz^4 & +fmz^3 & +hn\ 0. \\ & & +nz^3+fnzz+gnz & \end{array}$$

L'on regarde n comme un des diviſeurs du dernier terme 12, & l'on cherche la valeur de m.

Les troiſiémes termes $+g+m=q$, $g=q-m$.

Les ſeptiémes $+hn=v$, $h=\frac{v}{n}$.

Les ſixiémes $hm+gn=-t$, ou ſubſtituant les valeurs de h, g; il vient $m=\frac{-qnn-nt}{v-nn}=\frac{-7nn-20n}{12-nn}=\frac{-7+20}{12-1}=2$ en ſuppoſant $n=-1$. Donc $z^3+mz+n=0$ eſt $z^3+2z-1=0$, qui diviſe juſte la propoſée, & fait le quotient $z^3-7zz+5z-12=0$, qui ne peut plus ſe diviſer. Il faudra chercher les racines tant du diviſeur que du quotient, comme Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. n. 2. Ex. 5. n. 3.

4. Soit propoſée l'équation $y^6 - 8y^5 + 13y^4 - 23y^3 + 10yy - 7y - 12 = 0$, ou $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty - v = 0$, dont on n'a point trouvé de racines par n. 1. 2. 3. vous la concevrez égale à une équation formée par la multiplication de deux équations du troiſiéme degré qui ont tous leurs termes $y^3 + fyy + gy + h = 0$, $y^3 + myy + ny +$

$k = o$, & la transformée eſt $y^6 + fy^5 + gy^4 + hy^3 + hmyy + hny + my^5 + fmy^4 + gmy^3 + gnyy + gky + ny^4 + ky^3 + fkyy + fny^3 + hk = o$.

Les ſeconds termes $f + m = -p$, $f = -p - m$.

Les ſeptiémes $hk = -v$, $h = \frac{-v}{k}$.

Les ſixiémes $hn + gk = -t$, ou ſubſtituant la valeur de h; $g = \frac{-t}{k} + \frac{vn}{kk}$.

Les troiſiémes $g + fm + n = +q$, ou ſubſtituant les valeurs de g & f; $n = \frac{kkq + kt + kkmp + kkmm}{v + kk}$

Les quatriémes $+ h + gm + fn + k = -r$, pour h, g, f ſubſtituons leur valeur; $-\frac{v}{k} - \frac{tm}{k} + \frac{vmn}{kk} - pn - mn + k = -r$, multipliez par kk, $n = \frac{-kkr + kv + ktm - k^3}{vm - kkp - kkm} = \frac{kkq + kt + kkmp + kkmm}{v + kk}$.

D'où l'on tire, après avoir tout diviſé par k,

$$\begin{array}{l} kkvm^3 - 2k^4pmm - k^4ppm + k^3 \\ -k^4m^3 + kkpvmm - k^4qm - k^4pq \\ \qquad - 2k^3tm + k^4r \\ \qquad + kkqvm - k^3pt \\ \qquad\qquad + kkrv \\ \qquad\qquad - kvv \end{array} = o.$$

$$\begin{array}{l} + k^4 \\ - k^3ppm - k^3pq \\ m^3 \qquad\qquad = o \\ - 2k^3pmm - k^3q + k^3r \\ + kpv - 2k^2t - k^2pt \\ \qquad + kqv + krv \\ \qquad\qquad - vv \end{array}$$

$$kv - k^3$$

Pour avoir les valeurs de m, n, k de l'équation $y^3 + myy + ny + k = o$, je regarde k comme un diviſeur exact du dernier terme $hk = v = 12$, dont les diviſeurs ſont 1, 2, 3, 4, 6, 12. Je prends d'abord $k = +1$, & je ſubſtituë cette valeur de k dans l'équation $m^3 - 2k^3pmm$, &c. avec les valeurs de p, q, r, t, v; elle devient $m^3 + \frac{80mm + 65m - 4}{11} = o$, & ſuivant Part. 2. Sect. 2. Art. 7. pour ôter cette fraction, je fais $m = \frac{z}{11}$, & je multiplie le ſecond terme $80mm$ par 11, le troiſiéme $65m$ par 121, le quatriéme 4 par 1331. Ce qui produit $z^3 + 80zz$

$+ 715z - 484 = 0$; que je diviſe par un binome compoſé de $z +$ ou $-$ un des diviſeurs exacts de 484. La diviſion ſe fait par $z + 11 = 0$, le quotient eſt $zz + 69z - 44 = 0$. J'ai donc $z = -11$; donc $m = \frac{z}{11} = \frac{-11}{11} = -1$.

Après cela je ſubſtituë cette valeur de m dans $n = \frac{-kkr + kv + ktm - k^3}{vm - kkp - kkm}$, avec les valeurs de p, r, t, v, pour avoir $n = \frac{19}{19} = +1$.

Maintenant je ſubſtituë les valeurs trouvées de m, n, k, dans $y^3 + myy + ny + k$, & c'eſt $y^3 - 11yy + 11y + 1 = 0$. Avec cette équation je tente la diviſion de la propoſée, le quotient exact eſt $y^3 - 7yy + 5y - 12 = 0$. Ce diviſeur & ce quotient ſont les deux racines de la propoſée. Enfin l'on cherche les racines de ces deux équations comme Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. Ex. 6.

Si en ſuppoſant $k = +1$ la choſe n'avoit pas réüſſi, il auroit fallu faire la même choſe à l'égard de tous les diviſeurs de 12 dernier terme, de la propoſée.

5. Soit propoſée l'équation $x^6 ** + x^3 - 4xx + 6x - 2 = 0$, ou $x^6 ** + rx^3 - sxx + tx - v = 0$. Le ſecond terme qui manque, prouve qu'elle eſt le produit de deux équations du troiſiéme degré, qui n'avoient auſſi point de ſecond terme. Je ſuppoſe que c'eſt $x^3 + gx +$

$$+ gx^4 + hx^3$$

$h = 0$, $x^3 + mx + n = 0$. dont le produit eſt $x^6 *$

$$+ mx^4 + nx^3$$

$$+ hmx$$

$$+ gmxx \qquad + hn = 0.$$

$$+ gnx$$

Les troiſiémes termes $g + m = 0$, $g = -m$.

Les cinquiémes $gm = -s$, $g = \frac{s}{m} = -m$. Donc $mm = s = 4$. $m = 2$.

Dans $x^3 + mx + n = 0$, je ſubſtituë cette valeur de m, avec un des diviſeurs du dernier terme pour n, à cauſe de $hn = -2$; par exemple -1. Je trouve $x^3 + 2x - 1 = 0$, qui diviſe ſans reſte la propoſée, le quotient eſt $x^3 - 2x + 2 = 0$. Ainſi la propoſée a été produite par la multiplication de ce diviſeur & de ce quotient.

6. Lorſqu'après avoir fait ſur une équation propoſée de ſix dimenſions toutes les operations marquées n. 1. 2. 3. 4. 5. l'on n'a point pû découvrir de ſes racines : elle eſt irreductible, & proprement du ſixiéme degré, & l'on cherche ſes racines, comme Part. 5.

PARTIE QUATRIE'ME.

SECTION I.

La Façon generale de conſtruire les Problémes reduits à une Equation de trois ou quatre dimenſions.

M. DESCARTES.

OR quand on eſt aſſuré que le Problême propoſé eſt ſolide, ſoit que l'équation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, ſoit qu'elle ne monte que juſqu'au cube, on peut toûjours en trouver les racines par l'une des trois Sections coniques, laquelle que ce ſoit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puiſſe être, en ne ſe ſervant au reſte que de lignes droites & de cercles. Mais je me contenterai ici de donner une Regle generale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cauſe qu'elle eſt en quelque façon la plus ſimple.

Premierement il faut ôter le ſecond terme de l'équation propoſée, s'il n'eſt déja nul, & ainſi la reduire à telle forme $z^3 = *. apz. aaq.$ ſi la quantité inconnuë n'a que trois dimenſions; ou bien à telle, $z^4 = *. apzz. aaqz. a^3r$, ſi elle en a quatre; ou bien en prenant a pour l'unité, à telle $z^3 = *. pz. q$, & à telle $z^4 = *. pzz. qz. r.$

Après cela, Fig. 232. 233. 234. 235. ſuppoſant que la parabole FAG eſt déja décrite, & que ſon aiſſieu eſt $ACDKL$, & que ſon côté droit eſt a au 1, dont AC eſt la moitié, & enfin que le point C eſt au dedans de cette parabole, & que A en eſt le ſommet; il faut Fig. 232. 233. 235. faire $CD = \frac{1}{2}p$, & la prendre Fig. 232. 235. du même côté qu'eſt le point A, au regard du point C, s'il y a $+p$ en l'équation. Mais s'il y a $-p$, il faut Figure 233. la prendre de l'autre côté. Et du point D Figure 232. 233. 235. ou bien ſi la quantité p étoit nulle, du point

C Fig. 234. il faut élever une ligne à angles droits juſques à E, en ſorte qu'elle ſoit égale à $\frac{1}{2}q$. Et enfin du centre E il faut décrire le cercle FG, dont le demi-diametre ſoit AE, ſi l'équation n'eſt que cubique, en ſorte que la quantité r ſoit nulle. Mais quand il y a $+r$, il faut dans cette ligne prolongée AE prendre Fig. 232. d'un côté AR égale à r, & de l'autre AS égale au côté droit de la parabole, qui eſt 1 ; & ayant décrit un cercle dont le diametre ſoit RS, il faut faire AH perpendiculaire ſur AE, laquelle AH rencontre ce cercle au point H, qui eſt celui, où l'autre cercle FGH doit paſſer. Et quand il y a $-r$, il faut après avoir ainſi trouvé Fig. 235. la ligne AH, inſcrire AI, qui lui ſoit égale, dans un autre cercle, dont AE ſoit le diametre, & lors c'eſt par le point I, que doit paſſer FIG le premier cercle cherché. Or ce cercle FG peut couper ou toucher la parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 points, deſquels tirant des perpendiculaires ſur l'aiſſieu, on a toutes les racines de l'équation tant vrayes que fauſſes. A ſavoir ſi la quantité q eſt marquée du ſigne $+$, les vrayes racines ſeront celles de ces perpendiculaires, qui ſe trouveront du même côté de la parabole, que E le centre du cercle, comme FL ; & les autres comme GK ſeront fauſſes.

Mais au contraire ſi cette quantité q eſt marquée du ſigne $-$ 1 les vrayes ſeront celles de l'autre côté ; & les fauſſes ou moindres que rien ſeront du côté où eſt E le centre du cercle. Et enfin ſi ce cercle ne coupe ni ne touche la parabole en aucun point, cela témoigne qu'il n'y a aucune racine ni vraye ni fauſſe en l'équation, & qu'elles ſont toutes imaginaires. En ſorte que cette Regle eſt la plus generale & la plus accomplie qu'il ſoit poſſible de ſouhaitter.

Et la démonſtration en eſt fort aiſée. Car ſi la ligne GK trouvée, Fig. 232. par cette conſtruction ſe nomme z, AK ſera zz à cauſe de la parabole, en laquelle GK doit être moyenne proportionelle entre AK & le côté droit, qui eſt 1. Puis ſi de AK j'ôte AC, qui eſt $\frac{1}{2}$, & CD qui eſt $\frac{1}{2}p$, il reſte DK ou EM, qui eſt $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp +$

$\frac{1}{2}p$

$\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et à cauſe que DE, ou KM eſt $\frac{1}{2}q$, la toute GM eſt $z + \frac{1}{2}q$, dont le quarré eſt $zz + qz + \frac{1}{4}qq$; & aſſemblant ces deux quarrez, on a $z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$ pour le quarré de la ligne GE, à cauſe qu'elle eſt la baſe du triangle rectangle EMG.

Mais à cauſe que cette ligne GE eſt le demi-diametre du cercle FG, elle ſe peut encore expliquer en d'autres termes, à ſçavoir ED étant $\frac{1}{2}q$, & AD étant $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, EA eſt $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$ à cauſe de l'angle droit ADE, puis HA étant moyenne proportionelle entre AS, qui eſt 1, & AR qui eſt r, elle eſt $\sqrt{r}$; & à cauſe de l'angle droit EAH, le quarré de HE, ou EG eſt $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$. Si bien qu'il y a équation entre cette ſomme & la precedente. Ce qui eſt le même que $z^4 = *pzz - qz + r$. Et par conſequent la ligne trouvée GK, qui a été nommée z, eſt la racine de cette équation. Ainſi qu'il falloit démontrer. Et ſi vous appliquez ce même calcul à tous les autres cas de cette Regle, en changeant les ſignes + & − ſelon l'occaſion, vous y trouverez vôtre compte en même ſorte, ſans qu'il ſoit beſoin, que je m'y arrête.

ARTICLE I.

Conſtruction des Equations cubiques.

REGLE I.

LOrſqu'on a connu, qu'un Problême du troiſiéme degré eſt ſolide, Part. 3. Sect. 3. Art. 2. l'on fait évanoüir le ſecond terme de l'équation, s'il n'eſt pas déja nul : ce qui la reduit à cette forme $z^3 = *.apz.aaq$, ou étant $a = 1$, $z^3 = *.pz.q$. de ſorte pourtant que le troiſiéme terme apz, ou pz peut encore être nul : ainſi il y a ſix formes.

1. $z^3 = *.apz + aaq.$ ou $z^3 = *.pz + q.$
2. $z^3 = *.apz - aaq.$ ou $z^3 = *.pz - q.$
3. $z^3 = *.-apz + aaq.$ ou $z^3 = *.-pz + q.$
4. $z^3 = *.-apz - aaq.$ ou $z^3 = *.-pz - q.$
5. $z^3 = *.\quad * + aaq.$ ou $z^3 = *.\quad * + q.$
6. $z^3 = *.\quad * - aaq.$ ou $z^3 = *.\quad * - q.$

Car pour les formes, où le dernier terme aaq ou q manque ; elles

donnent un Problême plan, $z^3 = * \pm apz *$ ſe reduit, en diviſant tout par z, à $zz = * \pm ap$, $z = \pm \sqrt{\pm ap}$, qui eſt un Problême plan.

REGLE II.

Les lignes a, p, q ſont près de Fig. 232.

Si l'on veut conſtruire le Problême cubique avec le cercle & la parabole: l'on décrit d'abord une parabole, dont le parametre ou côté droit eſt $a = 1$, le ſommet A Fig. 234. 236. 237. 238. l'axe $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$.

Fig. 234. 236. 237. 238.

REGLE III.

Lorſqu'il y a $+p$ dans l'équation, l'on prend encore $CD = \frac{1}{2}p$ ſur ce même axe Fig. 236. du même côté qu'eſt le point C à l'égard du point A. Mais lorſqu'il y a $-p$, l'on prend $CD = \frac{1}{2}p$ ſur l'axe prolongé s'il eſt neceſſaire, de l'autre côté de C, c'eſt-à-dire en retournant de C vers A, Fig. 237. 238. Et lorſque $p = o$, $pz = o$, l'on ne prend point CD, & l'on n'a pas le point D, Fig. 234.

REGLE IV.

Au point D Fig. 236. 237. 238. s'il y a p dans l'équation, ou au point C Fig. 234. ſi $p = o$, l'on éleve DE ou $CE = \frac{1}{2}q$ perpendiculaire à l'axe AC. Et du point E comme centre, de l'intervale EA Fig. 234. 236. 237. 238. l'on décrit le cercle FGA.

REGLE V.

Il peut y avoir autant de points d'interſection du cercle avec la parabole, qu'il peut y avoir de racines dans l'équation, que l'on conſtruit, c'eſt-à-dire qu'il peut y en avoir trois; s'il y a un point touchant, il n'y en aura qu'un coupant, à cauſe que le point touchant équivaut à deux coupans, Part. 3. Sect. 2. Art. 2. Il peut auſſi arriver que le cercle ne touche, ni ne coupe la parabole en aucun point.

De tous les points d'interſection ou de contact l'on abaiſſe des perpendiculaires ou des appliquées ſur l'axe, ce ſont autant de racines de l'équation à conſtruire. L'appliquée tirée d'un point touchant marque deux racines égales, ainſi quand le cercle touche en un point la parabole, il la peut couper en un autre point ſeulement, qui donnera la troiſiéme racine: mais il ne peut pas la toucher une ſeconde fois, autrement il y aura quatre racines dans une équation cubique, ce qui ne ſe peut. Part. 2. Sect. 1. Art. 2. n. 9. Les points qui manquent, donnent à connoître les racines imaginaires: ainſi il y a une racine imaginaire, s'il n'y a que deux points coupans, ou un touchant; & deux imaginaires, s'il n'y a qu'un point coupant; mais il ne peut pas y avoir trois racines imaginaires, parceque

le cercle coupant la parabole au ſommet A, doit encore neceſſairement la couper ailleurs.

Au reſte toutes les conſtructions ſuppoſent que les équations cubiques ſont élevées au quatriéme degré par la multiplication de $z = o$, de ſorte que $z^3 = * + pz + q = o$ eſt équivalemment $z^4 = * + pzz + qz = o$. Car 1° la ſection faite au ſommet de la parabole donne une racine auſſi bien que les autres ſections, & ce ne peut être que $z = o$; 2° toutes les preuves donnent le premier terme de quatre dimenſions & tous les termes multipliez par l'inconnuë, leſquels on diviſe d'abord par l'inconnuë égale à zero. Ainſi ces preuves donnent quatre racines.

REGLE VI.

Lorſqu'il y a $+ q$ dans l'équation à conſtruire, les racines vrayes ſont du même côté de l'axe, où le centre E ſe trouve, comme FL; & les fauſſes ſont de l'autre KG Figure 232. Au contraire lorſqu'il y a $- q$ les racines fauſſes ſont du côté, où eſt le centre E, & les vrayes de l'autre.

Venons aux Exemples, & commençons par les plus ſimples.

EXEMPLE I. $z^3 = ** + aaq$, $z^3 = ** + q$.

1. L'On a Liv. 1. Part. 1. Sect. 1. Probl. 4. $z^3 = \frac{1}{2}a^3$, qui ſe reduit en faiſant $\frac{1}{2}a = q$, $a = 1$, à $z^3 = aaq = q$. L'on a trouvé dans ce même endroit la valeur de z, en ſuivant les Regles de cet Article.

2. L'on a encore dans ce même endroit $x^3 = \frac{1}{2}c^3$, ou $x^3 = q$ en faiſant $\frac{1}{2} = q$, $c = 1$. La valeur de x peut ſe trouver de la même façon.

3. L'on a Liv. 1. Part. 2. Art. 1. n. 1. $x^3 = a + \sqrt{aa + bb}$, ou $x^3 = q$ en faiſant $a + \sqrt{aa + bb} = q$.

Je décris Fig. 234. une parabole, dont le parametre eſt la ligne a, que je prends pour l'unité Regle 2. ſur l'axe AB je coupe $AC = \frac{1}{2}$ Reg. 3. au point C Regle 4. j'éleve $CE = \frac{1}{2}q$ perpendiculaire à l'axe. Et du point E comme centre, de l'intervale EA, je décris le cercle AGF, qui coupe la parabole en F. L'appliquée FL eſt la valeur poſitive de x Regle 6. parcequ'il y a $+ q$. Joignez EA, EF; prolongez LF en I; du centre E abaiſſez EM perpendiculaire ſur FI. Nommez AL. v; LF, x. Fig. 234.

Dém. EC eſt $\frac{1}{2}q = LM$, FM eſt $LM - LF$, $\frac{1}{2}q - x$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 =$ parametre $1 \times AL$, $xx = 1v$, $v = xx = AL$; CL eſt $AL - AC$, $xx - \frac{1}{2} = EM$.

Maintenant dans le triangle rectangle ECA, $\overline{EA}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}$. Dans le triangle rectangle EMF, $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, x^4

$+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}qq-qx$. Mais les rayons EA, EF ſont égaux : donc $\overline{EA}^2 = \overline{EF}^2$, $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}=x^4+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}qq-qx$; $x^4-qx=o$, $x^3=q$. Ainſi FL a été bien ſuppoſée égale à x. Ce qu'il falloit démontrer.

La racine vraye de $x^3=q$ eſt donc $x=\sqrt[3]{q}$; ſi l'on diviſe l'équation $x^3-q=o$ par $x-\sqrt[3]{q}$, le quotient eſt $xx+x\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{qq}$, qui contient les deux autres racines qui ſont $x=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{q}\pm\sqrt{-\frac{1}{4}\sqrt[3]{qq}}$ imaginaires.

EXEMPLE II. $z^3=**-aaq$. $z^3=**-q$.

FAites la même conſtruction que Ex. 1. n. 3. parcequ'il y a $-q$, l'appliquée FL eſt $-z$ Regle 6.

Dém. EC eſt $\frac{1}{2}q=LM$; FM eſt $LM-LF$, $\frac{1}{2}q+z$; par la nature de la parabole AL eſt zz comme Ex. 1. & $CL=AL-AC$, $zz-\frac{1}{2}=EM$.

Vous avez auſſi dans le triangle rectangle ECA, $\overline{EA}^2=\overline{EC}^2+\overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{4}$; dans le triangle rectangle EMF, $\overline{EF}^2=\overline{EM}^2+\overline{FM}^2$, $z^4-zz+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}qq+qz+zz$. Et ſi vous comparez $\overline{EA}^2$ & $\overline{EF}^2$, il viendra $z^4+qz=o$, $z^3=-q$. $z=\sqrt[3]{-q}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Les deux autres racines ſont $z=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-q}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{qq}}$ imaginaires.

EXEMPLE III. $z^3=*+apz+aaq$. $+z^3=*pz+q$.

1. L'On a Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 4. n. 3. $x^3+\frac{1}{2}ppx-pvx-\frac{1}{2}app=o$. qui ſe reduit à $x^3**-3x-1=o$, en prenant $p=1$, $v=3\frac{1}{2}$, $a=2$. $x^3=*+3x+1$. où 3 répond à p de la formule, & 1 à q.

FIG. 236. Il faut décrire Fig. 236. la parabole AF, dont le parametre ſoit $p=1$, l'axe AL, le ſommet A, Regle 2. & couper $AC=\frac{1}{2}$. Enſuite Regle 3. l'on prendra $CD=\frac{1}{2}$. Parcequ'il y a $+3$, au point D, Regle 4. l'on élevera la perpendiculaire $DE=\frac{1}{2}$; & du point E comme centre, de l'intervale EA l'on décrira le cercle FGA, qui coupe la parabole AF aux points F, G, g. Les droites FL, GK, gk tirées de ces points perpendiculairement ſur l'axe AL ſont les valeurs de x Regle 5. & Regle 6. FL eſt une racine vraye, GK, gk deux fauſſes. Ce qu'il faut montrer au point G, en ſuppoſant $GK=-x$, $AK=y$.

Dém. ED eſt $\frac{1}{2}=mK$; Gm eſt $GK+mK$, $-x+\frac{1}{2}$; par la nature de la parabole $\overline{GK}^2=$ parametre $1\times AK$, $xx=1y$, $y=xx=AK$; AD eſt $AC+CD$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$; KD eſt $AD-AK$, $2-xx=Em$; ED eſt $\frac{1}{2}=mK$; $Gm=GK+Km$, $-x+\frac{1}{2}$.

Maintenant $\overline{EA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$, $4 + \frac{1}{4}$; $\overline{EG}^2 = \overline{Gm}^2 + \overline{Em}^2$, $xx - x + \frac{1}{4} + 4 - 4x + x^4$. Donc $\overline{EA}^2 = \overline{EG}^2$, $4 + \frac{1}{4} = xx - x + \frac{1}{4} + 4 - 4xx + x^4$; $x^4 - 3xx - x = 0$; $x^3 = * + 3x + 1$. Ce qu'il &c.

On peut faire la démonſtration au point F en ſuppoſant $FL = +x$; $AL = y$; & au point g en ſuppoſant $gk = -x$, $Ak = y$.

2. L'on a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 1. n. 2. $x^3 - 7xx + 5x - 12 = 0$, dont vous ôterez le ſecond terme en faiſant $x - \frac{7}{3} = v$, $v + \frac{7}{3} = x$.

Ce qui donne $v^3 * - \frac{34}{3}v - \frac{645}{27} = 0$; $v^3 = * + \frac{34}{3}v + \frac{215}{9}$. Faiſons $1 = a$, $\frac{34}{3} = p$, $\frac{215}{9} = q$. L'équation ſe changera en $v^3 = * + apv + aaq$.

On conſtruira cette équation en coupant $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, en élevant la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$; le cercle ne coupera la parabole qu'en un point F, & l'on n'aura qu'une racine vraye; les deux autres étant imaginaires.

FL, v étant ainſi trouvé, ſi on lui ajoûte $\frac{7}{3}$, l'on aura la valeur de x qu'on cherche.

3. On pourra conſtruire de la même maniere l'équation, qui ſe trouve Liv. 3. Part. 2. Sect. 2. Art. 3. n. 2.

EXEMPLE IV. $z^3 = * + apz - aaq$. $z^3 = * + pz - q$.

IL n'y a point d'autre difference de l'Exemple 3. ſi ce n'eſt que Regle 6. FL eſt la racine fauſſe, & que les autres ſont les vrayes.

1. Il ſera donc aiſé de conſtruire l'équation de Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 4. n. 3. $x^3 * + \frac{1}{2}ppx - pvx + \frac{1}{2}app = 0$, qui ſe reduit à $x^3 = * + 3x - 1$, en faiſant $p = 1$, $v = \frac{3}{2}$, $a = 2$. L'on trouvera deux racines vrayes GK, gk, & une fauſſe FL.

2. Et l'équation de Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 5. §. 2. $x^3 * - \frac{1}{3}ax\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3 = 0$, qui ſe reduit à $x^3 = * + apx - aaq$, en faiſant $a = 1$, $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2} = p$, $\frac{2}{27}a = q$. L'on trouvera deux racines vrayes GK, gk, une fauſſe FL.

C'eſt la même choſe de $y^3 * - \frac{1}{3}ay\sqrt[3]{2} + \frac{2}{27}a^3$, qui eſt au même endroit.

3. L'on a Liv. 2. Part. 2. Sect. 3. Art. 1. Ex. 3. $y^3 - 6ayy + 9aay + 2a^3 = 0$, qui ne peut ſe diviſer par aucun binome, l'on fait Regle 1. évanoüir le ſecond terme, en prenant $y - 2a = z$, $z + 2a = y$, & la reduite eſt $z^3 * - 3aaz + 4a^3 = 0$, $z^3 = * + 3aaz - 4a^3$. $z^3 = * + apz - aaq$, en faiſant $3a = p$, $4a = q$.

Pour la conſtruction décrivez Regle 2. la parabole AF, Fig. 237. dont le parametre eſt $a = 1$, le ſommet A, l'axe AC; prenez $AC = \frac{1}{2}$ Fig. 237.

$\frac{1}{2}a$; parcequ'il y a $-p$; prenez $CD = \frac{1}{2}p$, en allant de C vers A Regle 3. Au point D Regle 4. élevez la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Du point E comme centre, de l'intervale EA, décrivez le cercle AF, qui coupera la parabole au point F; tirez FL appliquée à l'axe; parcequ'il y a $+q$, c'eſt une racine vraye. Nommez FL, z; AL, v. Joignez EA, EF; prolongez FL en M, abaiſſez la perpendiculaire EM.

Dém. ED eſt $\frac{1}{2}q = LM$; FM eſt $LM - LF$, $\frac{1}{2}q - z$; DA eſt $CD - AC$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = av$, $v = \frac{zz}{a} = AL$; $DL = DA + AL$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a + \frac{zz}{a} = EM$.

A preſent dans les triangles rectangles EDA, EMF, qui ont les rayons EA, EF pour baſes; $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}aa = \overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MF}^2$, $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}ap + \frac{pzz}{2a} + \frac{1}{4}aa - zz + \frac{z^4}{aa} + \frac{1}{4}qq - qz + zz$, qui ſe reduit à $\frac{pzz}{2a} + \frac{z^4}{aa} - q\zeta = o$, $z^3 = * - apz + aaq$. Ce qu'il, &c.

Le cercle AF ne peut jamais couper la parabole, que dans un point, ainſi, il ne peut y avoir qu'une valeur de z. Si à z ainſi trouvée vous ajoûtez $\frac{1}{2}a$, vous aurez la valeur de y.

EXEMPLE V. $z^3 = * - apz + aaq$. $\zeta^3 = * - pz + q$.

2. ON a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 3. n. 3. $x^3 - xx + 2x - 1 = o$, dont on fait évanoüir le ſecond terme en prenant $x - \frac{1}{3} = z$, $z + \frac{1}{3} = x$, la reduite eſt $z^3 * + \frac{1}{3}z - \frac{11}{27} = o$, $z^3 = * - \frac{1}{3}z + \frac{11}{27}$ qui ſe conſtruira comme l'équation de n. 1.

On a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 4. n. 3. $z^3 = * - zz + 1$. dont la conſtruction eſt ſemblable à celle de n. 1.

EXEMPLE VI. $z^3 = * - apz - aaq$. $z^3 = * - pz - q$.

IL n'y a point d'autre difference de cet Exemple & du precedent, ſi ce n'eſt que Regle 6. la racine FL eſt $-z$, parcequ'il y a $-q$.

1. On a Liv. 3. Sect. 5. Art. 4. n. 4. $y^3 - yy + y + 1 = o$. Pour faire évanoüir le ſecond terme, nous prendrons $y - \frac{1}{3} = z$, $z + \frac{1}{3} = y$, & nous formerons $z^3 * + \frac{2}{3}z + \frac{14}{27} = o$; $z^3 = * - \frac{2}{3}z - \frac{14}{27}$. ou $z^3 = * - apz - aaq$, en faiſant $a = 1$. $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{14}{27}$.

Fig. 238. La conſtruction ſe fait Fig. 238. en prenant $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, $DE = \frac{1}{2}q$; le parametre de la parabole AC étant a. L'appliquée FL eſt $-z$. Nommons AL, v.

Dém. ED eſt $\frac{1}{2}q = LM$; FM eſt $FL - ML$, $-z - \frac{1}{2}q$; DA eſt $AC - CD$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = av$, $v = \frac{zz}{a} = AL$; $DL = AL - AD$, $\frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p = EM$.

Après cela dans les triangles rectangles EDA, EMF, dont les baſes EA, EF ſont égales, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp = \overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MF}^2$, $\frac{z^4}{aa} - zz + \frac{pzz}{a} + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + zz + qz + \frac{1}{4}qq$; qui ſe reduit à $\frac{z^4}{aa} + \frac{pzz}{a} + qz = o$; $z^3 = * - apz - aaq$. Ce qu'il, &c.

Si à FL, $-z$ ainſi trouvée l'on ajoûte $\frac{1}{2}$, l'on aura $z + \frac{1}{2} = y$.

2. Il y a Liv. 2. Part. 3. Sect. 2. Art. 5. §. 1. n. 5. $y^3 - \frac{1}{2}ayy + 3aay + 2a^3 = o$.

Pour ôter la fraction je fais $2y = v$, $y = \frac{v}{2}$, je change l'inconnuë y en v, je multiplie le ſecond terme par 2, le troiſiéme par 4, le quatriéme par 8. Il vient $v^3 - 3avv + 12aav + 16a^3 = o$. Pour ôter le ſecond terme je prends $v - a = z$, $z + a = v$, ce qui donne la reduite $z^3 * + 9aaz + 26a^3 = o$; $z^3 = * - 9aaz - 26a^3$, $z^3 = * - apz - aaq$, en ſuppoſant $p = 9a$, $q = 26a$.

3. Il faut conſtruire l'équation $z^3 = * - pz - q$. étant $p = q = 1$ Fig. 239. Fig. 239.

Le parametre de la parabole AF eſt 1 AC eſt $\frac{1}{2}$, CD eſt $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p$; & le point D tombe ſur le ſommet A; DE eſt $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}q = ML = EF$; FL, $-z$; FM eſt $FL - ML$, $-z - \frac{1}{2}$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = 1 \times AL$, v; $zz = v = EM$.

Dém. Dans le triangle rectangle EMF; $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{1}{4} = z^4 + zz + z + \frac{1}{4}$; $z^4 + zz + z = o$; $z^3 = * - z - 1 = * - pz - q$. Ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE II.

Conſtruction des Equations quarré-quarrées.

REGLE I.

LOrſqu'on connoît qu'un Problême du quatriéme degré eſt ſolide, l'on fait évanoüir le ſecond terme de l'équation, s'il n'eſt pas déja nul; ce qui le reduit à cette forme $z^4 = * . apzz . aaqz . a^3r$, ou ſuppoſant $a = 1$, $z^4 = * . pzz . q\zeta . r$. de ſorte pourtant que outre le ſecond terme, il peut encore manquer le troiſiéme : ce qui donne douze formes.

1. $z^4 = * + apzz + aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * + pzz + q\zeta + r$.
2. $z^4 = * + apzz - aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * + pzz - qz + r$.
3. $z^4 = * + apzz + aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * + pzz + qz - r$.
4. $\zeta^4 = * + apzz - aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * + pzz - qz - r$.
5. $z^4 = * - apzz + aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * - pzz + qz + r$.
6. $z^4 = * - apzz - aaqz + a^3r$. ou $\zeta^4 = * - pzz - qz + r$.
7. $z^4 = * - apzz + aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * - pzz + qz - r$.

8. $z^4 = * - apzz - aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * - pzz - qz - r$.
9. $z^4 = * \quad * + aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * \quad * + qz + r$.
10. $z^4 = * \quad * - aaqz + a^3r$. ou $z^4 = * \quad * - qz + r$.
11. $z^4 = * \quad * + aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * \quad * + qz - r$.
12. $z^4 = * \quad * - aaqz - a^3r$. ou $z^4 = * \quad * - qz - r$.

Car pour les formes où le cinquiéme manque avec le ſecond $z^4 = * . apzz . aaqz *$, elles ſe reduiſent au troiſiéme après qu'on a diviſé par z, $z^3 = * . apz . aaq$. celles dans leſquelles le quatriéme terme manque outre le ſecond $z^4 = * . apzz * . a^3r$, elles ſont du ſecond degré $z^4 . apzz = . a^3r$. celles où le ſecond, le troiſiéme & le quatriéme termes ſont nuls $z^4 = *** . a^3r$, ce ſont encore des Problêmes plans $zz = \sqrt{a^3r}$, $z = \sqrt{\sqrt{a^3r}}$.

REGLE II.

Comme Regle 2. Art. 1.

REGLE III.

Comme Regle 3. Art. 1.

REGLE IV.

Fig. 232. 233. 235. 240. 241. 242. 243. 244.

Au point D Fig. 232. 233. 235. lorſqu'il y a p l'on éleve la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$; ou au point C, s'il n'y a point de p, l'on éleve $CE = \frac{1}{2}q$. Fig. 240. 241. 242.

REGLE V.

On joint EA, ſur laquelle prolongée l'on prend d'un côté du ſommet A la ligne $AS = a = 1$, & de l'autre $AR = r$. Enſuite ſur le diametre RS l'on décrit le cercle RHS, & au point A l'on éleve la perpendiculaire AH, qui coupera le cercle RHS au point H.

REGLE VI.

Lorſqu'il y a $+r$ dans l'équation, du point E comme centre, de l'intervale EH l'on décrit le cercle HGF, Fig. 232. 233. 243.

Lorſqu'il y a $-r$, avant que de décrire ce cercle GF, l'on décrit encore ſur le diametre AE le demi-cercle AIE, dans lequel on inſcrit la droite $AI = AH$. Alors du centre E, de l'intervale EI l'on décrit le cercle FGI, Fig. 242. 235. 244.

REGLE VII.

Le cercle FH peut couper la parabole en autant de points, que l'équation peut avoir de racines, c'eſt-à-dire en quatre. Chaque point touchant marque deux racines égales; ſi le cercle coupe la parabole au ſommet il y aura

aura une racine égale à zero, Fig. 244. ſi le cercle coupe la parabole en un point, & la touche en un autre, il y aura une racine imaginaire; s'il la coupe en un point ſeulement ſans la toucher, il y en aura trois imaginaires; s'il la touche en un point ſans la couper; il y en aura deux imaginaires: enfin s'il ne la coupe & ne la touche point, les quatre racines ſont imaginaires; elles ſont auſſi toutes imaginaires, lorſque le cercle ne peut pas être décrit, comme Fig. 241. De chaque point coupant ou touchant l'on tire des appliquées à l'axe AC, qui ſont les racines de l'équation.

REGLE VIII.

Lorſque dans l'équation il y a $+q$, les racines vrayes ſont du même côté de l'axe, où le centre E ſe trouve, & les fauſſes de l'autre. Au contraire lorſqu'il y a $-q$, les racines fauſſes ſont du côté de l'axe, où le centre E ſe trouve, & les vrayes de l'autre.

Je vais donner des Exemples de pluſieurs formules, en commençant par les plus ſimples.

EXEMPLE I. $\zeta^4 = ** + aaqz + a^3r$. $z^4 = ** + qz + r$.

DEcrivons Fig. 240. la parabole FAG Regle I. dont le parametre AP, $a = 1$, le ſommet A, l'axe AC, ſur lequel nous couperons $AC = \frac{1}{2}a$. Au point C élevons la perpendiculaire $CE = \frac{1}{2}q$ Regle 4. Par les points A, E menons l'infinie ES, ſur laquelle Regle 5. nous prendrons $AS = a$, $AR = r$; ſur le diametre RS nous décrirons le demi-cercle RHS; & au point A nous éleverons AH perpendiculaire à RS. Parcequ'il y a $+r$, du centre E Regle 6. de l'intervale EH décrivons le cercle FGH, qui coupe la parabole aux points F, G, deſquels nous tirerons ſur l'axe AC les appliquées FL, GK, qui ſont les racines de l'équation, Regle 7. & parcequ'il y a $+q$, Regle 8. FL eſt une racine vraye $+z$, GK une fauſſe $-z$. Joignons EH, EF, EG; du point E abaiſſons ſur FL la perpendiculaire EM, & élevons ſur GK prolongée la perpendiculaire Em. Nommons AL, AK, x. FIG. 240.

Dém. Au point F, $\overline{AH}^2 = AR \times AS$, ar; & $AH = \sqrt{ar}$: de plus $ML = EC$, $\frac{1}{2}q$; $FM = FL - ML$, $z - \frac{1}{2}q$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = AP \times AL$, $zz = ax$, $x = \frac{zz}{a} = AL$; $CL = AL - AC$, $\frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a = EM$; $\overline{EA}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$ dans le triangle rectangle ECA.

Maintenant dans les triangles rectangles EMF, EAH, nous avons $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{z^4}{aa} - zz + \frac{1}{4}aa + zz - q\zeta + \frac{1}{4}qq = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$; $\frac{z^4}{aa} - q\zeta = ar$; $\zeta^4 = ** + aaq\zeta + a^3r$.

Au point G nous avons auſſi $\overline{AH}^2 = ar$; $mK = EC$, $\frac{1}{2}q$; $mG = mK + KG$, $\frac{1}{2}q - z$; $\overline{KG}^2 = AP \times AK$, $zz = ax$; $x = \frac{zz}{a} = AK$; $KC = AC - AK$, $\frac{1}{2}a - \frac{zz}{a} = Em$; $\overline{EA}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$.

De plus dans les triangles rectangles EmG, EAH, nous avons $\overline{EG}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mG}^2$, $\frac{1}{4}aa - zz + \frac{z^4}{aa} + \frac{1}{4}qq - qz + \zeta\zeta = \overline{EH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$, $z^4 = ** + aaqz + a^3r$. Ce qu'il falloit démontrer.

FL, z eſt donc la racine vraye ; KG, $-\zeta$ la fauſſe ; les deux autres ſont imaginaires, Regle 7.

EXEMPLE II. $z^4 = ** - aaqz + a^3r$. $z^4 = ** - qz + r$.

COmme Exemple I. excepté Regle 8. FL, $-z$; KG, $+z$; $FM = FL - ML$, $-\zeta - \frac{1}{2}q$, $mG = mK + KG$, $\frac{1}{2}q + z$.

Au point F dans les triangles rectangles EMF, EAH ; $\overline{EF}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{FM}^2$, $\frac{z^4}{aa} - \zeta\zeta + \frac{1}{4}aa + zz + qz + \frac{1}{4}qq = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$; $\frac{z^4}{aa} + qz = ar$; $z^4 = ** - aaqz + a^3r$.

Au point G dans les triangles rectangles EmG, EAH ; $\overline{EG}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mG}^2$, $\frac{1}{4}aa - zz + \frac{z^4}{aa} + \frac{1}{4}qq + q\zeta + \zeta\zeta = \overline{EH}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$; $\frac{z^4}{aa} + qz = ar$; $z^4 = ** - aaq\zeta + a^3r$.

EXEMPLE III. $\zeta^4 = ** + aaqz - a^3r$. $z^4 = ** + qz - r$.

1. QUe cette équation ſoit $z^4 = ** + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$, de ſorte que $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $a = 1$.

FIG. 241. Je décris Fig. 241. la parabole FAG, dont le parametre $AP = a$, le ſommet A, l'axe AC Regle 2. ſur lequel je prends $AC = \frac{1}{2}a$. Au point C Regle 4. j'éleve la perpendiculaire $EC = \frac{1}{2}q = \frac{1}{4}$. Par les points E, A Regle 5. je mene l'infinie EAS, ſur laquelle je prends $AS = a$, $AR = \frac{1}{2} = r$; ſur le diametre AR je décris le demi-cercle RHS, & au point A j'éleve la perpendiculaire AH. Et parcequ'il y a $-r$, Regle 6. ſur le diametre AE je décris encore le demi-cercle AiE, dans lequel il faut inſcrire une ligne $AI = AH$; mais comme cela ne ſe peut, à cauſe que le demi-cercle AiE eſt trop petit, le Problême eſt impoſſible, Regle 7. & toutes les racines de l'équation ſont imaginaires.

2. Que l'équation ſoit $z^4 = ** + 5z - \frac{1}{2}$; & $q = 5$, $r = \frac{1}{2}$, $a = 1$.

FIG. 242. Je décrirai Regle 2. Fig. 242. la parabole FAG, dont le parametre 1, le ſommet A, l'axe AC, ſur lequel je coupe $AC = \frac{1}{2}$. Au point C Regle 4. j'éleve $CE = \frac{1}{2}$. Je tire l'indeterminée EAS Regle 5. ſur laquelle je coupe $AS = 1$, $AR = \frac{1}{2}$; ſur le diametre RS je décris le

demi-cercle RHS ; & au point A j'éleve la perpendiculaire AH. Parce-qu'il y a $-r$, Regle 6. je décris encore le demi-cercle EIA ſur le diametre AE, dans ce demi-cercle j'inſcris $AI = AH$; & du centre E, du rayon EI je décris le cercle IfF, qui coupe la parabole aux points f, F ; d'où Regle 7. je tire les appliquées fl, FL perpendiculaires à l'axe. Ces deux appliquées ſont Regle 8. les deux valeurs vrayes de l'équation. Je nomme FL, fl, $+z$; AL, Al, $+x$; du point E j'abaiſſe EM perpendiculaire ſur FL, & j'éleve Em perpendiculaire ſur lf prolongée, je tire encore les rayons égaux EI, EF, Ef.

Dém. Au point f. $\overline{AH}^2 = RA \times AS$, $\frac{1}{2} = \overline{AI}^2$; CE eſt $\frac{1}{2} = lm$; mf eſt $ml - fl$, $\frac{1}{2} - zz$; par la nature de la parabole $\overline{fl}^2 = AP \times Al$, $zz = 1x = Al$; $Cl = AC - Al$, $\frac{1}{2} - zz = Em$; $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2$, $\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2}$; & dans le triangle EIA, $\overline{EI}^2 = \overline{EA}^2 - \overline{AI}^2$, $\frac{13}{2} - \frac{1}{2} = 6$.

A preſent dans le triangle rectangle Emf, l'on a $\overline{Ef}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mf}^2$, $\frac{1}{4} - zz + z^4 + \frac{25}{4} - 5z + zz = \overline{EI}^2$, 6 ; $z^4 - 5z + \frac{1}{2} = 0$; $z^4 = ** + 5z - \frac{1}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Le même peut ſe démontrer au point F. Ainſi FL, fl ſont les deux racines vrayes de l'équation, les autres Regle 7. ſont imaginaires.

EXEMP. IV. $z^4 = * + apzz + aaqz + a^3r$. $z^4 = * + pzz + qz + r$.

ON a Liv. 3. Part. 3. Sect. 5. Art. 4. n. 2. $z^4 - 11z^3 + 21zz - 7z + 1 = 0$.

Il y en a auſſi une ſemblable, Art. 2. n. 2. Pour ôter ſon ſecond terme, ſoit $z - \frac{11}{4} = v$, $v + \frac{11}{4} = z$. La reduite eſt $v^4 * - \frac{390}{16} vv - \frac{3704}{64} v \frac{7939}{256} = 0$. L'on fera diſparoître le ſecond terme en prenant $4v = x$, $\frac{x}{4} v$, & après avoir changé x en v, en multipliant le ſecond terme par 4, le troiſiéme par 16, le quatriéme par 64, le cinquiéme par 256 ; la transformée ſera $x^4 = * + 390xx + 3704x + 7939$. Soit $70 = a$, que je conſidere comme l'unité ; $p = \frac{390}{70}$, afin que ap ſoit 390 ; $aa = 4900$; $q = \frac{3704}{4900}$, afin que aaq ſoit 3704 ; $a^3 = 343000$, $r = \frac{7939}{343000}$; afin que $a^3 r$ ſoit 7939 ; & la derniere transformée ſera $x^4 = * + apzz + aaqz + a^3 r$.

On décrira Fig. 243. la parabole FAG, dont le parametre $AP = a$, le ſommet A, l'axe AC Regle 2. ſur lequel on prendra $AC = \frac{1}{2}a$, & & Regle 3. $CD = \frac{1}{2}p$. Au point D Regle 4. l'on élevera la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Par les points E, A Regle 5. l'on tirera l'infinie AS, ſur laquelle on coupera d'un côté $AS = a$, de l'autre $AR = r$; ſur le diametre RS l'on décrit le demi-cercle RHS, & au point A l'on éleve la perpendiculaire AH. Du centre E Regle 6, de l'intervale EH, l'on décrira le cercle HGF, qui coupe la parabole aux points G, F : deſquels FIG. 243.

Regle 7. l'on mene les appliquées à l'axe ; FL, qui Regle 8. eſt la racine vraye de l'équation ; GK, qui en eſt la fauſſe ; les deux autres étant imaginaires. L'on nommera donc $FL, +x$; $GK, -x$; $AK, AL ; y$; $AD, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; du point E l'on tirera les perpendiculaires EM, Em ſur FL, GK prolongées ; & les rayons égaux EH, EG, EF.

Dém. Au point G. $\overline{AH}^2 = EA \times AS$, ar ; dans le triangle rectangle EDA, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ap + \frac{1}{4}pp$; DE eſt $\frac{1}{2}q = Km$; $Gm = Km + GK$, $\frac{1}{2}q - x$; par la nature de la parabole $\overline{GK}^2 = AP \times AK$, $xx = ay$, $y = \frac{xx}{a} = AK$; KD eſt $AD - AK$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p - \frac{xx}{a} = Em$.

Maintenant dans les triangles rectangles EmG, EAH, $\overline{EG}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mG}^2 = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, prenez les valeurs de $\overline{EG}^2$ & de $\overline{EH}^2$, vous trouverez $x^4 = * + apxx + aaqx + a^3r$.

On fera aiſément la démonſtration au point F. Quand on a ainſi trouvé FL, x ; ſi on la diviſe par 4, ce ſera $\frac{x}{4} = v$, & ſi à v l'on ajoûte $\frac{11}{4}$, l'on aura $v + \frac{11}{4} = z$ que l'on cherche. De même KG eſt $-x$, $-\frac{x}{4} = -v$, $-v - \frac{11}{4} = -z$.

Ex. V. $z^4 = * + apzz - aaqz + a^3r$. $z^4 = * + pzz - qz + r$.

C'Eſt l'Exemple que M. DESCARTES conſtruit, & qu'il démontre
FIG. 231. Fig. 232. L'on fait la même conſtruction que dans l'Exemple IV. il faut ſeulement concevoir encore les rayons EG, EF tirez, & Em perpendiculaire ſur FL.

Dém. Au point F. Soit $FL, +z$; $AL, +y$; $AD = AC + CD$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; $\overline{AH}^2 = RA \times AS$, $1r$; car SA égale au parametre de la parabole eſt 1 ; dans le triangle rectangle EDA, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ap + \frac{1}{4}pp$; DE eſt $\frac{1}{2}q = mL$; $FM = FL - mL$, $z - \frac{1}{2}q$; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 =$ le parametre $1 \times AL$, $zz = 1y$, $= AL$; $DL = AL - AD$, $zz - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = Em$.

Après cela dans les triangles rectangles EmF, EAH, nous avons $\overline{EF}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{Fm}^2 = \overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, ce qui donne $z^4 = * + pzz + qz + r$.

Ex. VI. $z^4 = * + apzz - aaqz - a^3r$. $z^4 = * + pzz - qz - r$.

SOit l'équation à conſtruire $z^4 = * + 5zz - 2z - \frac{1}{2}$, de ſorte que $a = 1$, $p = 5$, $q = 2$. $r = \frac{1}{2}$.

FIG. 235. Décrivez Fig. 235. la parabole FGA, dont le parametre eſt $a = 1$, le ſommet A, l'axe AC, ſur lequel vous coupez $AC = \frac{1}{2}a$; au deſſous de C, parcequ'il y a $+p$, Regle 3. vous prenez encore $CD = \frac{1}{2}p$. Au point D Regle 4. élevez la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Par les points E, A,

Regle 5. menez l'infinie EAS, ſur laquelle vous coupez $AS = a$, $AR = r$; ſur le diametre RS décrivez le demi-cercle RHS, & au point A élevez la perpendiculaire AH. Parcequ'il y a $-r$, Regle 6. ſur le diametre AE vous décrivez encore le demi-cercle AIE, dans lequel vous inſcrivez $AI = AH$, & du centre E, de l'intervale EI, vous décrivez le cercle IGF, qui coupe la parabole aux points F, f, G, g; deſquels Regle 7. vous tirez les appliquées à l'axe FL, fl, GK, gk. Parcequ'il y a $-q$, FL, fl ſont les valeurs fauſſes $-z$, GK, gk les vrayes $+z$; & l'équation a quatre racines réelles. Les AL, Al, AK, Ak ſont $+x$. Joignez EF, Ef, EG, Eg; & du point E tirez des perpendiculaires ſur chaque appliquée.

Dém. Au point G. $\overline{AH}^2 = AS \times AR$, $ar = AI$; AD eſt $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p$; & dans le triangle rectangle EDA, $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq$. Concevez le triangle rectiligne EIA, $\overline{EI}^2 = \overline{EA}^2 - \overline{AI}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq = ar$; par la nature de la parabole $\overline{KG}^2 = a \times KA$, $zz = ax$, $x = \frac{zz}{a} = AK$; $MK = ED$, $\frac{1}{2}q$; $GM = z + \frac{1}{2}q$; $DK = \frac{zz}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = Em$.

Après cela dans les triangles rectangles EMG, EIA, vous avez $\overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{GM}^2 = \overline{EI}^2$, ce qui donne $z^4 = * + apzz - aaqz - a^3r$.

Ex. VII. $z^4 = * - apzz + aaqz + a^3r$. $z^4 = * - pzz + qz + r$.

LEs valeurs de a, p, q, r, ſont auprès de Fig. 239.

Il faut Regle 2. décrire la parabole FGA, Fig. 233. dont le parametre eſt a, le ſommet A, l'axe AC, ſur lequel on prend $AC = \frac{1}{2}a$. Sur l'axe prolongé au deſſus du ſommet Regle 3. parcequ'il y a $-p$, il faut prendre $CD = \frac{1}{2}p$; & au point D Regle 4. élever la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$. Par les points E, A, Regle 5. l'on doit tirer l'indefinie AS, & prendre $AS = a$, $AR = r$; décrire ſur le diametre RS le demi-cercle RHS, & au point A élever la perpendiculaire AH. Du centre E Regle 6. & du rayon EH, il faut décrire le cercle HFG, qui coupe la parabole aux points F, G. Les appliquées FL, GK, Regle 7. ſont les deux racines réelles de l'équation, les deux autres étant imaginaires. Parcequ'il y a $+q$ Regle 8. FL eſt la racine vraye, GK la fauſſe. L'on joindra les rayons EH, EF, EG, & du point E l'on menera des perpendiculaires ſur FL, GK. Nommons FL, $+z$; GK, $-z$; AL, AK, x; $AD = CD - AC$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a$.

Fig. 233.

Dém. Au point F. $\overline{AH}^2 = AR \times RS$, ar; par la nature de la parabole; $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = ax$, $x = \frac{zz}{a} = AL$; $EM = DL = DC - AC + AL$, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}a + \frac{zz}{a}$; $ML = DE = \frac{1}{2}q$; $MF = ML - FL$, $\frac{1}{2}q - z$.

Maintenant dans le triangle rectangle DAE, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{AD}^2$, $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp - \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}aa$. De plus les triangles rectangles EAH, EMF, donnent $\overline{EH}^2 = \overline{EF}^2$, dont les valeurs produiſent l'équation $z^4 = * - apzz + aaqz + a^3r$.

Ex. VIII. $\zeta^4 = * - apzz + aaqz - a^3r$. $z^4 = * - pzz + qz - r$.

SOit $a = 1 = p = r$; $q = 11$, l'équation ſera $z^4 = * - 1zz + 11\zeta - 1$.

Fig. 244. Je décris Fig. 244. la parabole AF, dont le parametre $AP = 1$, le ſommet A, l'axe AC Regle 2. ſur lequel je prends $AC = \frac{1}{2}$; parcequ'il y a $-p$, Regle 3. je prends $CD = \frac{1}{2}$ en retournant de C vers A, de ſorte que le point D tombe ſur le ſommet A; au point A Regle 4. j'éleve la perpendiculaire $AE = \frac{11}{2}$, ſur laquelle Regle 5. je coupe $AS = 1$, AP, $AR = 1$; ſur le diametre RS je décris le demi-cercle RHS, dont le centre eſt A, où j'éleve la perpendiculaire $AH = 1$. Parcequ'il y a $-r$, Regle 6. ſur le diametre AE je décris encore le demi-cercle EIA, dans lequel j'inſcris $AI = AH = 1$, & du centre E, du rayon EI je décris le cercle IfF, qui coupe la parabole au point f, F. Les appliquées fl, FL Regle 7. 8. ſont deux racines vrayes de l'équation; les autres deux ſont imaginaires. Du point E j'abaiſſe la perpendiculaire EM ſur LF prolongée, je joins EF, EI. Enfin je nomme FL, $+ z$; AL, $+ y$.

Dém. Au point F. Par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = 1 \times AL$, $zz = y = AL = EM$; ML eſt égal à ED, $\frac{11}{2}$, $MF = ML - FL$, $\frac{11}{2} - z$.

Les triangles rectangles EMF, EIA donnent $\overline{EF}^2 = \overline{EI}^2$ dont les valeurs produiſent $z^4 = * - zz + 11z - 1$.

SECTION II.

Utilité des Regles de la Section I.

1°. NOus rapporterons la Methode, dont on ſe ſert pour conſtruire une équation déterminée ſolide. 2°. Nous chercherons deux & trois moyennes proportionelles entre deux quantitez données. 3°. Nous diviſerons un angle ou un arc donné en trois parties égales. 4°. Nous démontrerons, comme M. DESCARTES l'avance Art. 3. que lorſque un cercle coupe une parabole des deux côtez de l'axe, les appliquées qui ſont d'un côté priſes enſemble ſont égales aux appliquées qui ſont de l'autre

auſſi priſes enſemble. 5°. Nous parlerons de la deſcription des courbes par leur équation ſolide.

ARTICLE I.

Methode pour conſtruire une Equation déterminée ſolide.

CEtte Methode peut auſſi convenir aux Problêmes plus que ſolides : mais il me ſuffit ici de l'appliquer aux ſolides, afin de faire voir comment M. DESCARTES a trouvé les Regles qu'il a données, Sect. 1. Art. 1. 2. pour la conſtruction des équations cubiques & quarré-quarrées avec le cercle & la parabole. Auſſi eſt-ce la reflexion, qu'on a faite ſur cette conſtruction, qui a produit cette Methode.

REGLE I.

On ſuppoſe que l'équation à conſtruire n'a point de ſecond terme, & que le premier eſt reduit à l'unité.

Si l'équation eſt cubique $z^3 * - apz + aaq = o$, ou étant $a = 1$, $z^3 * - pz + q = o$, on la multiplie par ſon inconnuë z, afin de la rendre du quatriéme $z^4 * - apzz + aaqz * = o$, $z^4 * - p\zeta\zeta - q\zeta * = o$. Sans cela on ne pourroit pas en deduire tous les lieux dont on a beſoin.

REGLE II.

On employe toûjours deux équations indéterminées, ou deux lieux ; qui ſont chacun d'un degré inferieur à celui de la propoſée. Ils contiennent les deux mêmes inconnuës, dont l'une eſt encore la même que l'inconnuë de la propoſée, & elle s'appelle l'inconnuë principale ; & l'autre l'inconnuë introduite.

REGLE III.

Un des lieux eſt donné, ou bien on le choiſit, & alors on le prend très ſimple, par exemple celui à la parabole. Pour augmenter la facilité, le lieu à la parabole eſt compoſé du quarré zz de l'inconnuë ζ, qui eſt dans l'équation à conſtruire, & d'un rectangle ſous l'inconnuë y que l'on introduit, & ſous une connuë qui ſe trouve le plus ſouvent dans l'équation propoſée. Ce ſera donc $zz = ay$. $zz - ay = o$. La connuë peut pourtant être telle que l'on veut.

REGLE IV.

Pour avoir le ſecond lieu, l'on compare le lieu choiſi avec l'équation propoſée, ce qui fournit quelques nouveaux lieux : les autres ſe trouvent

en combinant les lieux déja trouvez ou avec le lieu choisi, ou entr'eux : ce qui s'execute ainsi.

1. La proposée est $z^4 - apzz + aaqz = o$, le lieu donné $zz = ay$. Dans le premier terme de la proposée, mettez pour un zz sa valeur ay; il vient $ayzz - apzz + aaqz = o$, $yz - pz + aq = o$, à l'hyperbole entre ses asymptotes. Ce lieu auroit pû se tirer par la même substitution de l'équation cubique $z^3 * - apz + aaq = o$.

2. Mettez deux fois la valeur de zz dans le premier terme, pour avoir $aayy - apzz + aaqz = o$, $ayy - pzz + aq\zeta = o$, à l'hyperbole par rapport à ses diametres.

3. Substituez dans le premier & dans le troisiéme terme pour zz sa valeur, vous ferez $aayy - aapy + aaqz = o$, $yy - py + qz = o$, à la parabole.

4. Combinez le lieu donné avec ce dernier en les ajoûtant, il se fera $\zeta\zeta - ay + yy - py + qz = o$, au cercle.

5. Si vous soustrayez l'un de l'autre, ce sera $zz - ay - yy + py - q\zeta = o$, à l'hyperbole équilatere par rapport à ses diametres.

6. Multipliez le lieu donné par une quantité quelconque b, divisez-le par une autre quelconque c, vous aurez $\frac{bzz}{c} - \frac{aby}{c} = o$, qui demeure à la parabole.

7. Ajoûtez les lieux de n. 3. & de n. 6. ce sera $yy - py + qz + \frac{bzz}{c} - \frac{aby}{c} = o$, à toutes sortes d'ellipses, parceque b & c peuvent representer toutes sortes de quantitez.

8. Soustrayez ces lieux l'un de l'autre, pour avoir $yy - py + q\zeta - \frac{bzz}{c} + \frac{aby}{c} = o$, à toutes sortes d'hyperboles.

9. On peut poursuivre les combinaisons, en doublant, triplant, &c. ceux qu'on voudra des lieux déja trouvez.

Dans ces sortes de substitutions & de combinaisons il faut prendre garde, qu'il ne resulte pas un lieu plus élevé, que la construction du Problême ne le demande. Par exemple si dans $z^4 - apzz + aaqz = o$, vous substituez la valeur de zz dans le premier terme une fois, & ensuite dans le troisiéme, & enfin la valeur de z dans le dernier : il viendra $ayzz - aapy + aaq\sqrt{ay} = o$, $apy - yzz = aq\sqrt{ay}$, qui se reduit en quarrant chaque membre à $aappyy - 2apyyzz + yyz^4 = a^3qqy$.

REGLE V.

On construit deux de ces lieux, ou le donné avec un des déduits, ou deux des déduits. L'on demande ordinairement, que ces lieux soient les plus simples. M. DESCARTES a construit les équations de Sect. 1. Art. 1. 2. en se servant du lieu donné $zz = ay$ à la parabole, & du lieu reduit au cercle $zz - q\zeta = ay + py - yy$; c'est-à dire que l'on décrit les lignes

lignes droites ou courbes, dont la nature eſt exprimée par ces lieux, en ſuivant les Regles ordinaires de la conſtruction des lieux Geometriques.

Les inconnuës tant la principale, que l'introduite ont un même axe, une même origine; les abſciſſes priſes ſur cet axe ſont exprimées par l'introduite, & les appliquées à cet axe par la principale; l'angle des coordonnées eſt droit.

REGLE VI.

LEs lignes ainſi décrites ſe rencontreront en autant de points, qu'il y a de racines réelles dans la propoſée. Il y aura autant de racines réelles, qu'il y a de points d'interſection; autant de deux racines réelles égales, qu'il y a de points de contact.

Si les lignes ne ſe coupent & ne ſe touchent pas, toutes les racines ſont imaginaires. Enfin s'il manque quelque point d'interſection ou de contact de ceux, qui peuvent être, il y aura autant de racines imaginaires; or il peut y avoir quatre points pour les équations quarré-quarrées, en comptant un point d'attouchement pour deux; & trois pour les équations cubiques.

Mais il faut obſerver que l'on multiplie les équations cubiques $z^3 . pz . q = o$ par z; & que c'eſt la même choſe que ſi on les multiplioit par $z = o$. Ainſi l'on voit dans les conſtructions de Sect. 1. que le cercle coupe la parabole au ſommet, où l'appliquée z eſt nulle. Ce point d'interſection n'eſt pas compté parmi les trois qui conviennent à une équation cubique.

On tirera donc de chacun des points de rencontre des appliquées ſur l'axe; elles ſeront les racines vrayes & fauſſes de l'équation propoſée. On les diſtingue par le calcul; celle-là par exemple eſt vraye, qui étant ſuppoſée telle, donne par le calcul l'équation propoſée. C'eſt là-deſſus qu'eſt fondée la Regle 6. Art. 1. & la Regle 8. Art. 2. Sect. 1.

REGLE VII.

Il faut que ces deux lieux comparez enſemble de la maniere dont on le ſera bientôt, & dans les Art. 2. 3. rendent & recompoſent l'équation propoſée. Ce qui ſe fait en ſubſtituant dans les équations des lieux la valeur des nouvelles inconnuës, que la reduction faite ſelon la Methode ordinaire des lieux, y a introduites; & enfin en ſubſtituant à la place de l'inconnuë, que nous avons nommée l'introduite, ſa valeur tirée du lieu donné ou choiſi comme ici pour y ſa valeur $\frac{zz}{a}$ tirée de $zz = ay$. Cette recompoſition eſt la démonſtration, qui prouve, que les racines de la propoſée ont été trouvées.

Voyez les dificultez de cette Methode dans les Memoires de l'Academie Royale des Sciences, 1708. 1709. 1710.

On trouvera pluſieurs Exemples de ces Regles pour les équations cubiques dans les Art. 2. 3. qui ſuivent. Je vais ici en donner un pour les équations quarré-quarrées.

1. Soit propoſée l'équation $z^4 * - apzz + aaqz - a^3r = o$; le lieu choiſi $ay = zz$, $zz - ay = o$. Dans le premier & troiſiéme terme ſubſtituez pour zz ſa valeur, il vient $aayy - aapy + aaqz - a^3r = o$, $yy - py + qz - ar = o$ à la parabole. Ajoûtez ces deux lieux enſemble, pour former $yy - py + qz - ar + zz - ay = o$ au cercle. Voyons comment M. DESCARTES a pû conſtruire l'équation propoſée avec le lieu donné à la parabole, & le lieu au cercle qu'on vient de conclurre. Il ſera aiſé de s'appercevoir de l'uſage qui ſe fera des Regles 1. 2. 3. 4.

FIG. 232. 2. Décrivez Fig. 232. la parabole AF, dont A le ſommet, AD l'axe, $a = 1$ le parametre. Nommez l'abſciſſe quelconque AL, y ; ſon appliquée correſpondante FL, z. Voilà ſuivant la Regle 5. Sect. 2. que les inconnuës ont un même axe AC, une même origine A ; l'introduite y eſt l'abſciſſe, la principale z eſt l'appliquée, l'angle qu'elles font eſt droit. Vous avez auſſi executé, ce que demande la premiere partie de la Regle 2. de Sect. 1. Art. 2.

3. Pour conſtruire le cercle, il faut comme dans les lieux Geometriques reduire l'équation $yy - py + qz - ar + zz - ay = o$, en prenant $z + \frac{1}{2}q = v$, $v - \frac{1}{2}q = z$; $y - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = x$, $x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}p = y$: & la reduite eſt $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar - xx$. C'eſt pour avoir le rayon de cercle $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$, que M. DESCARTES Regle 3. 4. 5. 6. Sect. 1. Art. 2. veut qu'on prenne $AC = \frac{1}{2}a$, $CD = \frac{1}{2}p$, la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$, car l'on a déja $\overline{EA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq$; enſuite que ſur AE l'on prenne $AS = a$, $AR = r$, qu'on décrive le demi-cercle SHR ſur le diametre RS, qu'au point A on éleve la perpendiculaire AH, car elle eſt moyenne proportionelle entre AS, AR, & elle eſt $\sqrt{ar}$. Ainſi dans le triangle rectangle EAH, $\overline{EH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AH}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar$, & la droite EH eſt le rayon $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$ du cercle cherché. Et la Reg. 5. de cet Article eſt gardée.

4. Ce cercle coupe la parabole aux points F, G, d'où par la Regle 6. de cet Article, & Regle 7. 8. Art. 2. Sect. 1. l'on tire ſur l'axe AC les perpendiculaires FL, GK, qui ſont les deux ſeules racines de l'équation propoſée, qui ſoient réelles ; les deux autres ſont imaginaires : FL eſt une racine vraye, GK une fauſſe. Ce qui ſe démontre ainſi.

5. Suppoſons FL, $+z$; la recompoſition de la propoſée ſe fait de cette façon. Soit AL, y ; par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 =$ parametre $a \times AL$, $zz = ay$.

Pour le cercle, ſi l'on achevoit de tirer le diametre Em, Fm ſeroit une appliquée $= FL - mL$, $z - \frac{1}{2}q$, car $mL = ED$, $\frac{1}{2}q$; Fm eſt donc v. $Em = DL = AL - AD$, $y - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p = x$. Or par la nature du cercle $\overline{Fm}^2$ eſt égal au rectangle ſous la ligne compoſée du rayon & de Em, & ſous la ligne compoſée du rayon moins Em, c'eſt-à-dire ſous $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar} + x$ & ſous $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar} - x$; donc $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar - xx$. Pour vv & xx ſubſtituez leur valeur, il vient $zz + qz + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar - yy + ay + py - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}pp$, qui ſe reduit à $zz + qz = ar - yy + ay + py$. Pour y ſubſtituez encore ſa valeur $\frac{zz}{a}$ tirée du lieu choiſi $zz = ay$, vous ferez $zz + qz = ar - \frac{z^4}{aa} + zz + \frac{2zz}{a}$; ou $z^4 * - apzz + aaqz - a^3r = o$. Et la Regle 7. de cet Article eſt expliquée, l'on voit auſſi pourquoi M. DESCARTES dit Sect. 1. Art. 2. Regle 8. que lorſqu'il y a $-q$ dans $z^4 = * + apzz - aaqz + a^3r$, les racines vrayes ſont du côté où le centre E du cercle ſe trouve.

M. DESCARTES dans ſa maniere de démontrer Sect. 1. recompoſe l'équation propoſée ſans ſe ſervir des inconnuës v, x, que la reduction a introduite. Voyez cette démonſtration Sect. 1. dans le Texte, & Sect. 1. Art. 2. Exemple 5.

ARTICLE II.

Trouver deux & trois moyennes proportionelles.

M. DESCARTES.

SI on veut donc ſuivant cette Regle trouver deux inconnuës proportionelles entre les lignes a & q; chacun ſçait, que poſant z pour l'une, comme a eſt à z, ainſi z à $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a équation entre q & $\frac{z^3}{aa}$, c'eſt-à-dire $z^3 = **aaq$.

Et la parabole FAG, Fig. 234. étant décrite avec la partie de ſon aiſſieu AC, qui eſt $\frac{1}{2}a$ la moitié du côté droit; il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}q$, & du centre E, par A décrivant le cercle AF, on trouve FL & LA pour les deux moyennes cherchées. Fig. 234.

Voyez la conſtruction de ce Problême, Sect. 1. Art. 1. Ex. 1. la maniere dont cette conſtruction a pû être trouvée par M. DESCARTES ſe découvrira bientôt n. 2. Par tout cela il conſte que FL eſt z, & AL,

$\frac{zz}{a}$, qui ſont les deux moyennes proportionelles entre a & q. Car $a : z :: z : \frac{zz}{a} :: \frac{zz}{a} : \frac{z^3}{aa} = q$. Appliquons la Methode de Art. 1. à l'équation $z^3 = ** + aaq$.

Nous parlerons de trois moyennes proportionelles n. 5.

1. Soit propoſée l'équation $z^3 = ** + aaq$. $z^3 - aaq = 0$.

1°. Multipliez-là par z, pour la changer en celle-ci $z^4 - aaqz = 0$.

2°. Soit le lieu donné $zz = ay$, $zz - ay = 0$.

3°. Pour zz mettez une fois ſa valeur, vous aurez $ayzz - aaqz = 0$, $yz = aq$, à l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

4°. Dans $ayzz - aaqz = 0$, ſubſtituez encore ay pour zz, il viendra $aayy - aaqz = 0$, ſubſtituez encore ay pour zz, il viendra $aayy - aaqz = 0$, $yy - qz = 0$, à la parabole.

5°. Ajoûtez les lieux des n. 2. 4. il ſe fait $zz - ay + yy - qz = 0$, au cercle.

6°. Souſtrayez-les l'un de l'autre, vous aurez $zz - ay - yy + qz = 0$, à l'hyperbole équilatere rapportée à ſes diametres, &c.

2. Conſtruiſons, ainſi que M. DESCARTES l'a fait, l'équation propoſée avec la parabole donnée $zz = ay$ & le cercle $zz - ay + yy - qz = 0$. ou $zz - qz = ay - yy$.

Fig. 234. Décrivez Fig. 234. la parabole AF, dont le parametre eſt a, le ſommet A, l'axe AL.

Pour le cercle il faut le reduire en prenant $z - \frac{1}{2}q = v$, $v + \frac{1}{2}q = z$; $y - \frac{1}{2}a = x$, $x + \frac{1}{2}a = y$. Et la reduite eſt $vv - \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}aa - xx$, $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx$.

C'eſt pourquoi ſur AL vous couperez $AC = \frac{1}{2}a$, au point C vous éleverez la perpendiculaire $CE = \frac{1}{2}q$. Du point E comme centre, du rayon EA, vous décrirez le cercle FG, qui coupe la parabole au point F. Menez l'appliquée FL, nommez la, z; & AL, y.

Par la nature de la parabole $\overline{FL}^2 = a \times AL$, $zz = ay$, $y = \frac{zz}{a} = AL$.

De plus dans le triangle rectangle ECA; $\overline{EA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$, & le rayon $EA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$. $EM = GL = AL - AC$, $y - \frac{1}{2}a = x$; $ML = EC$, $\frac{1}{2}q$; $MF = ML - FL$, $\frac{1}{2}q - z = v$. Mais par la nature du cercle $\overline{MF}^2$ eſt égal au rectangle ſous $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} - x$; & $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} + x$; donc $vv = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx$. Subſtituez les valeurs de v, x, y, il vient $z^4 = aaqz$. $z^3 = ** + aaq$.

La démonſtration ſuivant la maniere de M. DESCARTES ſe trouve Sect. 1. Art. 1. Exemple 1.

De là ſuit la duplication du cube. Car ſoit $a = 1$. la premiere des quatre lignes proportionelles, la quatriéme $q = 2$. Ayant trouvé FL, z pour la ſeconde, zz pour la troiſieme. Le cube fait ſur z eſt double du cube

fait ſur 1. car ces quatre lignes continuellement proportionelles étant données $1 . z . zz . 2$. la premiere 1 eſt à la quatriéme 2 en raiſon triplée de la premiere 1 à la ſeconde z. Mais 33. 11. Eucl. le cube ſur 1 eſt au cube ſur z en raiſon triplée de 1 à z : donc ces cubes ſont entr'eux, comme 1 à 2, c'eſt-à-dire, que le ſecond eſt double du premier, & la duplication d'un cube donné eſt trouvée.

3. Conſtruiſons l'équation propoſée avec le même cercle, & l'hyperbole entre ſes aſymptotes $y\zeta = aq$.

Pour conſtruire l'hyperbole, tirez à angles droits les lignes AB, AL, Fig. 245. coupez $AB = q$, au point B élevez la perpendiculaire $BG = a$. Par le point G & entre les aſymptotes AB, AL décrivez l'hyperbole FG, comme on l'enſeigne dans les Traitez des Sections coniques.

Pour conſtruire le cercle, dont la reduction a été faite n. 2. Au point C milieu de AB, élevez la perpendiculaire $CE = \frac{1}{2}a$. Du centre E, de l'intervale EA décrivez le cercle AF, qui coupe l'hyperbole au point F par lequel menez FL parallele à AB ; joignez EA, EF, EG, prolongez EC en K & en P, LF en M. Nommez LF, z ; AL, $y = CM$, EM eſt $CM - EC$, $y - \frac{1}{2}a = x$. Dans le triangle rectangle ECA, $\overline{EA}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{AC}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq$, & le rayon $EA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$ $= EF = EP = EK$. Donc $KM = KE + EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}, + x$; $MP = EP - EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} - x$. De plus $LM = AC$, $\frac{1}{2}q$; $FM = LM - LF$, $\frac{1}{2}q - z = v$.

Maintenant par la nature des aſymptotes $AB \times BG = AE \times LF$, $qa = yz$.

Par la nature du cercle $KM \times MP = \overline{MF}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx = vv$. L'on a fait n. 2. la recompoſition de l'équation propoſée en faiſant les ſubſtitutions dans l'équation au cercle. Vous reviendrez auſſi à la propoſée, en ſubſtituant dans $yz = aq$ la valeur de y, car ce ſera $\frac{z^3}{a} = aq$, $z^3 = ** + aaq$.

Le cercle coupe encore l'hyperbole au point G, c'eſt-à-dire que EG eſt un rayon, ce qui ſe prouvera en montrant que EG eſt comme EA égal à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$. Pour cela menez EN parallele à CB ; comme CE, BG ſont paralleles ſupp. l'on aura $EN = CB$, $\frac{1}{2}q$; l'on aura $NB = CE$, $\frac{1}{2}a$; & $EG = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq}$.

4. Conſtruiſons la propoſée avec le même cercle, dont la reduction ſe trouve n. 2. & avec l'hyperbole équilatere par ſes diametres $zz + q\zeta = yy + ay$. qui ſe reduit en faiſant $z + \frac{1}{2}q = s$, $s - \frac{1}{2}q = z$; $y + \frac{1}{2}a = r$, $r - \frac{1}{2}a = y$; la reduite eſt $ff - rr = ff + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}qq$.

Pour la conſtruire Figure 246. a. ſur la droite $CR = \frac{1}{2}q$ décrivez le demi-cercle CBR, dans lequel vous inſcrirez $BR = \frac{1}{2}a$, & $CB = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$. Enſuite ſur BC prolongée coupez $CA = CB$: la toute FIG. 246. a

$BA = 2\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$ ſera l'axe déterminé de l'hyperbole, C le centre, A le ſommet. Vous pouvez donc, ſuivant ce qui s'enſeigne dans les Traitez des lieux Geometriques, décrire l'hyperbole équilatere AF. Prenez encore $CK = \frac{1}{2}q$, le point K ſera au deſſous de A, puiſque CA n'eſt que $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$. Au point K élevez la perpendiculaire KL, ſur laquelle vous prendrez $KN = NH = \frac{1}{2}a$; par les points N, H menez NP, HE paralleles à l'axe.

Vous conſtruirez le cercle, ſi vous coupez ſur l'axe AT la ligne $KD = \frac{1}{2}q$, ſi au point D vous élevez la perpendiculaire DM, & que du centre E, de l'intervale EN vous décriviez le cercle NF, qui coupe l'hyperbole au point F, par lequel vous menerez FL parallele à l'axe. Ce ſera la ligne cherchée. Joignez EN, EF.

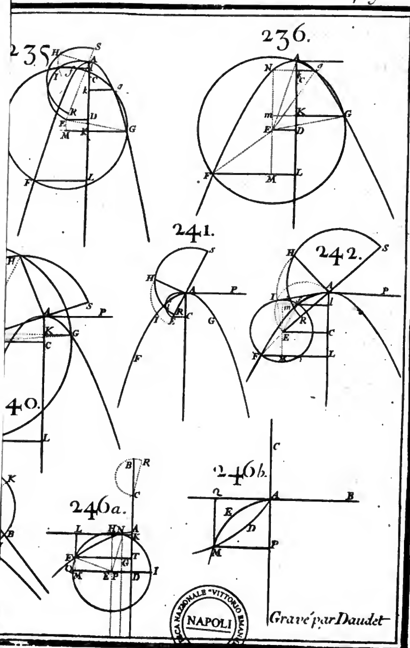
Car nommez $NG, z = FL = KT$; $NL, y = PM = GF$: la ligne NL eſt l'axe des inconnuës, N leur origine ſuivant la Regle 5. vous aurez $CT = CK + KT$, $\frac{1}{2}q + z = s$; $BT = TC + CB$, $s + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$; $AT = CT - CA$, $s - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$; $KL = KN + NL$, $\frac{1}{2}a + y = r = FT$; $HL = NL - NH$, $y - \frac{1}{2}a = EM = x$; comme $NP = KD$, $\frac{1}{2}q$, $EP = NH$, $\frac{1}{2}a$, dans le triangle EPN, le rayon $EN = \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} = EI = EQ$; donc $IM = IE + EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} + x$; $MQ = EQ - EM$, $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq} - x$. Enfin $LM = KD$, $\frac{1}{2}q$, & $FM = LM - LF$, $\frac{1}{2}q - z = v$.

Par la nature de l'hyperbole équilatere $BT \times AT = \overline{TF}^2 = ff - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa = rr$.

Par la nature du cercle $IM \times MQ = \overline{MF}^2$, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}qq - xx = vv$. Subſtituez dans l'équation à l'hyperbole les valeurs de ff, rr. Vous ferez $zz + qz = yy + ay$; mettez encore pour y & yy leurs valeurs, vous aurez $z^4 = aaqz$; $z^3 = ** + aaq$.

Le point N eſt commun au cercle & à l'hyperbole, ce qui ſe prouve en montrant que $KN = \frac{1}{2}a$ eſt une appliquée de l'hyperbole. Car nommez NK, n; vous avez $BK = KC + CB$, $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$; $AK = KC - AC$, $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}aa}$. Or par la nature de l'hyperbole équilatere $BK \times AK = \overline{NK}^2$, $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa = nn$; $n = \frac{1}{2}a$, & le point N étant l'origine des inconnuës, z eſt nulle dans ce point.

Une des manieres les plus ſimples, ſe fait avec deux paraboles, Fig. 246. *b* Les lignes AQ, CP ſe coupent à angles droits au point A. Je prends $AB = a$ premiere ligne donnée, $AC = b$ ſeconde ligne donnée. Sur l'axe AQ avec le parametre AB je décris la parabole ADM; ſur l'axe AP avec le parametre CA je décris la parabole AEM. Du point d'interſection M j'applique MQ, MP. Je dis que AP, AQ ſont les deux moyennes proportionelles cherchées.



Gravé par Daudet

NAPOLI

Digitized by Google

Nommons AP, $x = MQ$, AQ, $y = MP$. L'équation à la parabole ADM eſt $AB \times AQ = \overline{QM}^2$, $ay = xx$. L'équation à la parabole AEM eſt $CA \times AP = \overline{PM}^2$, $bx = yy$. Or la premiere équation donne $a : x :: x : y$, & la ſeconde $x : y :: y : b$, donc on a une proportion continuë $a . x . y . b$. & $AB . AP . AQ . AC$.

L'angle A peut être oblique. Cette Methode eſt de Menechme Aſcalonite.

5. Il faut trouver trois moyennes proportionelles entre les données a, & q. Soit z la premiere des trois, l'on aura donc cette proportion continuë $a : z :: z : \frac{zz}{a} :: \frac{zz}{a} : \frac{z^3}{aa} :: \frac{z^3}{aa} : \frac{z^4}{a^3}$; & cette quatriéme proportionelle par la ſuppoſition eſt égale à q; en ſorte que $\frac{z^4}{a^3} = q$; $z^4 = a^3 q$. Or cette équation du quatriéme degré ſe reduit à une quarrée par l'extraction de la racine quarrée, comme on a dit Sect. 1. Art. 2. Regle 1. L'on fait donc d'abord $zz = \pm\sqrt{a^3 q}$; dont les racines ſont encore $z = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a^3 q}}$. Ce qui montre qu'il ne peut y avoir que deux racines réelles $z = \pm\sqrt{+\sqrt{a^3 q}}$, les deux autres $z = \pm\sqrt{-\sqrt{a^3 q}}$ ſont imaginaires.

Soit donc Fig. 247. $AB = a = 1$; $BC = q$; ſur le diametre AC je décris le demi-cercle ADC; au point B j'éleve la perpendiculaire BD qui eſt $= \sqrt{aq}$. Enſuite je prolonge DB en E, de ſorte que $BE = a$; ſur le diametre BE je décris le demi-cercle DFE, ainſi $\overline{BF}^2 = EB \times BD$, $a\sqrt{aq} = \sqrt{a^3 q}$, & $BF = \sqrt{+\sqrt{a^3 q}} = z$, la premiere des trois moyennes proportionelles. Or ayant la premiere quantité a, la ſeconde z de la progreſſion, il eſt aiſé par la prop. 11. 6. Eucl. de trouver la troiſiéme, & enfin la quatriéme par la prop. 12. 6. Eucl.

ARTICLE III.

Diviſer un Arc donné en trois parties égales.

M. DESCARTES.

TOut de même ſi on veut diviſer l'angle NOP, Figure 248. ou bien l'arc ou portion de cercle $NQTP$ en trois parties égales; faiſant $NO = 1$, pour le rayon du cercle, & $NP = q$, pour la ſubtenduë de l'arc donné, & $NQ = z$, pour la ſubtenduë du tiers de cet arc; l'équation vient $z^3 = * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT, & faiſant QS parallele à TO, on voit que comme NO eſt à NQ, ainſi NQ à QR, & QR à RS, en ſorte que NO étant 1; & NQ, z; QR eſt zz, & RS eſt Fig. 248. 249.

z^3. Et à cauſe qu'il s'en faut ſeulement RS ou z^3, que la ligne NP, qui eſt q, ne ſoit triple de NQ, qui eſt z; on a $q = 3z - z^3$, ou bien $z^3 = * 3z - q$.

Puis la parabole FAG étant décrite, & CA la moitié de ſon côté droit principal étant $\frac{1}{2}$; ſi on prend $CD = \frac{1}{2}$, & la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q$; & que du centre E par A on décrive le cercle $FAgG$, il coupe cette parabole aux trois points F, g, & G, ſans compter le point A, qui eſt le ſommet. Ce qui montre qu'il y a trois racines en cette équation; à ſavoir les deux GK & gk, qui ſont vrayes; & la troiſiéme qui eſt fauſſe, à ſavoir FL, Et de ces deux vrayes c'eſt gk la plus petite, qu'il faut prendre pour la ligne NQ, qui étoit cherchée: car l'autre GK eſt égale à NV la ſubtenduë de la troiſiéme partie de l'arc NVP, qui avec l'autre arc NQP acheve le cercle. Et la fauſſe FL eſt égale à ces deux enſemble QN & NV, ainſi qu'il eſt aiſé à voir par le calcul.

1. Il faut expliquer l'operation de M. DESCARTES. Soit donné l'angle NOP, ou l'arc NTP, car c'eſt la même choſe, qu'il faut diviſer en trois parties égales. Je ſuppoſe la choſe faite, & que cet arc eſt diviſé, comme on le demande, aux points Q, T. Je tire les rayons ON, OQ, OT, OP; la corde NP de l'arc donné, les cordes NQ, QT, TP; & QS parallele à TO.

Les triangles NOQ, QOT, TOP ſont égaux, iſoſceles & ſemblables.

Les triangles NOQ, QNR ſont auſſi ſemblables, car ils ont l'angle NQR commun; l'angle NOQ au centre, égal 20. 3. Eucl. à l'angle QNP à la circonference. Et comme le triangle NOQ eſt iſoſcele, le triangle QNR le ſera auſſi, & les angles NQR, NRQ ſur la baſe QR ſont égaux, & les côtez NQ, NR ſont encore égaux.

On peut dire les mêmes choſes du triangle MPT comparé avec le triangle POT, de ſorte que les triangles QNR, MPT ſont égaux & ſemblables.

Les angles NQR, NRQ viennent d'être démontrez égaux: mais les angles NQR, OQT ſont auſſi égaux: donc les angles NRQ, OQT le ſont auſſi. Mais les angles NRQ, ORM ſont encore égaux: donc enfin les angles OQT, ORM ſont égaux; & les lignes NP, QT ſont paralleles.

Les triangles NQR, QRS ſont auſſi équiangles, car ils ont l'angle QRS commun; & à cauſe des paralleles QS, TO, les angles QSR, TMP ſont égaux. Mais dans les triangles équiangles QNR, MPT, les angles

angles QRS, TMP ſont égaux : les angles QSR, QRS ſont donc égaux. Le triangle QRS eſt iſoſcele comme le triangle NQR, & les côtez QR, QS égaux.

Nommons à preſent le rayon donné ON, 1 ; la corde donnée PN, q ; la corde NQ, z. Nous avons ces Analogies $ON, 1 :: NQ, z :: NQ, z : QR, zz :: QR, zz : RS, z^3$.

Mais parceque $NQ = NR$ dans le triangle iſoſcele QNR, $PT = PM$ dans le triangle iſoſcele TPM, $QT = SM$ dans le parallelogramme $QTMS$; il ſuit que ſi l'on ajoûtoit une quantité égale à RS à la corde PN, l'on feroit $PN + RS =$ aux trois cordes NQ, QT, TP : donc $q + z^3 = 3z$; $z^3 = * 3z - q$, ou étant $3 = p$, $z^3 = * + pz - q$.

Maintenant ſuivant les Regles de Sect. 1. Art. 1. Fig. 249. décrivez la parabole FAG dont le parametre eſt 1, le ſommet A, l'axe AC ; ſur lequel prenez $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2}$. Au point D élevez la perpendiculaire $ED = \frac{1}{2}q$. Du centre E, de l'intervale EA, décrivez le cercle FAG, qui outre le ſommet A, coupe la parabole aux points g, G, F. De ces points tirez ſur l'axe les pependiculaires gk, GK, FL, qui ſont les valeurs de z. Parcequ'il y a $-q$, la fauſſe FL eſt du côté, où eſt le centre E, les vrayes gk, GK ſont de l'autre. La plus petite gk eſt la corde cherchée $NQ = QT = TP$; & parceque PN n'eſt pas moins la corde de l'arc NVP, que de l'arc NTP, la plus grande racine vraye GK eſt égale à NV corde du tiers de l'arc NVP.

Dém. au point g. Par la nature de la parabole le parametre $1 \times Ak = \overline{kg}^2$, zz ; & $Ak = zz$. AD eſt $AC + CD$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$; & dans le triangle rectangle EDA, $\overline{EA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2$, $4 + \frac{1}{4}qq$; de plus Dk eſt $AD - Ak$, $2 - zz = EM$; $Mk = ED$, $\frac{1}{2}q$; & $gM = gk + km$ $z + \frac{1}{2}q$; & dans le triangle rectangle EMg, $\overline{Eg}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{Mg}^2$, $4 - 4zz + z^4 + zz + qz + \frac{1}{4}qq$. Mais $\overline{EA}^2 = \overline{Eg}^2$; donc $4 + \frac{1}{4}qq$ $= 4 - 4zz + z^4 + zz + qz + \frac{1}{4}qq$; $z^3 = * 3z - q$. Ce qu'il falloit démontrer.

2. Pour faire voir que l'appliquée GK eſt égale à NV, corde du tiers de l'arc NVP, appliquons le calcul à NV, Fig. 250. il doit donner l'équation $z^3 = * 3z - q$. Fig. 250.

Suppoſons la choſe faite, que les trois arcs NV, VT, TP ſoient égaux auſſi bien que les trois cordes NV ; VT, TP, que l'on nommera z chacune. Tirez les rayons ON, OV, OT, OP ; VS parallele à TO juſqu'à ce qu'elle rencontre la corde PN prolongée. Continuez encore la même corde en Q de ſorte que PQ ſoit égale à PT, z ; TO en M, VO en R.

Les arcs NV, VT, TP ſont égaux : donc les arcs NVT, VTP le ſont auſſi ; auſſi bien que les angles NVT, VTP. Et parceque dans le quadrilatere $NVTP$ les angles NVT, NPT ſont enſemble égaux à deux

droits, comme auſſi les angles VTP, VNP; il faut que les angles VNP, NPT ſoient égaux entr'eux : donc enfin les angles VNP, NVT ſont égaux à deux droits, les lignes NP, VT ſont paralleles.

Les lignes VS, TM; VT, SMP ſont paralleles, & $SM = VT$, z. Les triangles NOV, VOT, TOP ſont iſoſceles, égaux & ſemblables, & les angles ſur leurs baſes NV, VT, TP égaux.

Il faut prouver que les triangles NOV, VNR, RVS ſont équiangles.

Les triangles NOV, VNR ont l'angle V commun. A cauſe des paralleles NR, VT, les angles alternes NRV, RVT ſont égaux : mais les angles RVT ou OVT, VNO ſont auſſi égaux ; donc les angles NRV, VNO ſont auſſi égaux : ſont encore égaux; & le triangle NVR eſt iſoſcele, comme le triangle NOV l'eſt ; donc $NR = NV$, z.

Les triangles NVR, VRS ſont équiangles, car outre l'angle R commun, les angles VSR, NVR ſont égaux, puiſque à cauſe des paralleles VS, TM, les angles VSR, TMR ſont égaux ; & à cauſe des paralleles NP, VT, les angles alternes TMR, MTV ſont égaux : mais les angles MTV ou OTV, NVR ou NVO ſont encore égaux : donc les angles TMR, NVR ſont égaux : donc enfin les angles VSR, NVR ſont égaux.

Dans les triangles équiangles NOV, VNR, RVS l'on a ces analogies ON, $1 : NV$, $z :: NV$, $z : VR$, $zz :: VR$, $zz : SR$, z^3.

Enſuite le triangle MPT eſt iſoſcele, car à cauſe des paralleles NP, VT, les angles alternes TMP, MTV ſont égaux, mais les angles MTV ou OTV, PTM ou PTO ſont égaux ; donc les angles TMP, PTM ſont égaux, & $PM = PT$, z.

Il faut maintenant conſiderer que la ligne SQ eſt $3z$, car elle eſt compoſée de $SM = z$, $MP = z$, $PQ = z$. D'un autre côté l'on a prouvé que NR eſt z, ainſi $NR = PQ$; ajoûtez la ligne commune RP, vous ferez $RQ = NP$, q. Mais $SR = SQ - RQ$, $z^3 = 3z - q$. Ainſi le calcul donne ſur la corde NV, Fig. 250. la même équation que ſur la corde NQ, Fig. 248. M. DESCARTES aſſure que la racine fauſſe FL, Fig. 249. eſt égale aux deux vrayes GK, gk ; c'eſt la matiere de l'Article ſuivant.

3. M. DESCARTES ne parle point de l'uſage qu'on peut faire de la racine fauſſe FL Fig. 249. on pourroit d'abord penſer qu'elle appartient au cercle $NPVN$, & qu'elle ſert à diviſer en trois parties égales ou la ſomme ou la difference des deux arcs que les racines vrayes diviſent.

Fig. 248. 249.

Mais on peut prouver que ces deux choſes ſont fauſſes par ce ſeul raiſonnement. Les arcs NQP, NVP Fig. 248. compoſent toute la circonference : donc les arcs NQ, NV ſont le tiers de la circonference, & la corde QV, ſi on la tiroit, meſureroit exactement trois fois toute la circon-

ference. Mais cette corde fait un triangle avec les cordes VN, NQ, elle eſt donc plus petite que ces deux cordes priſes enſembles, & moindre par conſequent que la racine fauſſe, laquelle leur eſt égale : donc enfin cette racine fauſſe eſt trop grande pour pouvoir diviſer la circonference entiere ou la ſomme des deux arcs NTP, NVP en trois parties égales ; & à beaucoup plus forte raiſon ſera-t-elle trop grande pour pouvoir diviſer en trois parties égales la difference de ces deux arcs.

De quel uſage eſt donc cette racine fauſſe ? je remarque deux choſes, la premiere que cette racine étant trouvée par un Problême, où l'on demande la triſection d'un arc, elle doit ſervir à diviſer un arc circulaire en trois parties égales. La ſeconde qu'il n'y a qu'une racine fauſſe, tandis qu'il y en a deux vrayes : & qu'ainſi les deux vrayes peuvent ſe partager toute la circonference, de ſorte que l'une en diviſe l'arc NTP, l'autre l'arc NVP : mais que la fauſſe étant ſeule, il faut qu'elle diviſe toute une circonferenee, parceque ſi elle ne diviſoit qu'un arc déterminé quelconque NTP, on demanderoit avec raiſon, ou pourquoi elle diviſe cet arc plûtôt que l'autre, ou quelle eſt la racine fauſſe, qui diviſe l'autre arc NVP.

La racine fauſſe diviſant toute une circonference, elle eſt le côté d'un triangle équilateral inſcrit daus un cercle, & il s'agit de ſçavoir quel eſt ce cercle. Pour cela je cherche la valeur du côté d'un triangle équilateral inſcrit, ou de la corde d'un arc de 120. degrez. Ce que je fais de deux manieres.

La premiere c'eſt que afin que la circonference $NPVN$ de Fig. 248. ſoit diviſée en trois parties égales, il faut que le rayon ON demeurant dans la même poſition, le rayon OQ vienne en Oq de Fig. *A*, & le rayon OT en Ot, & le rayon OP en Op. De ſorte que les points N, P n'en faiſant qu'un Fig. *A*, la droite NP de Fig. 248. devient nulle, & $q = o$ dans $z^3 - 3z + q = o$, & il ne reſte que $z^3 - 3z = o$, dont les racines ſont $z = o$, $z = \sqrt{3}$, qu'on peut conſiderer comme vrayes, l'une diviſant le premier arc, lequel eſt ici toute la circonference ; l'autre diviſant le ſecond arc, lequel eſt zero. Et il n'y a point dans ce cas de racine fauſſe.

La ſeconde ſera telle. Tirez la perpendiculaire OB, Fig. *A*. Dans le triangle iſoſcele NOq l'angle O eſt de 120. degrez, ainſi chacun des deux autres angles eſt de 30. degrez.

Dans le triangle rectangle OBq, par le Problême de trigonometrie, comme le ſinus total au ſinus de 30. degrez, ainſi le rayon Oq au côté OB ; mais le ſinus de 30. degrez eſt la moitié du ſinus total, donc OB eſt la moitié de Oq. Ainſi étant $OQ = 1$, on aura $OB = \frac{1}{2}$; & dans le triangle OBq rectangle, $Bq = \sqrt{Oq^2 - OB^2}$, $\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, & $Nq = \sqrt{3}$ comme auparavant, car la perpendiculaire OB diviſe en deux parties égales la droite NQ.

Ainſi dans tous les cercles la raiſon du rayon aux ſinus & aux cordes des

arcs ſemblables étant la même ; la raiſon du rayon au côté du triangle équilateral inſcrit eſt toûjours comme 1 à $\sqrt{3}$. Ainſi la racine fauſſe trouvée en cherchant la triſection de l'angle dans un cercle, diviſe en trois parties égales toute la circonference d'un autre cercle, dont on trouvera le rayon, en faiſant comme $\sqrt{3}$ eſt à 1, ainſi la racine fauſſe n au rayon $\frac{n}{\sqrt{3}}$ de ce ſecond cercle ; le rayon du premier cercle étant 1.

Et parceque les cercles ſont en raiſon doublée de leurs rayons. Faites $1 : \frac{n}{\sqrt{3}} :: \frac{n}{\sqrt{3}} : \frac{nn}{3}$. Le ſecond cercle ſera au premier, comme le tiers du quarré de la racine fauſſe eſt à 1.

La racine fauſſe eſt la plus grande, lorſque NP eſt le diametre du cercle, car ſoit Fig. 248. $NP, q = 2$; les racines de $z^3 - 3z + 2 = 0$ ſont $z - 1 = 0$, $z - 1 = 0$, $z + 2 = 0$. En effet le rayon diviſe en trois parties égales les deux demi-circonferences.

Enſuite la racine fauſſe eſt d'autant plus petite, qu'elle s'éloigne plus du diametre.

Soit $q = \sqrt{2}$, côté du quarré inſcrit ; les racines de $z^3 - 3z + \sqrt{2} = 0$ ſont $z - \sqrt{2} = 0$, laquelle diviſe le grand arc NVP, les deux autres $z + \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = 0$.

Il eſt évident que le Problème de la triſection de l'angle eſt ſouvent un Problème plan.

4. Examinons quelques-unes des conſtructions, que l'on peut faire de l'équation $z^3 - 3z + q = 0$, ou étant $3 = p$, $z^3 - pz + q = 0$. Multiplions la par ſa racine z, pour la faire du quatriéme degré $z^4 - pzz + qz = 0$.

Enſuite prenons l'équation à la parabole $zz = 1y$, parceque le rayon du cercle propoſé eſt 1, $zz - y = 0$.

Subſtituons deux fois la valeur de zz dans le premier terme ſeulement de la propoſée, il ſe fait $yy - pzz + qz = 0$, à l'hyperbole par ſes diametres.

Subſtituons encore la valeur de zz dans le ſecond terme, nous ferons $yy - py + qz = 0$, à la parabole.

Subſtituons cette valeur une fois dans le premier terme de la propoſée, nous aurons $yzz - pz + qz = 0$; $yz - pz + q = 0$, à l'hyperbole par ſes aſymptotes.

Ajoûtons les deux équations à la parabole, c'eſt $zz - y + yy - py + qz = 0$, au cercle, &c.

5. M. DESCARTES a pû faire la conſtruction, qu'il nous a donnée, avec l'équation $zz = y$ à la parabole, & l'équation $zz - y + yy - py + qz = 0$ au cercle.

Car Fig. 249. Décrivons la parabole AF, dont le parametre eſt 1, A le ſommet, AL, l'axe, les appliquées gk, z ; les abſciſſes AK, y.

FIG. 249.

Pour conſtruire l'équation $zz + qz = y + py - yy$, faiſons $z + \frac{1}{2}q = v$, $v - \frac{1}{2}q = z$; & $y - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p = x$, $x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p = y$; & la reduite ſera $vv = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq - xx$. Maintenant parceque nous avons $z + \frac{1}{2}q = v$; nous prolongerons gk en M de ſorte que kM ſoit $\frac{1}{2}q$, & $gM = gk + kM$, $z + \frac{1}{2} = v$. Parceque nous avons $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p - y = x$, ſur l'axe nous couperons $AC = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{1}{2}p$, & nous aurons $DK = DC + CA - AK$, $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - y = x = EM$; au point D nous éleverons la perpendiculaire $DE = kM = \frac{1}{2}q$. Du centre E, de l'intervale EA décrivons le cercle FAG, qui coupe la parabole aux points F, g, G, outre le ſommet A; de chaque point d'interſection menons ſur l'axe les appliquées FL, kg, KG, la premiere eſt une valeur negative, les deux autres ſont les valeurs poſitives de la propoſée.

Par la nature de la parabole $1 \times Ak = \overline{kg}^2$, $y = zz$.

Par la nature du cercle $\overline{Mg}^2$ = au rectangle ſous le rayon $+EM$, & ſous le rayon $-EM$. Or le rayon EA, eſt $\sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq}$: donc $\overline{MG}^2$, $vv = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq - xx$. Pour vv, xx, y & yy ſubſtituons leurs valeurs, il vient $z^4 = pzz - qz$; $z^3 = * + pz - q$.

6. Conſtruiſons la même équation avec les deux paraboles $1y = zz$, qui Fig. 251. ſe conſtruira à l'ordinaire par la parabole FAG; $yy - py + q\zeta = o$, qui après avoir fait $y - \frac{1}{2}p = s$ ou $\frac{1}{2}p - y = s$, ſe reduit à $ſſ = \frac{1}{4}pp - q\zeta$. Elle ſe conſtruit ainſi. Sur l'axe AL je prends $AD = \frac{1}{2}p$; par le point D je mene l'infinie DB perpendiculaire à AL; je coupe $DB = \frac{pp}{4q}$, & avec le parametre q je décris la parabole $FBGA$, dont B eſt le ſommet, BD l'axe, qui coupe l'autre parabole aux points F, G, g & au ſommet A. Des points F, G, g je tire les appliquées GK, gk, FL qui ſont, comme n. 4. les racines de la propoſée. Fig. 251.

Au point G, par la nature de la premiere parabole $1 \times AK = \overline{KG}^2$, $y = zz$. Car $AK = y$; $GK = +z$.

Dans la ſeconde parabole du point G abaiſſez GM perpendiculaire ſur l'axe BD. $GM = KD = AD - AK$, $\frac{1}{2}p - y = s$; $DM = KG$, z; $BM = BD - DM$, $\frac{pp}{4q} - z$. Par la nature de la parabole $q \times BM = \overline{MG}^2$, $\frac{1}{4}pp - qz = ſſ$. Pour $ſſ$ mettez ſa valeur; il vient $\frac{1}{4}pp - qz = \frac{1}{4}pp - py + yy$. Pour y & yy mettez encore leur valeur tirée de $y = zz$; vous ferez $\frac{1}{4}pp - qz = \frac{1}{4}pp - pzz + z^4$; $z^4 = pzz - qz$, $z^3 = * pz - q$.

La parabole FBG paſſe par le ſommet A de l'autre parabole, car $q \times BD = \overline{DA}^2$, $\frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp$.

La triſection de l'angle peut ſe trouver encore avec d'autres équations, & par l'interſection d'autres courbes.

ARTICLE IV.

Lorſqu'un cercle coupe une parabole des deux côtez de l'axe, les appliquées, qui ſont d'un côté, priſes enſemble, ſont égales aux appliquées priſes enſemble, qui ſont de l'autre.

IL faut obſerver 1° que lorſque le cercle coupe la parabole au ſommet, ce point d'interſection n'eſt d'aucun côté de l'axe, auſſi l'appliquée eſt là égale à zero. 2°. Que lorſque le cercle touche la parabole, le point d'attouchement vaut deux points d'interſection, auſſi l'appliquée doit alors être priſe deux fois: ainſi quand le cercle touche d'un côté, & coupe en deux points de l'autre la parabole, les deux appliquées de ce côté ſont égales à l'appliquée de l'autre, priſe deux fois. 3°. Que le cercle doit couper la parabole en quatre points, un point de contact étant pris pour deux.

FIG. 252. 1. Soit Fig. 252. l'axe KA de la parabole $EDKBF$, ſur lequel eſt A le centre du cercle qui coupe cette parabole aux points E, D, B, F; l'on a les appliquées à l'axe $GB = GD$, $HF = HE$, puiſqu'elles ſont priſes deux à deux à une diſtance égale du ſommet K.

FIG. 253. 2. Que le cercle coupe la parabole, Fig. 253. en quatre points F, A, G, g; dont le ſommet A en ſoit un. Appliquez FL, GK, gk à l'axe de la parabole; prolongez KG en M, kg en m, juſqu'à ce qu'elles rencontrent le diametre EM du cercle parallele à l'axe AB; par le centre E tirez EB perpendiculaire au même axe; joignez les rayons EA, EG, Eg, EF.

Nommez le parametre de la parabole, a; AB, b; EB, $c = MK = mk = NL$; AK, t; Ak, s; AL, r; KG, y; kg, z; FL, v. Et vous aurez $GM = GK + KM$, $y + a$; $gm = gk + km$, $z + c$; $FN = FL - NL$, $v - c$. De plus par la nature de la parabole, le parametre $a \times AK = \overline{KG}^2$; $at = yy$, $t = \frac{yy}{a}$; $a \times Ak = \overline{kg}^2$, $as = zz$, $s = \frac{zz}{a} = Ak$; $a \times AL = \overline{FL}^2$, $ar = vv$, $r = \frac{vv}{a} = AL$. Enſuite $ME = KB = AB - AK$, $b - \frac{yy}{a}$; $mE = kB = AB - Ak$, $b - \frac{zz}{a}$; $EN = BL = AL - AB$, $\frac{vv}{a} - b$. Maintenant dans le triangle rectangle EMG, $\overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MG}^2$, $bb - \frac{2byy}{a} + \frac{y^4}{aa} + cc + 2cy + yy =$ dans le triangle rectangle EBA, $\overline{EA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$, $bb + cc$. Ce qui ſe reduit à $2ab = \frac{y^3 + 2aac + aay}{y}$.

Dans le triangle rectangle Emg, $\overline{Eg}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mg}^2 = \overline{EA}^2$, d'où l'on tire $2ab = \frac{z^3 + 2aac + aaz}{z}$.

Dans le triangle rectangle ENF, $\overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{NF}^2 = \overline{EA}^2$, d'où l'on fait $2ab = \frac{v^3 - 2aac + aav}{v}$.

Donc 1° $2ab = \frac{y^3 + 2aac + aay}{y} = \frac{z^3 + 2aac + aaz}{z}$; $y^3 z + 2aacz + aayz = yz^3 + 2aacy + aayz$; $2aac = zzy + zyy$.

Donc 2° $2ab = \frac{y^3+2aac+aay}{y} = \frac{vv-2aac+aav}{v}$; $vy^2+2aacv+aavy = v^3y-2aacy+aavy$; $2aac = vvy-vyy$

Donc 3° $2aac = vvy-vyy = zzy+zyy, vv-vy = zz+zy$; $vv-zz = vy+yz$; & diviſant par $v+z$; le quotient eſt $v-z=y$; $v=y+z$. $FL = KG+kg$. Ainſi M. DESCARTES a eu raiſon de l'aſſurer.

3. Si Fig. 254. le cercle coupoit la parabole au ſommet A, au point F, & la touchoit au point G; l'on concevroit une ſeconde appliquée kg au point infiniment proche du point g; l'on feroit aux trois points F, G, g le même calcul que n. 2. l'on viendroit à l'équation $v=y+z$; & parceque $kg=KG$, puiſque l'une eſt infiniment peu differente de l'autre, l'on a $y=z$; & $v=2y$, FL double de KG. Fig. 254.

4. Que le cercle coupe Fig. 255. la parabole aux quatre points F, f, G, g, dont le ſommet A n'eſt pas un; & qu'il y en ait trois d'un côté de l'axe, & un de l'autre. Il faut outre les lignes de Fig. 253. n. 2. mener l'appliquée fl juſqu'en n, tirer le rayon Ef; nommer Al, q; lf, x; fn ſera $fl+ln$, $x+c$; & par la nature de la parabole $a \times Al = \overline{lf}^2$, $aq = xx$, $q = \frac{xx}{a} = Al$; & $nE = lB = AB - Al$, $b - \frac{xx}{a}$. Fig. 255.

Maintenant dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{En}^2 + \overline{nf}^2$, $bb - \frac{2bxx}{a} + \frac{x^4}{aa} + cc + 2cx + xx =$ dans le triangle rectangle EGM, $\overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MG}^2$, $bb - \frac{2byy}{a} + \frac{y^4}{aa} + cc + 2cy + yy$; $\frac{2byy}{a} - \frac{2bxx}{a} = \frac{y^4}{aa} - \frac{x^4}{aa} + 2cy - 2cx + yy - xx$; multipliez par aa, $2abyy - 2abxx = y^4 - x^4 + 2aacy - 2aacx + aayy - aaxx$; diviſez par $y-x$, $2aby + 2abx = y^3 + yyx + yxx + x^3 + 2aac + aay + aax$; diviſez encore par $y+x$, $2ab = \frac{y^3+yyx+yxx+x^3+2aac+aay+aax}{y+x}$.

Dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{Eg}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mg}^2$, d'où vous formez $2ab = \frac{z^3+xzz+xzz+x^3+2aac+aaz+aax}{z+x}$.

Dans le triangle Efn, $\overline{Ef}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{NF}^2$, d'où vous aurez $2ab = \frac{v^3-vvx+vxx-x^3-2aac+aav-aax}{v-x}$.

Donc 1° $2ab = \frac{y^3+yyx+yxx+x^3+2aac+aay+aax}{y+x} = \frac{z^3+xzz+xzz+x^3+2aac+aaz+aax}{z+x}$. Reduiſez à la même denomination, ôtez les termes qui s'effacent, & ordonnez ainſi ceux qui reſtent, $2aacz - 2aacy = yz^3 + xyzz + xz^3 + xxzz - y^3z - xyyz - xy^3 - xxyy$; diviſez par $z-y$, $2aac = yzz + yyz + 2xyz + xzz + xyy + xxz + xxy$.

Donc 2° $2ab = \frac{y^3+xyy+xxy+x^3+2aac+aay+aax}{y+x} = \frac{v^3-xvv+xxv-x^3-2aac+aav-aax}{v-x}$. Reduiſez à la même denomination. Diviſez par $v+y$, $2aac = yvv - vyy + vvx - 2vxy + xyy - vxx + xxy$.

Donc 3° $2aac = vyy - vyy + vvx - 2vxy + xyy - vxx + xxy = yzz + yy\zeta + 2xyz + xzz + xyy + xxz + xxy$, qui ſe reduit à $yvv + vvx - vyy - 2vxy - vxx - yzz - yy\zeta - 2xyz - xzz - xxz = 0$. Diviſez par $vy + yz + vx + xz$, le quotient eſt $v - z - y - x = 0$, $v = x + y + z$, $FL = fl + KG + kg$.

5. Si le cercle coupoit la parabole en F, f, & la touchoit en G, l'on concevroit le point g infiniment proche de G; l'on feroit le calcul comme n. 4. & l'on auroit toûjours l'équation $v = x + y + z$. Mais parceque KG, kg ſont infiniment peu differentes l'une de l'autre, l'on feroit $KG, y = kg, z$; & $v = x + 2y$, $FL = fl + 2KG$.

Fig. 256. 6. Que le cercle Fig. 256. coupe la parabole aux quatre points F, f, G, g, dont deux ſont d'un côté, & deux de l'autre. Il n'y a d'autre difference dans les valeurs des lignes de n. 2. 4. ſi ce n'eſt $GM = GK - KM$, $y - c$; $gm = gk - km$, $z - c$; $FN = FL + LN$, $v + c$; $Em = Bk = Ak - AB$, $\frac{zz}{a} - b$.

Maintenant dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{En}^2 + \overline{nf}^2$, $bb - \frac{2bxx}{a} + \frac{x^4}{aa} + xx + 2cx + cc = \overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{NF}^2$ dans le triangle rectangle ENF, $bb - \frac{2bvv}{a} + \frac{v^4}{aa} + vv + 2cv + cc$; $\frac{2bvv}{a} - \frac{2bxx}{a} = \frac{v^4}{aa} - \frac{x^4}{aa} + vv - xx + 2cv - 2cx$. Multipliez par aa, $2abvv - 2abxx = v^4 - x^4 + aavv - aaxx + 2aacv - 2aacx$; diviſez par $v - x$; $2abv + 2abx = v^3 + vvx + vxx + x^3 + 2aac + aav + aax$; diviſez encore par $v + x$, $2ab = \frac{v^3 + vvx + vxx + x^3 + 2aac + aav + aax}{v + x}$.

Dans le triangle rectangle $Enf = \overline{Ef}^2 = \overline{EG}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{MG}^2$; diviſez par $y + x$, & vous formerez $2ab = \frac{y^3 - xyy + xxy - x^3 - 2aac + aay - aax}{y - x}$.

Dans le triangle rectangle Enf, $\overline{Ef}^2 = \overline{Eg}^2 = \overline{Em}^2 + \overline{mg}^2$; diviſez par $z + x$, & vous aurez $2ab = \frac{z^3 - xzz + xxz - x^3 + aaz - aax - 2aac}{z - x}$.

Donc 1° $2ab = \frac{y^3 - xyy + xxy - x^3 - 2aac + aay - aax}{y - x} = \frac{v^3 + vvx + vxx + x^3 + 2aac + aav + aax}{v + x}$. Reduiſez à la même denomination, ôtez les termes qui s'effacent & arrangez ainſi les autres : $2aacy + 2aacv = vy^3 - vxyy + xy^3 - xxyy - v^3y - vvxy + v^3x + vvxx$; diviſez par $y + v$, $2aac = vyy - vvy - 2vxy + xyy + vvx - xxy + vxx$.

Donc 2° $2ab = \frac{y^3 - xyy + xxy - x^3 - 2aac + aay - aax}{y - x} = \frac{z^3 - xzz + xxz - x^3 + aaz - aax - 2aac}{z - x}$. Reduiſez à la même denomination, diviſez par $\zeta - y$, $2aac = xzz + 2xyz + xyy - yzz - yy\zeta - xxz - xxy$.

Donc 3° $2aac = vyy - vvy - 2vxy + xyy + xvv - xxy + vxx$

$vx\bar{x} = xzz + 2xyz + xyy - yzz - yyz - xxz - xxy$; qui ſe reduit à $vyy - vvy - 2vxy + vvx + xxv - xzz - 2xzy + yzz + yyz + xxz = 0$; diviſez par $vy - vx + yz - xz$, le quotient eſt $y - x - v + z = 0$, $x + v = y + z$, $fl + FL = KG + kg$.

ARTICLE V.

Deſcription des courbes par leur Equation ſolide.

1. LOrſque dans une équation, il n'y a qu'une des inconnuës qui monte au troiſiéme ou au quatriéme degré, & que l'autre n'eſt que du premier ou du ſecond ; on regarde le Problême, qui doit décrire la courbe, dont cette équation exprime la nature, comme plan ; & l'on n'a beſoin que du cercle & de la ligne droite, pour trouver tous les points qu'on cherche. Vous en avez des Exemples, Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

2. Lorſque les deux inconnuës vont au troiſiéme ou quatriéme degré, ſi celle qui monte au quatriéme n'a que le premier terme, comme $v^4 = ax^3 + x^4$; le Problême eſt encore plan ; car l'on a $vv = \sqrt{ax^3 + x^4}$, $v = \sqrt{\sqrt{ax^3 + x^4}}$, & chaque valeur de v ſe trouve avec la Regle & le Compas.

Si l'inconnuë qui eſt élevée au quatriéme degré n'a que le troiſiéme terme $v^4 - 2aavv = ax^3 + x^4$, le Problême eſt plan par la même raiſon, car ajoûtant a^4 de chaque côté, l'on fait $v^4 - 2aavv + a^4 = ax^3 + x^4 + a^4$, $vv - aa = \pm\sqrt{ax^3 + x^4 + a^4}$, $v = \sqrt{aa \pm \sqrt{ax^3 + x^4 + a^4}}$.

3. Mais lorſque cela n'arrive pas aux équations de trois ou quatre dimenſions, l'on ſuppoſe toutes les Regles de Liv. 2. Sect. 4. Art. 3. §. 3. & l'on cherche autant de points de la courbe à décrire, que l'on veut, en ſe ſervant de quelque Section conique outre le cercle & la ligne droite ; en un mot pour trouver chaque point, on conſtruit un Problême ſolide, comme on a fait ceux de toute cette Partie IV.

Il faut décrire la courbe, dont l'équation eſt $x^3 = -ayx + y^3$, dans laquelle a eſt l'unité, Fig. 257. Je tire à angles droits les lignes HG, BN ; les $+x$ ſe prennent ſur BN en allant de B vers I ; les $-x$ de l'autre côté ; les $+y$ ſur BG en allant de B vers G ; les $-y$ en allant de B vers H. FIG. 257.

Soit $y = +a$, l'équation ſe change en $x^3 = * - aax + a^3$, ou pour la reduire à l'expreſſion de M. DESCARTES $x^3 = * - apx + aaq$, en faiſant $p = a = q$. L'on décrit Fig. 258. la parabole AF, dont le parametre eſt AP, a ; le ſommet A, l'axe AC ; ſur lequel l'on coupe $AC = \frac{1}{2}a$; & parcequ'il y a $-p$ dans l'équation Regle 3. Art. 1. Sect. 1.

Part. 4. Liv. 3. l'on prend $CD = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a$, & le point D tombe ſur le ſommet A; au point D ou A l'on éleve la perpendiculaire $DE = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}a$; du point E, du rayon EA l'on décrit le cercle DF, qui coupe la parabole au point F, & l'appliquée FL, parcequ'il y a $+q$, eſt Reg. 7. du même endroit; la valeur vraye cherchée de x. C'eſt pourquoi Fig. 257. étant BG, $+y = a$, comme on l'a priſe, j'éleve la perpendiculaire $GK = BI$, $x; = FL$; & le point K eſt un point de la courbe cherchée, qui répond à l'appliquée $IK = BG$, $y = a$.

Soit $y = -a$, l'équation propoſée ſe change en $x^3 = * + aax - a^3$, ou $x^3 = * + apx - aaq$. Ainſi vous vous ſervirez de la même parabole AF, Fig. 258. & de $AC = \frac{1}{2}a$; mais parcequ'il y a $+p$, vous prendrez $Cd = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a$ en allant de C vers l; au point d vous éleverez la perpendiculaire $de = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}a$; du centre e, & de l'intervale eA vous décrirez le cercle Af, qui coupe la parabole en f; l'appliquée fl, parcequ'il y a $-q$, eſt la valeur fauſſe de x. C'eſt pourquoi Fig. 257. étant $BH = -y = a$, j'éleve la perpendiculaire $HM = BN$; $-x$; $= fl$; le point M eſt à la courbe cherchée, qui répond à l'appliquée $MN = BH = -y = a$.

On cherchera de la même maniere tous les autres points, que l'on voudra de la courbe MBK, & pour chacun l'on reſoudra un Problême ſolide; & l'on décrira la courbe en joignant tous ces points. Si l'on ſuppoſe par exemple $y = \frac{1}{2}a$, l'équation propoſée devient $x^3 = -\frac{1}{2}aax + \frac{1}{8}a^3$, &c. L'on doit obſerver, que la même parabole peut toûjours ſervir, auſſi-bien que le même point C; mais les points D, d varient, car dans ce ſecond cas CD doit être $\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a$; les points E, e varient auſſi, car ici DE eſt $\frac{1}{2}q = \frac{1}{16}a$: d'où il ſuit que les cercles ſont toûjours differens.

4. L'on peut auſſi chercher les points de la courbe, ou les valeurs de x, en ſuivant les Regles de Art. I. de cette Section.

5. Il arrive ſouvent que l'on trouve des manieres plus aiſées de décrire les courbes, ſans avoir beſoin de ſe ſervir de leur équation.

SECTION III.

Tous les Problêmes ſolides ſe peuvent reduire à trouver deux moyennes proportionelles, ou à diviſer un angle en trois parties égales.

M. DESCARTES.

IL ſeroit ſuperflu que je m'arrêtaſſe ici à donner d'autres Exemples ; car tous les Problêmes, qui ne ſont que ſolides, ſe peuvent reduire à tel point, qu'on n'a aucun beſoin de cette Regle pour les conſtruire ; ſinon entant qu'elle ſert à trouver deux moyennes proportionelles, ou bien à diviſer un angle en trois parties égales. Ainſi que vous connoîtrez en conſiderant, que leurs difficultez peuvent toûjours être compriſes en des équations, qui ne montent que juſqu'au quarré de quarré, ou au cube ; & que toutes celles qui montent au quarré de quarré, ſe reduiſent au quarré par le moyen de quelques autres, qui ne montent que juſques au cube ; & qu'enfin on peut ôter le ſecond terme de celle-ci, en ſorte qu'il n'y en a point qui ne puiſſe ſe reduire à quelqu'une de ces trois ſortes $z^3 = * - pz + q$, $z^3 = * + pz + q$, $z^3 = * pz - q$.

Or ſi on a $z^3 = * - pz + q$, la Regle dont * Cardan attribuë l'invention à un nommé Scipio Ferreus, nous apprend que la racine eſt $\sqrt{C + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

* *Artis magnæ cap.* 11. *Scipio Ferreus Bononienſis jam annis abhinc triginta ferme hoc capitulum invenit, tradidit verò Antonio Mariæ Florido veneto, qui cum in certamen cum*

Comme auſſi lorſqu'on a $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme eſt plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme, une pareille Regle nous apprend que la racine eſt $\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

D'où il paroît qu'on peut conſtruire tous les Problêmes, dont les difficultez ſe reduiſent à l'une de ces deux formes, ſans avoir beſoin des Sections coniques pour autre choſe, que pour tirer les racines cubiques de quelques quantitez données, c'eſt-à-dire pour trouver deux moyennes proportionelles entre ces quantitez & l'unité.

Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando veniſſet, occaſionem dedit, ut Nicolaus inveneſit & ipſe.

Puis ſi on a $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré de la moitié du dernier terme ne ſoit pas plus grand que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme ; en ſuppoſant le cercle $NQPV$, dont le demi-diametre NO ſoit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, c'eſt-à-dire la moyenne proportionelle entre le tiers de la quantité donnée p & l'unité ; & ſuppoſant auſſi la ligne NP inſcrite dans ce cercle, qui ſoit $\frac{3q}{p}$, c'eſt-à-dire qui ſoit à l'autre quantité donnée q, comme l'unité eſt au tiers de p ; il ne faut que diviſer chacun des deux arcs NQP, & NVP en trois parties égales, & on aura NQ la ſubtenduë du tiers de l'un, & NV la ſubtenduë du tiers de l'autre, qui jointes enſemble compoſeront la racine cherchée.

Fig. 248. 249.

Enfin ſi on a $z^3 = pz - q$, en ſuppoſant derechef le cercle $NQPV$, dont le rayon NO ſoit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & l'inſcrite NP ſoit $\frac{3p}{q}$ *, NQ la ſubtenduë du tiers de l'arc NQP ſera l'une des racines cherchées, & NV la ſubtenduë du tiers de l'autre arc ſera l'autre. Au moins ſi le quarré de la moitié du dernier terme n'eſt point plus grand, que le cube du tiers de la quantité connuë du penultiéme : car s'il étoit plus grand, la ligne NP ne pourroit être inſcrite dans le cercle, à cauſe qu'elle ſeroit plus longue que ſon diametre. Ce qui ſeroit cauſe que les deux vrayes racines de cette équation ne ſeroient qu'imaginaires, & qu'il n'y en auroit de réelles que la fauſſe, qui en ſuivant la Regle de Cardan ſeroit $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

* Faute d'impreſſion : il faut $\frac{3q}{p}$.

Au reſte il eſt à remarquer, que cette façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux côtez de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoiſſe, n'eſt en rien plus intelligible, ni plus ſimple, que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux ſubtenduës de certains arcs ou portions de cercles, dont le triple eſt donné.

En ſorte que toutes celles, qui ne peuvent être exprimées par les Regles de Cardan, le peuvent être autant ou plus clairement par la façon ici propoſée.

Car ſi par Exemple on croit de connoître la racine de cette équation $z^3 = * + pz + q$, à cauſe qu'on ſçait, qu'elle eſt compo-

ſée de deux lignes, dont l'une eſt le côté d'un cube, duquel le contenu eſt $\frac{1}{2}q$ ajoûté au côté d'un quarré, duquel derechef le contenu eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, & l'autre eſt le côté d'un autre cube, dont le contenu eſt la difference qui eſt entre $\frac{1}{2}q$, & le côté de ce quarré dont le contenu eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, qui eſt tout ce qu'on apprend par la Regle de Cardan.

Il n'y a point de doute, qu'on ne connoiſſe autant ou plus diſtinctement la racine de celle-ci $z^3 = * + pz - q$, en la conſiderant inſcrite dans un cercle, dont le demi-diametre eſt $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & ſçachant qu'elle y eſt la ſubtenduë d'un arc dont le triple a pour ſa ſubtenduë $\frac{3q}{p}$. Même ces termes ſont beaucoup moins embarraſſez que les autres, & ils ſe trouveront beaucoup plus courts, ſi on veut uſer de quelque chifre particulier pour exprimer ces ſubtenduës, ainſi qu'on fait du chifre $\sqrt{C.}$ pour exprimer le côté des cubes.

Et on peut auſſi enſuite de tout ceci exprimer les racines de toutes les équations, qui montent juſques au quarré de quarré, par les Regles ci-deſſus expliquées. En ſorte que je ne ſçache rien de plus à deſirer en cette matiere. Car enfin la nature de ces racines ne permet pas qu'on les exprime en termes plus ſimples, ni qu'on les détermine par aucune conſtruction, qui ſoit enſemble plus generale & plus facile.

Après que M. DESCARTES a donné des Methodes generales pour conſtruire toutes les équations du troiſiéme & du quatriéme degré, tant celles qui ſont ſolides, que celles qui ne le ſont pas; il en donne maintenant une autre pour les ſolides, qui conſiſte à trouver deux moyennes proportionelles & à diviſer un angle en trois parties égales; pour celles, qui demandent deux moyennes proportionelles, il ſuit l'expreſſion, que les Regles de Cardan fourniſſent. Il applique cette Methode aux équations du troiſiéme degré, & il ſe contente de dire que le quatriéme ſe reduit au ſecond par le moyen du troiſiéme.

Les Problêmes qui montent au cube, ſe reduiſent après qu'on en a ôté le ſecond terme, à ces formules, $z^3 = * - pz + q$, $z^3 = * + pz + q$, $z^3 = * + pz - q$; auſquelles l'on peut ajoûter $z^3 = * - pz - q$, $z^3 = ** \pm q$.

§. I. $z^3 = ** \pm q$.

On a vû la conſtruction & les racines de ces deux équations, Sect. 1. Art. 1. Ex. 1. 2. Pour les conſtruire on n'a eû beſoin que de trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & la quantité donnée q ; c'eſt-à-dire qu'on n'a eu beſoin que d'extraire la racine cubique de q. Car extraire une racine cubique d'une quantité quelconque cubique a^3, c'eſt trouver la quantité a racine de ce cube ; laquelle étant connuë, l'on trouve aa quarré de a, qui eſt troiſiéme proportionelle de l'unité & de a ; & aa étant trouvé, l'on cherchera encore a^3 qui eſt troiſiéme proportionelle de a & aa. Or ces quatre quantitez 1, a, aa, a^3 ſont évidemment en proportion continuë : donc pour trouver le cube a^3, il ne faut que trouver les deux quantitez a, aa, moyennes proportionelles entre 1, & la quantité donnée a^3.

§. II. $z^3 = * - pz + q$.

La racine réelle & poſitive eſt $\sqrt{C.\ \frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Pour le prouver ſoit $z = x - \frac{p}{3x}$; l'on a $z^3 = x^3 - px + \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3}$; $pz = px - \frac{pp}{3x}$; & l'équation $z^3 = -pz + q$ ſe changera en $x^3 - px + \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3} = -px + \frac{pp}{3x} + q$; $x^3 - \frac{p^3}{27x^3} = q$; multipliez tout par x^3, ce ſera $x^6 - \frac{1}{27}p^3 = qx^3$; $x^6 - qx^3 = \frac{1}{27}p^3$. Ajoûtez $\frac{1}{4}qq$ de chaque côté, vous ferez $x^6 - qx^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$, dont la racine quarrée eſt $z^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique eſt $x = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Subſtituons à preſent cette valeur de x dans $z = x - \frac{p}{3x}$, il viendra $z = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$, ce qui ne demande qu'une extraction de racine cubique, à ſavoir celle de $\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Pour reduire cette expreſſion à celle de Cardan, je multiplie le numerateur & le denominateur de la fraction $\frac{p}{3\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ par $\sqrt{C.\ -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, 1° le numerateur deviendra $p\sqrt{C.\ -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, 2° $\sqrt{C.\ -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, produit $\sqrt{C.\ \frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$, qui doit être multiplié par 3, de ſorte que le denominateur $3\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, ſe changera en $3 \times \frac{1}{3}p = p$;

& toute la fraction $\frac{p}{p}\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, $=\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, & enfin la valeur de z ſera $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, qui demande l'extraction de deux racines cubiques. De ſorte que par la raiſon apportée §. 1. il faut trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & $\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ quantité connuë, & deux autres entre l'unité, & $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Et ces deux quantitez étant trouvées, par la Sect. 2. Art. 2. Ex. 1. l'on ſouſtrait la plus petite de la plus grande; le reſte eſt la valeur cherchée de z.

Cette équation $z^3=*-pz+q$, ou $z^3=*-15z+124$ étant propoſée, pour former la racine réelle & poſitive de z ſuivant la forme de Cardan; il faut prendre 1° $\frac{1}{2}q=62$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}qq=3844$; 2° $\frac{1}{3}p=5$, dont le cube eſt $\frac{1}{27}p^3=125$; 3° ajoûter ce quarré à ce cube pour faire $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3=3969$; 4° en extraire la racine pour avoir $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=63$; 5° ajoûter $\frac{1}{2}q=62$, ce qui donne $\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=125$; 6° extraire la racine cubique de cette quantité, ce ſera $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=5$. Après cela il faut 7° ſouſtraire $\frac{1}{2}q=62$ de $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=63$, le reſte eſt $-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=1$; dont la racine cubique eſt $1=\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$; 8° l'on ſouſtraira la ſeconde de ces racines cubiques de la premiere de cette façon: $\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=5-1=4=z$.

Avec cette racine de z l'on trouvera les deux autres de l'équation propoſée, ſi l'on diviſe $z^3+15z-124=0$ par $z-4=0$; le quotient eſt $zz+4z+31=0$, dont les deux racines imaginaires ſont $z=-2\pm\sqrt{-27}$.

Dans cette forme $z^3=*-pz+q$, il y a une racine réelle poſitive, qui ne vient jamais ſous une forme imaginaire, parceque tout eſt poſitif ſous $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Les deux autres racines ſont imaginaires.

Mais la racine réelle poſitive vient ſouvent, lorſqu'on veut l'exprimer en nombres, ſous une forme irrationelle, quoique cette racine ſoit rationelle. Car ſoit propoſée l'équation $z^3=*-6z+88$; la valeur vraye & réelle de z eſt 4, puiſque ſubſtituant 4 pour z, 64 pour z^3, l'équation devient $64=-24+88=64$. Cependant ſi vous cherchez la valeur de z ſuivant la Formule de Cardan, vous trouverez $\frac{1}{2}q=44$, $\frac{1}{4}qq=1936$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$; & $z=\sqrt{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=\sqrt{C.44+\sqrt{1944}}-\sqrt{C.-44+\sqrt{1944}}$, qui eſt une forme irrationelle, parceque 1944 n'eſt pas un quarré parfait. Cette valeur de z ſe trouve auſſi aiſément qu'une rationelle par la Geometrie comme on a vû, Sect. 1. Art. 1. Exemple 5.

§. III. $z^3 = * + pz + q$, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt plus grand que $\frac{1}{27}p^3$.

La racine réelle & poſitive eſt $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Ce qui ſe prouve ainſi. Soit $z = x + \frac{p}{3x}$; l'on aura $z^3 = x^3 + px + \frac{pp}{3x} + \frac{p^6}{27x^3}$; $pz = +px + \frac{pp}{3x}$; & l'équation $z^3 = +px + q$ deviendra $x^3 + px + \frac{pp}{3x} + \frac{p^3}{27x^3} = +px + \frac{pp}{3x} + q$; $x^3 + \frac{p^3}{27x^3} = q$.

Multiplions tout par x^3, il vient $x^6 + \frac{1}{27}p^3 = qx^3$, $x^6 - qx^3 = -\frac{p^3}{27}p^3$; ajoûtons dans chaque membre $\frac{1}{4}qq$, nous aurons $x^6 - qx^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, dont la racine quarrée eſt $x^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique eſt $x = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Maintenant ſubſtituons la valeur de x dans $z = x + \frac{p}{3x}$; nous formerons $z = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$ qui n'a beſoin que d'une extraction de racine cubique. Nous reduirons cette expreſſion à celle de Cardan, ſi nous multiplions le numerateur & le denominateur du ſecond terme $\frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$ par $\sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. 1°. Le numerateur deviendra $p\sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. 2°. $\sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ produit $\sqrt{C. + \frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$, qui doit être multiplié par 3, de ſorte que le denominateur ſe changera en p; & toute la fraction $\frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$ devient $\frac{p}{p}\sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, & enfin la valeur de z ſera $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, qui a beſoin de deux extractions de racines cubiques. Ainſi ſuivant ce qui a été dit §. 1. il faut ſeulement trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & la quantité connuë $\sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, & deux autres entre l'unité & la quantité donnée $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$. Ces deux quantitez ſe trouvent Ex. 1. Art. 1. Sect. 1. on les ajoûte, & la ſomme eſt la valeur cherchée de z.

Cette équation $z^3 = * + pz + q$, ou $z^3 = * 27z + 730$ étant propoſée, pour compoſer la valeur de ſa racine réelle & poſitive ſuivant la Forme de Cardan, il faut 1° prendre $\frac{1}{2}q = 365$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}qq = 133225$; 2° prendre $\frac{1}{3}p = 9$, dont le cube eſt $\frac{1}{27}p^3 = 729$; 3° du quarré ôter le cube pour avoir $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = 132496$; 4° en extraire la racine,

racine, qui ſera $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 364$; 5° ajoûter $\frac{1}{2}q$, ce qui fait $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 729$; 6° en extraire la racine cubique, $\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 9$. 7° Il faut encore ſouſtraire de $\frac{1}{2}q = 365$ la quantité $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 364$, le reſte $\frac{1}{2}q - \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 1$. 8°. L'on ajoûtera enfin les deux quantitez de cette façon $\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = 9 + 1 = 10 = z$.

Avec cette racine de z, l'on découvrira les deux autres, ſi l'on diviſe la propoſée $z^3 - 27z - 730 = 0$ par $z - 10 = 0$, car le quotient, qui les contient, eſt $zz + 10z + 73$, dont les deux racines imaginaires ſont $z = -5 \pm \sqrt{-48}$.

Dans cette forme $z^3 = * + pz + q$ il y a une racine réelle & poſitive, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, car alors il n'y a rien d'imaginaire dans la Formule de Cardan. Les deux autres racines ſont imaginaires. Mais la racine réelle peut ſouvent venir ſous une forme irrationelle, lorſqu'on veut l'exprimer en nombres; la Geometrie la trouvera auſſi aiſément qu'une autre, comme elle a fait Sect. 1. Art. 1. Ex. 3.

§. 4. $z^3 = * + pz + q$, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt moindre que $\frac{1}{27}p^3$.

Sa racine eſt encore $z = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Elle eſt ſous une forme imaginaire, puiſque le total de ce qui eſt ſous le ſigne radical $\sqrt{}$. eſt negatif: cela pourtant n'empêche pas que la racine ne ſoit réelle; & c'eſt ce qu'on appelle le cas irreductible, c'eſt-à-dire celui, où une racine réelle ſe preſente ſous une forme imaginaire. Il a été nommé irreductible, parceque l'Analyſe n'a pas trouvé le moyen de le reſoudre, la Geometrie le reſout pourtant auſſi facilement que le cas reductible, car Sect. 1. Art. 1. les mêmes Regles ſervent également pour les deux cas.

Cependant ſi la Geometrie vouloit ſe ſervir de la Formule de Cardan, elle ne pourroit pas le reſoudre, c'eſt-à-dire qu'elle ne pourroit pas trouver les deux moyennes proportionelles entre l'unité & les quantitez données $\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, puiſqu'elle ne peut pas extraire la racine quarrée d'une grandeur negative $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$. C'eſt pour cela que M. DESCARTES a dit que ces ſortes de racines ne peuvent s'exprimer ſuivant les Regles de Cardan; ce qui doit s'entendre d'une maniere, qui donne moyen de la reſoudre.

M. DESCARTES cherche donc alors la valeur de z par la triſection de l'angle.

Soit donc proposée l'équation $z^3 = * + pz + q$, & que le quarré $\frac{1}{4}qq$ de la moitié de la quantité connuë q du dernier terme ne soit pas plus grand que le cube $\frac{1}{27}p^3$ du tiers de la quantité connuë p du penultiéme terme.

F.c. 248. 249. Décrivez Figure 248. le cercle NVP, dont le rayon ON soit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. qui est moyenne proportionelle entre le tiers de la quantité donnée p, & l'unité : car $\frac{1}{3}p : \sqrt{\frac{1}{3}p} :: \sqrt{\frac{1}{3}p} : 1$.

Ensuite dans ce cercle inscrivez $NP = \frac{2q}{p}$, qui est à l'autre quantité donnée q, comme l'unité est au tiers de p : car $\frac{2q}{p} : q :: 1 : \frac{1}{3}p$.

Après cela supposez l'arc NPQ, dont NP est la corde, divisé en trois parties égales NQ, QT, TP égales chacune à $-z$; operez comme Sect. 2. Art. 3. n. 1. excepté ce qui suit. Dans les triangles semblables NOQ, QNR, RQS vous avez ces analogies, $ON, \sqrt{\frac{1}{3}p} : NQ, -z ::$ $NQ, -z : QR, \frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} :: QR, \frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} : RS, = \frac{z^4}{\frac{1}{3}pz} = -\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$. Et parcequ'il s'en faut seulement $RS, -\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$, que la ligne NP, $\frac{2q}{p}$ ne soit égale aux trois cordes NQ, QT, TP égales chacune à $-z$; si à NP, $\frac{2q}{p}$ l'on ajoûte RS, $-\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$, l'on fera cette égalité $\frac{2q}{p} - \frac{z^3}{\frac{1}{3}p} = -3z$; $-\frac{z^3}{\frac{1}{3}p} = 3z + \frac{2q}{p}$, & multipliant tout par $\frac{1}{3}p$, $z^3 = * pz + q$.

Maintenant suivant les Regles de Sect. 1. Art. 1. l'on décrit Fig. 249. la parabole FAG, & le cercle FAG, & l'on tire les appliquées FL, GK, gk. De plus Sect. 1. Art. 1. Regle 6. parcequ'il y a $+q$ dans l'équation construite, la racine kg est la premiere racine fausse égale à $NQ, -z$; KG est la seconde racine fausse égale à $NV, -z$; & ces deux racines, comme M. DESCARTES le remarque, sont égales à la racine vraye cherchée $FL, +z = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

De sorte que pour trouver la racine de l'équation $z^3 = * + pz + q$, lorsque $\frac{1}{4}qq$ est moindre que $\frac{1}{27}p^3$, il ne faut que diviser un angle en trois parties égales. Cette même équation a toûjours trois racines, une vraye, deux fausses inégales, ces deux dernieres sont réelles *dans le cas irreductible, & dans l'autre imaginaires.*

Au reste il ne faut pas être surpris que l'on ait pris ici $NQ = -z$, & que pour la trisection de l'angle l'on ait fait, Sect. 2. Art. 3. n. 1. $NQ = +z$. C'est que dans le Problème de la trisection de l'angle l'on cherche la corde du tiers de l'arc NP, c'est à-dire qu'on cherche la racine vraye de l'équation qu'on doit former ; au lieu qu'ici l'équation $z^3 = * pz + q$ est donnée, & qu'on ne peut la former, qu'en supposant $NQ = -z$; car si on la supposoit $+z$, l'on viendroit à $z^3 = * + 3pz - q$.

Il ne reſte plus qu'à faire voir, que des racines réelles peuvent paroître ſous une forme imaginaire dans la forme de Cardan. Cette équation $z^3 = *pz + q$, $z^3 = 90z + 100$, a pour ſa racine vraye poſitive 10, puiſque ſi l'on ſubſtituë 10 pour z, 1000 pour z^3, l'on fait $1000 = 900 + 100$. Cependant ſi l'on veut compoſer ſa valeur dans la Forme de Cardan, l'on prendra $\frac{1}{2}q = 50$; $\frac{1}{4}qq = 2500$, $\frac{1}{3}p = 30$, $\frac{1}{27}p^3 = 27000$; $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = -24500$; $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{-24500}$; & $\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt{C.\ 50 + \sqrt{-24500}} + \sqrt{C.\ 50 - \sqrt{-24500}} = z$. Le terme $\sqrt{-24500}$ rend toute la forme imaginaire.

§. V. $z^3 = * + pz + q$, lorſque $\frac{1}{4}qq = \frac{1}{27}p^3$.

Sa racine $z = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, à cauſe que $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 0$, ſe reduit à $z = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q} = 2\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q} = \sqrt{C.\ 4q}$, laquelle ſe conſtruit comme §. 1. en trouvant deux moyennes proportionelles entre 1 & $\sqrt{C.\ 4q}$.

Soit propoſée l'équation $z^3 = * + pz + q$, ou $z^3 = * + 12z + 16$. Vous avez $\frac{1}{2}q = 8$; $\frac{1}{4}qq = 64$; $\frac{1}{3}p = 4$, $\frac{1}{27}p^3 = 64$; $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{64 - 64} = 0$, & $z = \sqrt{C.\ 4q} = \sqrt{C.\ 64} = 4$.

Diviſez $z^3 - 12z - 16 = 0$ par $z - 4$, le quotient eſt $zz + 4z + 4 = 0$, dont les deux racines fauſſes réelles ſont $z = -2$.

§. VI. $z^3 = * + pz - q$, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt moindre que $\frac{1}{27}p^3$.

Sa racine réelle negative eſt la même que la poſitive de la precedente $z^3 = * + pz + q$. C'eſt donc $-z = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, on le prouve de cette ſorte. Soit $-z = x + \frac{p}{3x}$, nous aurons $-z^3 = x^3 + px + \frac{pp}{3x} + \frac{p^3}{27x^3}$, $z^3 = -x^3 - px - \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3}$; $+pz = -px - \frac{pp}{3x}$; & l'équation $z^3 = +px - q$ devient $-x^3 - px - \frac{pp}{3x} - \frac{p^3}{27x^3} = -px - \frac{pp}{3x} - q$; $x^3 + \frac{p^3}{27x^3} = q$, multiplions par x^3, il vient $x^6 + \frac{1}{27}p^3 = qx^3$; $x^6 - qx^3 = -\frac{1}{27}p^3$. Ajoûtons de chaque côté $\frac{1}{4}qq$, c'eſt $x^6 - qx^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, dont la racine quarrée eſt $x^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique eſt $x = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

A preſent ſubſtituons cette valeur de x dans $-z = x + \frac{p}{3x}$, nous ferons $-z = \sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{p}{3\sqrt{C.\ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$, qui ne demande qu'une extraction de racine cubique. Nous reduirons

cette expreſſion à celle de Cardan, en multipliant le numerateur & le denominateur de $\frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}}$, &c. comme §. 3. & l'on trouve $-z=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$, qui, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt moindre que $\frac{1}{27}p^3$, comme on le ſuppoſe ici, paroît ſous une forme imaginaire, quoiqu'elle ſoit réelle. La Geometrie ne peut pas, en ſuivant cette formule trouver la valeur de z, parcequ'elle ne peut pas trouver les deux moyennes proportionelles, ainſi qu'on l'a dit §. 4. M. DESCARTES ſe ſert encore de la triſection de l'angle.

FIG. 248. 249. On fera donc Fig. 248. 249. cette conſtruction. Décrivez Fig. 248. le cercle NVP, dont le rayon ON eſt $\sqrt{\frac{1}{3}p}$; dans ce cercle inſcrivez $NP=\frac{3q}{p}$; enſuite operez comme Sect. 2. Art. 3. n. 1. excepté ce qui ſuit. Dans les triangles ſemblables NOQ, QNR, RQS, $ON, \sqrt{\frac{1}{3}p} : NQ, z : : NQ, z : QR, \frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} : : QR, \frac{zz}{\sqrt{\frac{1}{3}p}} : RS, z^4=\frac{z^3}{\frac{1}{3}pz}\cdot\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$. Et parcequ'il s'en faut ſeulement RS, $\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$, que la ligne NP, $\frac{3q}{p}$ ne ſoit égale aux trois cordes NQ, QT, TP égales chacune à z; ſi à NP, $\frac{3q}{p}$ l'on ajoûte $RS=\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}$, l'on fera cette égalité $\frac{3q}{p}+\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}=3z$, $\frac{z^3}{\frac{1}{3}p}=3z-\frac{3q}{p}$; multipliez tout par $\frac{1}{3}p$, & vous aurez $z^3=*+pz-q$ équation propoſée.

A preſent ſuivant les Regles de Sect. 1. Art. 1. l'on décrit Fig. 249. la parabole FAG, & le cercle FAG, & l'on tire les appliquées FL, GK, gk.

Ainſi Sect. 1. Art. 1. Regle 6. parcequ'il y a $-q$ dans la propoſée l'appliquée kg eſt la premiere racine vraye égale à NQ, $+z$; KG la ſeconde vraye égale à NV, $+z$; & ces deux racines ajoûtées enſemble compoſent la troiſiéme FL, qui eſt fauſſe $-z=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

De ſorte que pour trouver la racine de l'équation $z^3=*+pz-q$, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt moindre que $\frac{1}{27}p^3$, il ne faut que diviſer un angle en trois parties égales. Cette équation a trois racines, une fauſſe, deux vrayes inégales, la fauſſe eſt égale à la vraye, & les deux vrayes aux deux fauſſes de §. 4. dans le cas irreductible.

§. VII. $z^3=*+pz-q$, lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt plus grand que $\frac{1}{27}p^3$.

Sa racine réelle negative eſt $-z=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$. Pour laquelle, ſuivant ce qui a été dit §. 1. il ne faut que trouver deux moyennes proportionelles entre l'unité & la quan-

tité connuë $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, & deux autres entre l'unité & la quantité connuë $\sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. Ces deux quantitez ſe trouvent Sect. 1. Art. 1. Exemple 1. on les ajoûte, & la ſomme eſt la valeur cherchée de $-z$.

Cette équation a dans le cas preſent une racine fauſſe égale à la vraye de §. 3. deux vrayes imaginaires.

M. DESCARTES dit, que lorſque $\frac{1}{4}qq$ eſt plus grand que $\frac{1}{27}p^3$ dans l'équation $\zeta^3 = * + p\zeta - q$; NP ſera Fig. 248. plus grande que le diametre du cercle NVP; cependant ſoit propoſée $z^3 = *\,12z - 20$, ou $z^3 = *\,pz - q$. L'on a $p = 12$, $\frac{1}{3}p = 4$, $\sqrt{\frac{1}{3}p} = \sqrt{4} = 2$; le diametre égal à $2NO = 2\sqrt{\frac{1}{3}p} = 4$. $q = 20$, $\frac{1}{2}q = 10$, NP, $\frac{3p}{q} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$. Ainſi NP, $\frac{9}{5}$ n'eſt pas plus grande que $2NO$, 4; quoique $\frac{1}{4}qq$, 100 ſoit plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, 64.

Il faut ajoûter le cas où $\frac{1}{4}qq = \frac{1}{27}p^3$, & où les deux racines vrayes ſont égales entr'elles & la negative égale aux deux réelles, priſes enſemble.

§. VIII. $z^3 = * - pz - q$.

Sa racine réelle & negative eſt $-\zeta = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Je le prouve ainſi. Soit $-z = x - \frac{p}{3x}$, l'équation propoſée ſe reduira à $x^3 - q = \frac{p^3}{27x^3}$; d'où ayant multiplié par x^3, vous formerez la racine quarrée $x^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, dont la racine cubique eſt $x = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Je ſubſtituë cette valeur de x dans $-z = x - \frac{p}{3x}$, il ſe fait $-\zeta = \sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$, qui ſe reduit à l'expreſſion de Cardan $\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, comme on a fait §. 2.

Cette racine fauſſe eſt la même que celle de $z^3 = * - p\zeta + q$ §. 2. Les deux autres ſont imaginaires. Il ne faut encore trouver ici que deux moyennes proportionelles entre l'unité & quelques quantitez connuës.

§. IX. *Expreſſion des racines des Equations quarré-quarrées.*

Parceque M. DESCARTES a donné Sect. 1. Art. 2. des Regles generales pour conſtruire toutes les équations ſolides du quatriéme degré, ſans reduire leurs racines à une expreſſion Algebrique, je me contenterai d'en donner ici un Exemple. Ce que je fais principalement pour montrer, com-

me M. DESCARTES l'assure, que les équations, qui montent au quarré de quarré se reduisent au quarré par le moyen de quelques autres qui ne montent que jusques au cube; & qu'ainsi tous les Problêmes solides se reduisent à une des formules, qui expriment les équations cubiques.

Soit proposée l'équation $z^4 * + 3zz + 2z - 12 = 0$, ou $z^4 * + pzz + qz - r = 0$.

1°. Si elle avoit un second terme, on le feroit évanoüir, Part. 2. Sect. 2. Art. 3.

2°. Part. 2. Sect. 4. on la transforme en celle-ci, qui est cubique

$$y^6 + 2py^4 \begin{matrix} + ppyy \\ + 4ryy \end{matrix} - qq = 0$$

3°. Part. 2. Sect. 3. L'on cherche la valeur de y; si on la trouve, le Problême est plan.

4°. Alors Part. 2. Sect. 4. l'on substituë la valeur de y & de yy dans ces deux équations du second degré $zz - yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, $zz + yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$. L'on extrait les racines de chacune de ces équations, & l'on a les quatre racines cherchées de z. Ainsi les équations du quatriéme degré, lorsque le Problême est plan, se reduisent à une du second, par le moyen d'une autre qui est cubique. Mais quand le Problême est solide, cela arrive encore de cette maniere.

5°. Si l'on ne peut trouver la valeur de y dans l'équation cubique

$$y^6 \begin{matrix} + 2py^4 + ppyy \\ + 4ryy \end{matrix} - qq = 0,$$ le Problême est solide Part. 2. Sect. 4.

Il faut en faire évanoüir le second terme, en prenant $yy + \frac{2}{3}p = x$, $x - \frac{2}{3}p = yy$, afin de reduire cette équation cubique à une des formules cubiques dont on a donné la construction, Sect. 1. Art. 1. La reduite est

$$x^3 * \begin{matrix} - \frac{1}{12}ppx - \frac{2}{27}p^3 \\ + 4rx \quad - \frac{8}{3}pr \\ - qq \end{matrix} = 0, \text{ ou } x^3 * + 45x - 294 = 0, \text{ nom-}$$

mons 45, a; 294, b; l'on aura $x^3 * + ax - b = 0$, $x^3 * - ax + b$, qui a été construite Sect. 1. Art. 1. Ex. 4. & qui a Sect. 3. §. 2. une racine réelle positive $x = \sqrt{C. \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, que je nomme c pour la facilité du calcul.

6°. Substituons c pour x dans $yy = x - \frac{2}{3}p$, nous aurons $yy = c + \frac{2}{3}p$; $y = \sqrt{c - \frac{2}{3}p}$, que je nomme d, & yy sera dd.

7°. Subſtituons cette valeur d pour y, & dd pour yy dans les deux équations quarrées de n. 4. qui ſont $zz - yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = o$, $\zeta\zeta + y\zeta + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = o$: elles ſe changeront en celles-ci, $zz - dz + \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2d} = o$, $zz + d\zeta + \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2d} = o$.

8°. Pour trouver les racines de la premiere équation, l'on ordonnera ainſi les termes $zz - dz = -\frac{1}{2}dd - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2d}$, les deux racines imaginaires ſont $z = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{-\frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2d}}$.

9°. Pour avoir les racines de la ſeconde équation, qui eſt $zz + dz = -\frac{1}{2}dd - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2d}$, l'on rangera ainſi les termes $zz + dz = \frac{q}{2d} - \frac{1}{2}dd - \frac{1}{2}p$; les deux racines ſont $z = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{q}{2d} - \frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}p}$.

10. Remettons la valeur de d dans la valeur poſitive de $z = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{q}{2d} - \frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}p}$, il viendra $z = -\frac{1}{2}\sqrt{c} - \frac{2}{3}p + \sqrt{2\sqrt{c} - \frac{2}{3}p - \frac{q}{\sqrt{c}} - \frac{1}{4}c - \frac{1}{3}p}$.

11. Pour c mettons encore ſa valeur, ce ſera $z = -\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{2}{3}p. + \left| \frac{q}{\sqrt{2\sqrt{\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{2}{3}p - \frac{1}{4}\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{3}p.}} \right.$

SECTION IV.

Exemples de Problêmes ſolides.

ARTICLE I.

Inſcrire un Eptagone & un Enneagone dans le cercle.

EXEMPLE I. *Inſcrire un Eptagone dans le Cercle.*

1. SUppoſons Fig. 259. que l'Eptagone $ABCDELM$ eſt inſcrit dans le cercle donné ADL. D'un des angles A l'on tirera le diametre AKF, le point F eſt le milieu de l'arc DE. Du point F l'on tirera les cordes FB, FC, FD, FE; & l'on joindra le rayon KB. FIG. 259.

2. Prolongez FC en G juſqu'à ce qu'elle rencontre $BG = BF$. Les triangles BKF, GBF ſont iſoſceles & équiangles, par 21. 3. Eucl. donc les quatre angles KBF, KFB, BFG, BGF ſont égaux. Les triangles GBC, ABF ſont encore égaux.

3. Prolongez FD en H juſqu'à ce qu'elle rencontre $CH = CF$. 1°. Le

triangle HCF eſt iſoſcele, comme n. 2. le triangle GBF. 2°. Ces deux triangles ſont équiangles ; donc les quatre angles CFH, CHF; BFG, BGF ſont égaux. De plus les triangles BCF, CDH ſont égaux.

4. Prolongez enfin EF en I juſqu'à ce qu'elle rencontre $DI = DF$. Le triangle FDI eſt iſoſcele, comme n. 3. Le triangle HCF, & ces deux triangles ſont équiangles. Les triangles CDF, EDI ſont égaux.

5. Nommons à preſent les connuës AF, $2a = CG$. n. 2. KF, a; les inconnuës BF, $x = DH$; CF, $y = EI$; DF, $z = FE$.

6. Dans les triangles BKF, GBF ſemblables n. 2. vous avez cette Analogie $KF, a : FB, x :: BF, x : FG, \frac{xx}{a}$. Et $CF, y = FG - CG$, $\frac{xx}{a} - 2a = EI$, n. 4.

Dans les triangles GBF, HCF ſemblables n. 3. vous avez $BF, x : FG, \frac{xx}{a} :: CF, y : FH, \frac{xy}{a}$; & mettant pour y ſa valeur, $FH = \frac{x^3}{aa} - 2x$ Et FD, $z = FH - DH, = \frac{x^3}{aa} - 3x$.

Dans les triangles HCF, IDF, ſemblables n. 4. vous avez $CF, y : FH, \frac{xy}{a} :: DF, z : FI, \frac{xz}{a}$; & mettant pour z ſa valeur, $FI = \frac{x^4}{a^3} - \frac{2xx}{a}$; & $EF, z = EI - IF, \frac{xx}{a} - 2a - \frac{x^4}{a^3} + \frac{2xx}{a}$.

7. L'on a donc deux valeurs de z; FD, $\frac{x^3}{aa} - 3x = EF$, $\frac{4xx}{a} - 2a - \frac{x^4}{a^3}$. Multipliez tout par a^3, il vient $x^4 + ax^3 - 4aaxx - 3a^3x + 2a^4 = 0$, qui peut ſe diviſer juſte par $x + 2a = 0$, le quotient eſt $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$. Or $x = -2a$ n'eſt pas la valeur cherchée de la corde FB, x, puiſque $FA = 2a$ eſt plus grande que FB : la racine cherchée eſt donc dans l'équation $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$, qui ne peut être diviſée ſans reſte par aucun binome tel qu'on le demande Part. 3. Sect. 3. ainſi le Problême eſt ſolide.

8. Pour en faire évanoüir le ſecond terme, prenez $x - \frac{1}{3}a = v$, $v + \frac{1}{3}a = x$, & la ſubſtitution donnera $v^3 * - \frac{7}{3}aav + \frac{7}{27}a^3 = 0$, $v^3 = * + \frac{7}{3}aav - \frac{7}{27}a^3$, $z^3 = * + pz - q$, en faiſant $\frac{7}{3}aa = p$, $\frac{7}{27}a^3 = q$. Parceque $\frac{1}{4}qq = \frac{49}{2916}$ eſt plus petit que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{343}{729}$, ce Problême appartient à la triſection de l'angle Sect. 3. §. 6. En effet Fig. 248. le diametre $2NO = 2\sqrt{\frac{1}{3}p} = 2\sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{28}{9}}$ eſt plus grand que l'inſcrite $NP = \frac{2q}{p} = \frac{1}{2}$.

9. L'on conſtruira l'équation $v^3 = * + \frac{7}{3}aav - \frac{7}{27}a^3$, comme Ex. 3. Art. 1. Sect. 1. Fig. 236. Et ſi à GK la plus grande des valeurs vrayes de v, vous ajoûtez $\frac{1}{3}a$, vous aurez $v + \frac{1}{3}a = x = FB$, Fig. 259. Inſcrivez FB dans le cercle AFL, il reſtera l'arc BA, dont la corde AB eſt le côté cherché d'un Eptagone regulier inſcrit dans le cercle AFL.

EXEMPLE

EXEMPLE II. *Inſcrire un Enneagone dans un cercle.*

D'Abord 2.4. Eucl. vous inſcrirez un triangle équilateral ABC, Fig. 260. dans le cercle donné. Enſuite vous diviſerez l'arc ADB en trois parties égales, Sect. 2. Art. 3. La corde trouvée BD du tiers de cet arc eſt le côté cherché de l'Enneagone regulier, qui peut s'inſcrire dans le cercle donné. Fig. 260.

ARTICLE II.

Exemple du Problême de Pappus propoſé en 6. 7. 8. lignes.

§. I.

SOient données Fig. 261. les ſix lignes paralleles Aa, Bb, Dd, Ee, Ff, Gg. Fig. 261.

Il faut trouver le point C, d'où tirant ſur les données les perpendiculaires CA, CB, CD, CE, CF, CG; le ſolide $CA \times CB \times CD$ ſoit égal au ſolide $CE \times CF \times CG$.

Je ſuppoſe la choſe faite, & les diſtances AB, $a = BD = DE$; EF, $2a$; FG, $4a$; & l'inconnuë CB, y; l'on aura donc $CA = CB + BA$, $y + a$; $CD = CB - BD$, $y - a$; $CE = CB - BE$, $y - 2a$; $CF = BF - CB$, $4a - y$; $CG = BG - CB$, $8a - y$.

Par la ſuppoſition $CA \times CB \times CD$, $y^3 - aay = CE \times CF \times CG$, $56aay - 64a^3 - 14ayy + y^3$; $yy - \frac{57}{14}ay = -\frac{32}{7}aa$; $yy - \frac{57}{14}ay + \frac{3249}{784}aa = \frac{3249}{784}aa - \frac{32}{7}aa = -\frac{335}{784}aa$; d'où l'on tire $y = \frac{57}{28}a \pm \sqrt{-\frac{335}{784}aa}$, Problême impoſſible.

Mais ſi l'on demande $CA \times CB \times CE = CD \times CF \times CG$, l'on aura $12ayy - 46aay = -32aa^3$; dont les racines ſont $y = \frac{23}{12}a \pm \sqrt{\frac{145}{144}a^2}$. CB eſt la racine vraye, le lieu eſt à la ligne droite. Car ſi par le point C l'on mene la ligne Cc parallele à Bb, & que de chaque point c l'on tire des perpendiculaires ſur les données; elles ſeront égales aux premieres, $CB = cb$, $CA = ca$, &c. ainſi on aura la même équation; & CB eſt la racine vraye.

La racine fauſſe ſe prendra de l'autre côté de B, hors des paralleles, elle donnera encore un lieu à la ligne droite.

Que ſi l'on mettoit le point cherché en K entre les paralleles Dd, Ee; l'on auroit KB, y; KA, $y + a$; KD, $y - a$; KE, $2a - y$; KF, $4a - y$; KG, $8a - y$. Et ſi l'on demandoit $KA \times KB \times KD = KE \times KF \times KG$, l'équation ſeroit $y^3 - 7ayy + \frac{55}{2}aay - 32a^3 = 0$.

Vous ferez diſparoître la fraction en prenant $y = \frac{z}{2}$, & vous aurez $z^3 - 14azz + 110aaz - 256a^3 = 0$, qui ne peut être diviſée par

aucun binome, ainſi Sect. 3. le Problême eſt ſolide, & vous ôtez le ſecond terme en faiſant $z - \frac{14}{3}a = x$, $x + \frac{14}{3}a = z$.

La transformée eſt $x^3 * + \frac{134}{3}aax + \frac{1460}{27}a^3 = 0$. Et faiſant $\frac{134}{3} = p$, $\frac{1460}{27} = q$, $x^3 = * - apx - aaq$.

On cherchera la valeur réelle negative de x, comme Sect. 1. Art. 1. Exemple 6. & comme l'on a $z = x + \frac{14}{3}a$, l'on aura $-z = -x - \frac{14}{3}a$. C'eſt pourquoi ſi de la valeur trouvée de $-x$ vous retranchez $\frac{14}{3}a$, il reſtera la valeur de $-z$, qui étant diviſée par 2, donnera la valeur de $-y = \frac{-z}{2}$.

Le point K n'a donc pas été bien pris, mais il faudra ſur AB prolongée, prendre la valeur de $-y$ de l'autre côté de B, que n'eſt le point K, & par l'extrêmité de cette valeur l'on menera une paralelle à Bb, cette paralelle ſera le lieu cherché.

§. II.

Fig. 261. Soient données de poſition Fig. 262. les ſix lignes KE, HL, IA, BI, DA, FE, paralleles trois à trois, à égale diſtance, & perpendiculaires les unes ſur les autres. Elles feront quatre quarrez. Il faut trouver un point C, d'où ſi l'on mene des perpendiculaires ſur les données, l'on ait $CD \times CM \times CF = CB \times CH \times CK$.

Nommons chaque diſtance d'une parallele à l'autre, a; les inconnuës CB, y; CM, x; nous aurons $CD = y + a$; $CF = y + 2a$; par la même raiſon $CH = x + a$; CK, $x + 2a$.

L'équation ſera $xyy - xxy - 2aay + 2aax = 0$, qui étant diviſée par $y - x = 0$, donne pour quotient $xy - 2aa = 0$; l'on a donc deux valeurs de y, $y = x$, $y = \frac{2aa}{x}$. En effet ſoit que l'on ſubſtituë x, ſoit que l'on ſubſtituë $\frac{2aa}{x}$ à la place de y dans $xyy - xxy - 2aay + 2aax = 0$, les termes ſe détruiſent, $x^3 - x^3 - 2aax + 2aax = 0$, $\frac{4a^4x}{xx} - \frac{2aaxx}{x} - \frac{4a^4}{x} + 2aax = 0$.

On conſtruira le lieu $x = y$ en tirant la diagonale IE, dont tous les points C donneront CB, $y = CM$, x, car $CBIM$ ſera toûjours un quarré.

Fig. 263. On conſtruira encore le lieu $xy = 2aa$ à l'hyperbole entre ſes aſymptotes, Fig. 263. ſi l'on prend $IN = 2a$, $NP = a$ parallele à BI; & ſi entre les aſymptotes IM, IB, & par le point P l'on décrit l'hyperbole PC. Car par la nature des aſymptotes, l'on aura par tout $IN \times NP = IM \times MC$, $2aa = xy$.

Mais Fig. 262. ſuppoſons le point c au deſſus de K, & nommons cM, x; cH, $x - a$; cK, $x - 2a$, &c. & que l'on demande $cM \times cH \times cK = cb \times cd \times cf$; l'équation ſera $x^3 - 3axx + 2aax = y^3 + 3ayy + 2aay$, Problême ſolide.

Pour trouver la Figure dont cette équation exprime la nature, je fais

évanoüir le ſecond terme de $x^3 - 3axx + 2aax - y^3 - 3ayy - 2aay = 0$, en prenant $x - a = z$, $z + a = x$, $-z - a = -x$. La transformée ſera $z^3 * - aaz - y^3 - 3ayy - 2aay = 0$.

Les lignes Ib, IM ſe coupent à angles droits Fig. 264. le point I eſt le commencement des x & des y; les $+x$ vont vers b, les $-x$ de l'autre côté; les $+y$ du côté de M, les $-y$ de l'autre côté. Fig. 264.

Pour trouver le point c, qui répond à $IM = y$; je ſubſtituë a pour y dans $z^3 = aaz + y^3 + 3ayy + 2aay$, & c'eſt $z^3 = aaz + 6a^3$. Je cherche la valeur de z comme Sect. 1. Art. 1. Ex. 3. Après l'avoir trouvé, je lui ajoûte la longueur de a, afin d'avoir $z + a = x$. J'éleve la perpendiculaire $Mc = x$, & j'ai le point c cherché. Mais parceque l'équation $-x^3 + 3axx - 2aax = -y^3 - 3ayy - 2aay$ eſt la même que $x^3 - 3axx + 2aax = y^3 + 3ayy + 2aay$; je me ſers encore de la valeur de z, ou de $-z$, dont je retranche a, pour avoir $-z - a = -x$; & je fais $MC = -x$, & le point C eſt à la courbe cherchée. Je décris de la même maniere les deux portions Ac, IC, qui répondent aux $+y$.

Pour trouver les points des deux portions AEG, INP, qui répondent aux $-y$, je ſubſtituë differentes valeurs de a pour $-y$ dans $z^3 = aaz + y^3 + 3ayy + 2aay$, par exemple en ſubſtituant $\frac{1}{2}a = -y$, je fais $z^3 = aaz - \frac{1}{2}a^3$.

Quand on fait $x = 0$, l'équation ſe reduit à $y^3 + 3ayy + 2aay = 0$, & les racines ſont $y = 0$, $y + a = 0$, $y + 2a = 0$, c'eſt-à-dire que ſur la ligne IN, où les x ſont nuls, y eſt nul auſſi aux points I, où $y = 0$; R, où $-y = a$; N, où $-y = 2a$.

Si maintenant l'on fait $y = 0$, l'équation ſera $x^3 - 3axx + 2aax = 0$, dont les racines ſont $x = 0$, $x - a = 0$, $x - 2a = 0$, ainſi ſur la ligne IA, où les y ſont nuls, les x ſont auſſi nuls aux points I, où $x = 0$; S, où $x = a$; A, où $x = 2a$.

§. III.

Soient données de poſition les ſept paralleles Ee, Dd, Aa, Bb, Ff, Gg, Nn, dont la diſtance eſt égale, & que je nomme a. Il faut trouver le point C tel $CA \times CE \times CF \times CN = CB \times CD \times CG \times 4a$. Fig. 265.

Soit CB, y; l'on aura $CA = y + a$; cD, $y + 2a$; CE, $y + 3a$; CF, $y - a$; CG, $2a - y$; CN, $3a - y$. Et l'équation ſera $y^4 - 4ay^3 - 10aayy + 16a^3y + 9a^4 = 0$, qui ne peut ſe diviſer par aucun binome Part 3. Sect. 4. L'on en fait évanoüir le ſecond terme, en prenant $y - a = z$, $z + a = y$. La reduite eſt $z^4 * - 16aazz - 12a^3z + 12a^4 = 0$, ou en faiſant $16a = p$, $12a = q = r$, $z^4 * - apzz - aaqz + a^3r = 0$.

Après avoir reconnu que ce Problême n'eſt pas plan, on doit conſtruire la reduite $z^4 * - 16aazz - 12a^3z + 12a^4 = o$, ſuivant Sect. 1. Art. 2.

On trouvera deux valeurs vrayes de z, qui ſont les lignes n, m; on leur ajoûtera la longueur a, pour compoſer $z + a = x$; de ces deux x, l'un ſera BC, & l'autre BK, & les paralleles C, c, Kk ſatisfont à la queſtion. L'on trouve deux valeurs fauſſes de z, qui ſont les lignes p, q, dont on ôtera la valeur de a, pour avoir $-z-a=-x$; de ces deux $-x$, l'un eſt Br, l'autre Bs, & ſi par les points r, s l'on mene des paralleles à Cc, l'on aura encore deux lieux. Et ces quatre lieux donnent la même équation $y^4 - 4ay^3 - 10a^2y^2 + 16a^3y + 9a^4 = o$.

§. IV.

Fig. 266. Soient données les ſix lignes paralleles Fig. 266. SF, EH, AD, BI, GP, RN, & une ſeptiéme SR, qui les coupe à angles droits. Etant les diſtances RP, PI, IA, AH chacune égales à b, $HS = 2b$, l'on demande un point C, d'où ayant tiré ſur les données les perpendiculaires CB, CD, CF, CE, CG, CN, l'on ait $CB \times CE \times CF \times CN = CD \times CG \times CM \times 4b$.

Nommons CM, x; CB, y; CD, $b-y$; CE, $2b-y$; CF, $4b-y$; CG, $b+y$; CN, $2b+y$. L'équation eſt $y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 4bxyy + 16b^3y - 4b^3x = o$, qui ne peut ſe diviſer par aucun binome.

Comme une des inconnuës x n'eſt que d'une dimenſion, le Problême eſt plan, & pour le conſtruire l'on range ainſi les termes $4b^3x - 4bxyy = y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 16b^3y$; $x = \frac{y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 16b^3y}{4b^3 - 4byy}$.

Le point I eſt le commencement des x & des y; les $+x$ vont du côté de B, les $-x$ de l'autre côté; les $+y$ vont du côté de S, les $-y$ de l'autre côté.

Soit $y = o$; l'on a $x = \frac{o}{4b^3}$. Ainſi une des courbes paſſe au point I, ou $x = o$, $y = o$.

Soit $x = o$; l'on a $y^4 - 4by^3 - 4bbyy + 16b^3y = o$, dont les racines ſont $y = o$, $y = 2b$, $y = -2b$, $y = 4b$. Ainſi les courbes paſſent aux points I, H, R, S.

Soit $y = b$; c'eſt $x = \frac{9b^4}{o}$. La parallele AD, parceque $AI = b = y$, eſt une aſymptote des courbes.

Soit $-y = b$; c'eſt $x = -\frac{15b^4}{o}$. La parallele GP eſt donc une autre aſymptote.

Soit $y = \frac{1}{4}b$; l'on a $x = \frac{129}{153}b = \frac{63}{64}b$. Soit $y = \frac{1}{2}b$, l'on a $x = \frac{105}{40}b$. Ainſi la courbe, qui paſſe au point I, monte au deſſus de SR entre les paralleles AD, IB.

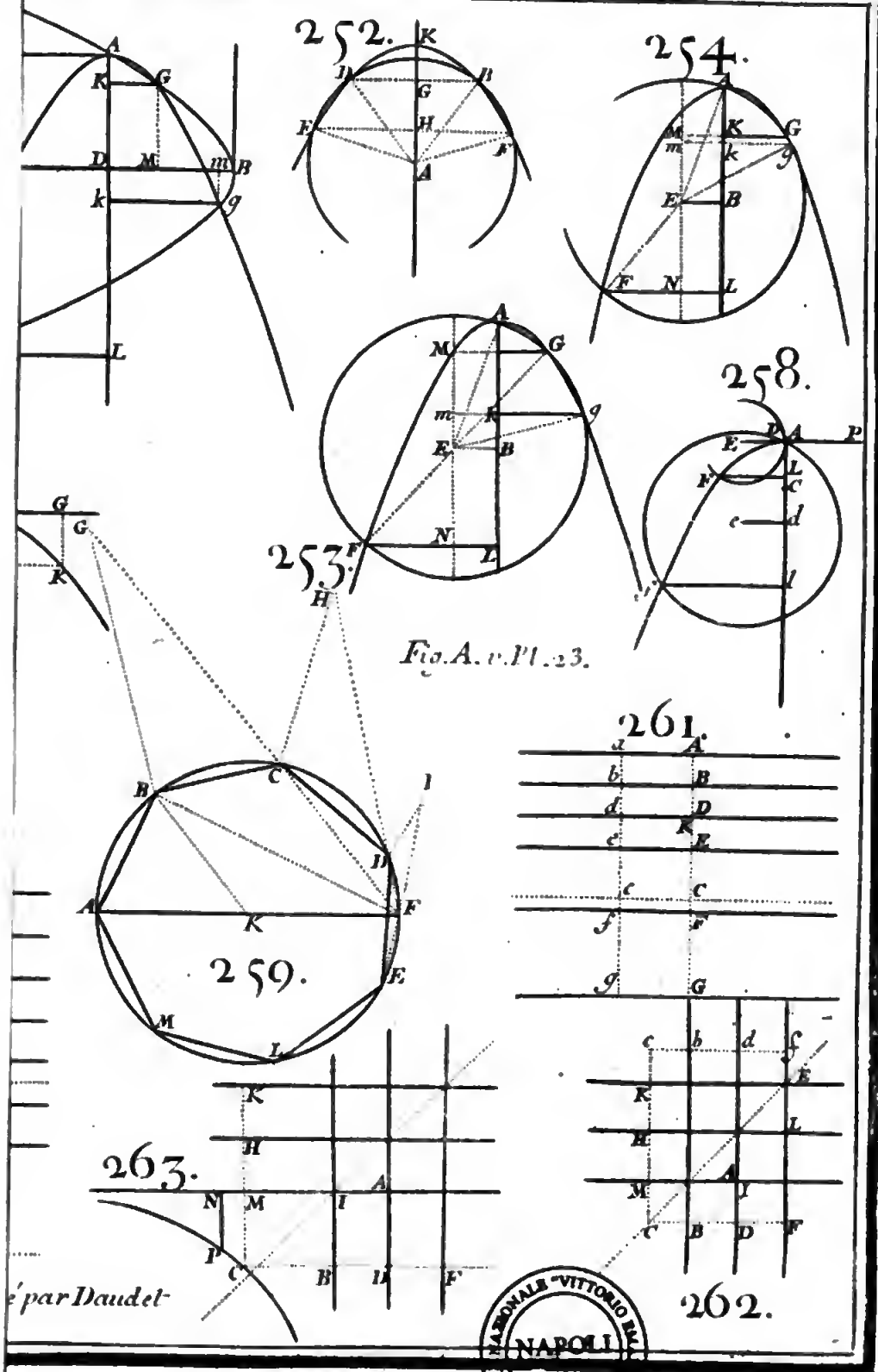


Fig. A. v. Pl. 23.

é par Daudet-

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Si l'on fait $-y = \frac{1}{2}b$; l'on trouvera que la même courbe deſcend au deſſous de SR entre les paralleles IB, PG.

Si l'on fait $y = \frac{1}{2}b$; on verra que la courbe qui paſſe au point H, s'étend ſous RS entre les paralleles AD, HE.

Si l'on fait $y = 3b$; la même courbe s'élevera au deſſus de SR entre les paralleles HE, SF.

Si l'on fait $y = 5b$; la même courbe deſcendra ſous SR au delà de SF.

Soit $-y = \frac{3}{2}b$; la courbe qui paſſe par R s'élevera au deſſus de SR entre les paralleles PG, RN.

Soit $-y = \frac{1}{2}b$; la même courbe s'étendra au deſſous de SR au delà de la parallele RN.

§. V.

Huit lignes paralleles ſont données de poſition, Fig. 267. chacune de leurs diſtances eſt a. L'on demande $CA \times CF \times CE \times CN = CB \times CD \times CG \times CH$. Fig. 267.

L'on a CB, y ; CA, $y + a$; CD, $y + 2a$; CE, $y + 3a$; CH, $y + 4a$; CF, $a - y$; CG, $2a - y$; CN, $3a - y$. L'équation eſt $4ay^3 + 6aayy - 16a^3y - 9a^4 = 0$; $y^3 + \frac{1}{2}ayy - 4aay - \frac{9}{4}a^3 = 0$; qui ſe diviſe juſte par $y + \frac{1}{2}a = 0$; ainſi une racine eſt $y = -\frac{1}{2}a$; le quotient eſt $yy + ay - \frac{9}{2}aa = 0$, dont les racines ſont $y = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{19}{4}aa}$. La premiere racine negative $y = -\frac{1}{2}a$ donne le point C au milieu de BF ; la ſeconde poſitive $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{19}{4}aa}$ donne le point c entre G & F ; la troiſiéme negative $y = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{19}{4}aa}$ donne le point K entre E & D.

SECTION V.

Pourquoi les Problémes ſolides ne peuvent être conſtruits ſans les Sections coniques ; ni ceux qui ſont plus compoſez ſans quelques autres lignes plus compoſees.

M. DESCARTES.

IL eſt vrai que je n'ai pas encore dit ſur quelles raiſons je me fonde, pour oſer ainſi aſſurer, ſi une choſe eſt poſſible, ou ne l'eſt pas. Mais ſi on prend garde comment par la Methode dont je me ſers, tout ce qui tombe ſous la conſideration des Geometres,

ſe reduit à un même genre de Problêmes, qui eſt de chercher la valeur des racines de quelque équation; on jugera bien, qu'il n'eſt pas mal-aiſé de faire un dénombrement de toutes les voyes par leſquelles on les peut trouver, qui ſoit ſuffiſant pour démontrer qu'on a choiſi la plus generale & la plus ſimple.

Et particulierement pour ce qui eſt des Problêmes ſolides, que j'ai dit ne pouvoir être conſtruits, ſans qu'on y employe quelque ligne plus compoſée que la circulaire, c'eſt choſe qu'on peut aſſez trouver, de ce qu'ils ſe reduiſent tous à deux conſtructions, en l'une deſquelles il faut avoir tout enſemble les deux points, qui déterminent deux moyennes proportionelles entre deux lignes données; & en l'autre les deux points, qui diviſent en trois parties égales un arc donné. Car d'autant que la courbure du cercle ne dépend que du ſimple rapport de toutes ſes parties au point qui en eſt le centre; on ne peut auſſi s'en ſervir qu'à déterminer un ſeul point entre deux extrêmes, comme à trouver une moyenne proportionelle entre deux lignes droites données, ou diviſer en deux un arc donné. Au lieu que la courbure des Sections coniques, dépendant toûjours de deux diverſes choſes, peut auſſi ſervir à déterminer deux points differens.

Mais pour cette même raiſon il eſt impoſſible, qu'aucuns des Problêmes qui ſont d'un degré plus compoſez que les ſolides, & qui preſuppoſent l'invention de quatre moyennes proportionelles, ou la diviſion de l'angle en cinq parties égales, puiſſent être conſtruits par aucune des Sections coniques.

1. Il eſt certain, que pour juger, ſi on a choiſi la meilleure maniere, il faut ſuivant la Regle quatriéme de la Methode de M. DESCARTES, faire un dénombrement ſi entier, & des revûës ſi generales, que l'on ſoit aſſuré de ne rien omettre; il faut les examiner ſeparément, & les comparer enſemble avant que de rien choiſir.

2. Les deux choſes dont dépend la courbure de l'ellipſe & de l'hyperbole, peuvent être les deux foyers. Dans la parabole on conſidere auſſi deux foyers, l'un au dedans de la parabole, l'autre au dehors à une diſtance infinie ſur l'axe au deſſus du ſommet.

3. M. DESCARTES veut, comme on le conclud de ce qu'il dit ici, & de ce qu'il dira Part. 5. Sect. 5. que pour conſtruire un Problême plan

l'on ſe ſerve du cercle & de la ligne droite ; pour conſtruire un Problême ſolide, c'eſt-à-dire de trois ou quatre dimenſions, l'on ſe ſerve du cercle & d'une des Sections coniques, c'eſt à dire avec une courbe du premier genre ; pour conſtruire un Problême de cinq ou ſix dimenſions, l'on ſe ſerve du cercle & d'une ligne du ſecond genre, qui eſt d'un degré plus compoſée que les Sections coniques ; pour conſtruire un Problême de ſept ou huit dimenſions, l'on ſe ſerve du cercle & d'une ligne du troiſiéme degré ; & ainſi de ſuite, de ſorte qu'à meſure que les Problêmes ſont plus élevez, il faut ſe ſervir d'une courbe d'un genre plus compoſé avec le cercle pour chaque deux dimenſions. C'eſt la Methode que M. DESCARTES a jugé la plus generale & la plus ſimple.

Cependant tous ne ſont pas de ſon ſentiment. *Je fais voir*, dit un ſçavant Geometre, *combien* M. DESCARTES *s'eſt trompé, lorſqu'il preſcrit les lignes les plus ſimples, qui ſont neceſſaires pour la conſtruction des équations, de quelles dimenſions qu'elles puiſſent être, faute d'avoir aſſez examiné ce qu'il a avancé ; car on ne peut ſe perſuader, qu'un homme auſſi éclairé qu'il l'étoit dans la Geometrie, ait fait une telle faute, que pour n'avoir pas aſſez conſideré les cas dont il parle. Et comme je faiſois voir à M. Hugens de Zulichem les raiſons que j'avois de reprendre ainſi M. Deſcartes, il m'a communiqué un Manuſcrit de M. de Fermat, d'une maniere de conſtruction des équations, dans lequel il le reprend auſſi ſur le même ſujet.* Voyez Liv. 3. Part. 1. Sect. 2. *M. de la Hire. La conſtruction des équations analytiques. Preface.*

4.* La raiſon que M. DES CARTES donne de la diſtribution des genres des lieux, n'a aucun fondement, comme l'a fort bien remarqué M. de Fermat dans la Diſſertation qu'il a faite de la ſolution des Problêmes de Geometrie, & où il le reprend non ſeulement ſur ce ſujet, mais auſſi ſur la conſtruction des équations, ou des Problêmes. * *Concluſion de ce Traité.*

PARTIE CINQUIE'ME.

SECTION I.

Façon generale pour conſtruire tous les Problêmes reduits à une équation, qui n'a point plus de ſix dimenſions.

M. DESCARTES.

C'Eſt pourquoi je croirai faire en ceci tout le mieux qui ſe puiſſe, ſi je donne une Regle generale pour les conſtruire, en y employant la ligne courbe qui ſe décrit par l'interſection d'une parabole & d'une ligne droite, en la façon * ci-deſſus expliquée. Car j'oſe aſſurer, qu'il n'y en a point de plus ſimple en la nature, qui puiſſe ſervir à ce même effet; & vous avez vû comme elle ſuit immediatement les Sections coniques en cette queſtion tant cherchée par les Anciens, dont la ſolution enſeigne par ordre toutes les lignes courbes, qui doivent être reçûës en Geometrie.

* *Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 2. n. 6. & Part. 3. Sect.*

Vous ſavez déja comment, lorſqu'on cherche les quantitez, qui ſont requiſes pour la conſtruction de ces Problêmes, on les peut toûjours reduire à quelque équation, qui ne monte que juſques au quarré de cube, ou au ſurſolide.

Si une équation, qui ne doit être que du cinquiéme ou du ſixiéme degré, avoit une de ſes inconnuës, ou toutes les deux élevées à un plus haut degré, on la pourroit déprimer par la diviſion faite avec un ou pluſieurs binomes compoſez d'une des inconnuës + ou — un des diviſeurs exacts du dernier terme; car ſi aucune diviſion ne pouvoit ſe faire ſans reſte, l'équation ne ſeroit pas de ſa nature du cinquiéme ou du ſixiéme degré. Voyez quelque choſe de ſemblable touchant les équations cubiques & quarré-quarrées, Sect. 3. 4. Part. 3.

Puis vous ſçavez auſſi comment, en augmentant la valeur des racines de cette équation, on peut toûjours faire qu'elles ſoient toutes

tes vrayes, & avec cela que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle du ſecond, Part. 2 Sect. 2. Art. 4.

Et enfin comment, ſi elle ne monte que juſques au ſurſolide, on la peut hauſſer juſques au quarré de cube, & faire que la place d'aucun de ſes termes ne manque d'être remplie, Part. 2. Sect. 2. Article 5.

Or afin que toutes les difficultez, dont il eſt queſtion, puiſſent être reſoluës par une même Regle, je deſire qu'on faſſe toutes ces choſes, & par ce moyen qu'on les reduiſe toûjours à une équation de telle forme, $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$, en laquelle la quantité nommée q ſoit plus grande que le quarré de la moitié de celle, qui eſt nommée p.

Lorſque l'équation, que donne la reſolution du Problême a cette forme, avec la condition que M. DESCARTES demande, il n'y a aucun changement à y faire. Mais lorſqu'elle eſt du ſixiéme degré, & qu'elle manque de quelque terme, ou que deux ſignes + ou — ſe ſuivent, ou que la quantité du troiſiéme terme n'eſt pas plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond; on lui donne ce dont elle manque. Que ſi l'équation étoit du cinquiéme degré, on l'éleveroit d'abord au ſixiéme, en la multipliant par ſon inconnuë, enſuite on lui donneroit les proprietez neceſſaires qui lui manqueroient.

Venons à preſent à la double deſcription de la courbe du ſecond genre, dont on a beſoin dans ces ſortes de Problêmes. Ces deux deſcriptions ſont aiſées à comprendre.

Puis ayant fait Fig. 268. la ligne BK indefiniment longue des deux côtez, & du point B ayant tiré la perpendiculaire AB, dont la longueur ſoit $\frac{1}{2}p$; il faut dans un plan ſeparé décrire une parabole, comme CDF, dont le côté droit principal ſoit $\sqrt{\frac{1}{vv} + q - \frac{1}{4}pp}$, que je nommerai n pour abreger. Fig. 268.

Après cela il faut poſer le plan dans lequel eſt cette parabole, ſur celui où ſont les lignes AB & BK, en ſorte que ſon aiſſieu DE ſe rencontre juſtement au deſſus de la ligne droite BK. Et ayant pris la partie de cet aiſſieu, qui eſt entre les points E & D, égale à $\frac{2vv}{pn}$, il faut appliquer ſur ce point E une longue Regle, en telle

ſorte qu'étant auſſi appliquée ſur le point *A* du plan de deſſous, elle demeure toûjours jointe à ces deux points, pendant qu'on hauſſera ou baiſſera la parabole tout le long de la ligne *BK*, ſur laquelle ſon aiſſieu eſt appliqué. Au moyen dequoi l'interſection de cette parabole & de cette Regle, qui ſe fera au point *C*, décrira la ligne courbe *ACN*, qui eſt celle dont nous avons beſoin de nous ſervir pour la conſtruction du Problême propoſé.

Car après qu'elle eſt ainſi décrite, ſi on prend le point *L* en la ligne *BK* du côté vers lequel eſt tourné le ſommet de la parabole, & qu'on faſſe *BL* égale à *DE*, c'eſt-à-dire $\frac{zv}{pn}$. Puis du point *L*, vers *B*, qu'on prenne en la même ligne *BK*, la ligne *LH* égale à $\frac{t}{znv}$; & que du point *H* ainſi trouvé, on tire à angles droits, du côté qu'eſt la courbe *ACN*, la ligne *HI*, dont la longueur ſoit $\frac{r}{2nn} + \frac{v}{nn} + \frac{pt}{4nnv}$, qui pour abreger ſera nommée $\frac{m}{nn}$. Et après, ayant joint les points *L* & *I*, qu'on décrive le cercle *LPI*, dont *IL* ſoit le diametre; & qu'on inſcrive en ce cercle la ligne *LP*, dont la longueur ſoit $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{pv}{nn}}$. Puis enfin du centre *I*, par le point *P* ainſi trouvé, qu'on décrive le cercle *PCN*. Ce cercle coupera ou touchera la ligne courbe *ACN*, en autant de points, qu'il y aura de racines dans l'équation. En ſorte que les perpendiculaires tirées de ces points ſur la ligne *BK*, comme *CG*, *NR*, *QO*, & ſemblables, ſeront les racines cherchées. Sans qu'il y ait aucune exception, ni aucun défaut en cette Regle.

Car ſi la quantité *s* étoit ſi grande à proportion des autres *p*, *q*, *r*, *t*, & *v*, que la ligne *LP* ſe trouvât plus grande que le diametre du cercle *IL*, en ſorte qu'elle ne pût y être inſcrite, il n'y auroit aucune racine en l'équation propoſée, qui ne fût imaginaire. Non plus que ſi le cercle * *IP* étoit ſi petit, qu'il ne coupât la courbe *ACN* en aucun point. Et il la peut couper en ſix differens points, ainſi qu'il peut y avoir ſix differentes racines en l'équation. Mais lorſqu'il la coupe en moins; cela témoigne qu'il y a quelques-unes de ces racines, qui ſont égales entr'elles, ou bien qui ne ſont qu'imaginaires.

* Le cercle PCN.

Chaque point de contact vaut deux points d'interſection, & a deux

racines égales ; autant qu'il manquera de points d'interſection des ſix, qui peuvent ſe trouver, en comptant un point d'attouchement pour deux d'interſection, autant il y aura de racines imaginaires.

Que ſi la façon de tracer la ligne ACN, Fig. 268. par le mouvement d'une parabole, vous ſemble incommode, il eſt aiſé de trouver pluſieurs autres moyens pour la décrire. Comme ſi Fig. 269. ayant les mêmes quantitez AB, BL, & la même pour BK, qu'on avoit poſé pour le côté droit principal de la parabole, on décrit le demi-cercle KST, dont le centre ſoit pris à diſcretion dans la ligne BK, en ſorte qu'il coupe quelque part la ligne AB, comme au point S, & que du point T, où il finit, on prenne vers K, la ligne TV égale à BL ; puis ayant tiré la ligne SV, qu'on en tire une autre ; qui lui ſoit parallele, par le point A, comme AC ; & qu'on en tire auſſi une autre par S, qui ſoit parallele à BK, comme SC ; le point C, où ces deux paralleles ſe rencontrent, ſera l'un de ceux de la ligne courbe cherchée. Et on en peut trouver en même ſorte, autant d'autres qu'on en deſire. FIG. 268.

Les points S, T, V, les droites SV, AC, SC ſervent à trouver le point C ; les points $S2$, $T2$, $V2$, les droites $S2$, $V2$; $AC2$; $S2$, $C2$ ſervent à trouver le point $C2$; &c. Ajoûtez les points E, $E2$, &c. qui répondent aux points C, $2C$, &c.

La démonſtration de tout ceci eſt aſſez facile. Car appliquant la Regle AE avec la parabole FD ſur le point C, comme il eſt certain qu'elles peuvent y être appliquées enſemble, puiſque ce point C eſt en la courbe ACN, qui eſt décrite par leur interſection ; ſi CG ſe nomme y, GD eſt $\frac{yy}{n}$, à cauſe que le côté droit, qui eſt $*$, eſt à CG, comme CG à GD ; & ôtant DE, qui eſt $\frac{2Vv}{pn}$, de GD, on a $\frac{yy}{n} - \frac{2Vv}{pn}$ pour GE. Puis à cauſe que AB eſt à BE, comme CG eſt à GE ; AB étant $\frac{1}{2}p$, BE eſt $\frac{py}{2n} - \frac{V.}{n}y$.

Et tout de même ſuppoſant que le point C de la courbe a été trouvé par l'interſection des lignes droites SC parallele à BK, & AC parallele à SV : SB qui eſt égale à CG eſt y ; & BK FIG. 269.

étant égale au côté droit de la parabole, que j'ai nommé n, BT eſt $\frac{yy}{n}$. Car comme KB eſt à BS, ainſi BS eſt à BT. Et TV étant la même que BL, c'eſt-à-dire $\frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}}$, BV eſt $\frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}}$. Et comme SB eſt à BV, ainſi AB eſt à BE, qui eſt par conſequent $\frac{py}{2n} - \frac{v\sqrt{v}}{n\sqrt{y}}$, comme devant, d'où on voit que c'eſt une même ligne courbe, qui ſe décrit en ces deux façons.

Fig. 268. 269. Par la ſuppoſition Fig. 268. AB eſt $\frac{1}{2}p$; le parametre de la parabole CDF eſt n; DE, $\frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}} = BL$; CG, y; par la nature de la parabole $n \times DG = \overline{CG}^2$, donc $DG = \frac{\overline{CG}^2}{n} = \frac{yy}{n}$; $GE = GD - DE$, $\frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}}$. Et dans les triangles ABE, CGE; l'on a cette analogie, $CG, y : GE, \frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}} :: AB, \frac{1}{2}p : BE, \frac{py}{2n} - \frac{v\sqrt{v}}{n\sqrt{y}}$.

Par le point $2C$, Fig. 269. menez $2Cg = y$, perpendiculaire à BK. Par la ſupp. BK eſt égale au parametre n de la parabole CDF, Fig. 268. $2SB = 2Cg$, y; $2T2V$ eſt $\frac{v2v}{p\sqrt{n}} = BL = DE$ de Fig. 268. De plus $2SB$ eſt moyenne proportionelle entre KB & $B2T$, & KB, $n : 2SB$, $y :: 2SB$, $y : B2T$, $\frac{yy}{n}$; & $B2v = B2T - 2T2V$, $\frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}}$. Maintenant dans les deux triangles $AB2E$, $2SB$, $B2V$, l'on a cette analogie, $2SB, y : B2V, \frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}} :: AB, \frac{1}{2}p : B2E, \frac{py}{2n} - \frac{v\sqrt{v}}{n\sqrt{y}}$.

De ce que la valeur de BE ou $B2E$ eſt la même dans les deux courbes ACN des Fig. 268. 269. M. DESCARTES conclud, que c'eſt la même courbe. Pour en voir la raiſon, il faut obſerver 1°. que la derniere analogie auroit pû ſe faire, Fig. 269. dans les deux triangles $AB2E$ $2Cg2E$, parceque les triangles $2SBB2V$, $2Cg2c$, ſont égaux & équiangles. Et l'analogie ſeroit, $2Cg, y : g2E, \frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}} :: AB, \frac{1}{2}p : B2E, \frac{py}{2n} - \frac{v\sqrt{v}}{n\sqrt{y}}$.

Il faut obſerver 2° que ſuppoſant par exemple CG, Fig. 268. & $2Cg$, Fig. 269. deux lignes entierement égales, & qui ſe nomment y; les valeurs $\frac{py}{2n} - \frac{v\sqrt{v}}{n\sqrt{y}}$ des droites BE, $B2E$, qui n'ont que y d'indeterminée ſeront auſſi entierement les mêmes, & les lignes BE, $B2E$ parfaitement égales; comme auſſi les lignes GE, $g2E$, dont les valeurs ſont $\frac{yy}{n} - \frac{2v\sqrt{v}}{p\sqrt{n}}$.

C'eſt pourquoi les triangles ABE, Fig. 268. $AB2E$, Fig. 269. ſont entierement égaux. Par la même raiſon les triangles CGE, Fig. 268. $2Cg2E$, Fig. 269. ſont entierement égaux. Donc les points C Fig. 268. $2C$, Fig. 269. ont la même poſition & le même rapport à l'égard des points A, B, & des lignes AB, BK. Ce qui ſe pouvant démontrer de tous les points des deux courbes ACN, Fig. 268. 269, il s'enſuit qu'elles ſont entierement égales, ou la même courbe.

Montrons encore que la valeur eſt la même de Be, BE dans les deux

Figures au deſſous de AB. Au point c, Fig. 268. nous avons $de = \frac{2\sqrt{v}}{pn}$; $CO = y$; & par la nature de la parabole, le parametre $n \times dO = cO^2$, $dO = \frac{yy}{n}$; $Oe = ed - Od$, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n}$. Et dans les triangles ABe, cOe équiangles, cO, y: Oe, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n}$:: AB, $\frac{1}{2}p$: Be, $\frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n}$.

Au point C, Fig. 269. nous avons BK, n; $SB = CG$, y; $TV = \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et par la nature du cercle la ligne SB eſt moyenne proportionelle entre TB, BK; ainſi BK, n: SB, y:: SB, y: BT, $\frac{yy}{n}$. Mais $BV = TV - BT$, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n}$; & dans les triangles SBV, ABE équiangles, SB, y: BV, $\frac{2\sqrt{v}}{pn} - \frac{yy}{n}$:: AB, $\frac{1}{2}p$: BE, $\frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n}$. Continuons la démonſtration.

Après cela pourceque BL & DE ſont égales, Fig. 268. DL & BE le ſont auſſi; de façon qu'ajoûtant LH, qui eſt $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$ à DL, qui eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, on a la toute DH, qui eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & en ôtant GD, qui eſt $\frac{yy}{n}$, on a GH, qui eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Ce que j'écris par ordre en cette ſorte $GH = \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy}{ny} + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}$. Et le quarré de GH eſt

$$\frac{y^6 - py^5 - \frac{ty^4}{\sqrt{v}} + 2\sqrt{v}y^3 - p\sqrt{v}yy - ty + v + \frac{1}{4}ppy^4 + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} + \frac{ttyy}{4v}.}{nnyy}$$

Et en quelqu'autre endroit de cette ligne courbe qu'on veüille imaginer le point C, comme vers N, ou vers Q; on trouvera toûjours que le quarré de la ligne droite, qui eſt entre le point H; & celui où tombe la perpendiculaire du point C ſur BH, peut être exprimé en ces termes, & avec les mêmes ſignes + & —.

La fraction $\frac{\frac{1}{2}pyy - \sqrt{v} + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - y^3}{ny}$ vient de ce qu'on multiplie & qu'on diviſe $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$, par ny, ainſi l'on a $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}p\,yy + \frac{ty}{2\sqrt{v}}}{ny} - \sqrt{v}$. Or une quantité qui eſt multipliée & diviſée par une même grandeur, ne change pas de valeur.

Le quarré de la ligne HO priſe entre le point H & le point O où tombe la perpendiculaire du point c ſur BH, s'exprime avec les mêmes termes & les mêmes ſignes. Ce point c répond au point Q, dont M. Deſcartes parle.

Par la ſupp. BL & de ſont égales ; ajoûtez leur la ligne Bd, les lignes dL & $Be = \frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n}$ ſont égales. Ainſi ôtant $LH = \frac{t}{2n\sqrt{v}}$ de Ld, il reſte $dH = \frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n} - \frac{t}{2n\sqrt{v}}$; & ajoûtant $dO = \frac{yy}{n}$, l'on fait $HO = \frac{\sqrt{v}}{ny} - \frac{py}{2n} - \frac{t}{2n\sqrt{v}} + \frac{yy}{n}$; qui étant multipliée par ny, donne $\frac{y^3 - \frac{1}{2}pyy - \frac{ty}{2\sqrt{v}} + \sqrt{v}}{ny}$, dont le quarré eſt

$$\frac{y^6 - py^5 \quad \begin{matrix} -ty^4 \\ \overline{\sqrt{v}} \end{matrix} \quad + 2\sqrt{v}y^3 - p\sqrt{v}yy \quad - ty + v}{nnyy} \quad \text{, comme} \quad \begin{matrix} + \frac{1}{4}ppy^4 + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} + \frac{ttyy}{4v} \end{matrix}$$

auparavant.

De plus IH étant $\frac{m}{nn}$, & LH étant $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL eſt $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$ à cauſe de l'angle droit IHL ; & LP étant $\sqrt{\frac{1}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, IP ou IC eſt à cauſe auſſi de l'angle droit IPL, $\sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}} - \frac{1}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}$. Puis ayant fait CM perpendiculaire ſur IH, IM eſt la difference qui eſt entre IH, & HM, ou CG, c'eſt-à-dire entre $\frac{m}{nn}$ & y, en ſorte que ſon quarré eſt toûjours $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, qui étant ôté du quarré de IC, il reſte $\frac{tt}{4nnv} - \frac{1}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, pour le quarré de CM, qui eſt égal au quarré de GH déja trouvé. Ou bien en faiſant que cette ſomme ſoit diviſée comme l'autre par $nnyy$, on a $\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - 1yy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy}$.

L'angle IHL dans le demi-cercle eſt droit ; donc $\overline{IL}^2 = \overline{IH}^2 + \overline{LH}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}$, & $IL = \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv}}$.

L'angle IPL auſſi dans le demi-cercle eſt droit ; donc $\overline{IP}^2 = \overline{IL}^2 - \overline{LP}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{1}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}$; & $IP = \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{1}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}} = IC$ rayon du même cercle.

IM eſt ou, comme Fig. 268. $IH - HM$, $\frac{m}{nn} - y$, lorſque le point M tombe entre I & H ; ou comme Fig. 270. $MH - IH$, $y - \frac{m}{nn}$, lorſque le point I ſe trouve entre M & H. Or $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$ eſt le quarré de ces deux valeurs.

Lorſqu'on multiplie & qu'on diviſe une grandeur par une quantité, comme on l'a déja dit, elle ne change pas de valeur. Si l'on multiplie donc & que l'on diviſe par la même grandeur $nnyy$ la quantité $\frac{tt}{4nnv} - \frac{1}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$; l'on fait $\frac{\frac{ttyy}{4v} - 1yy - p\sqrt{v}yy + 2my^3 - nny^4}{nnyy} = \overline{CM}^2$.

Puis remettant $\frac{ty^4}{\sqrt{v}} + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pour nny^4; & $\sqrt{y^3} + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pty}{2\sqrt{v}}y^3$ pour $2my^3$; & multipliant l'une & l'autre ſomme par $nnyy$, on a $y^6 - py^5 \begin{matrix} - \frac{ty^4}{\sqrt{v}} & + 2\sqrt{v}y^3 - p\sqrt{v}yy \\ + \frac{1}{4}ppy^4 & + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} + \frac{ttyy}{4v} \end{matrix} - ty + v$ égal à

$$\begin{matrix} - \frac{ty^4}{\sqrt{v}} & + \sqrt{y^3} & - p\sqrt{v}yy \\ - qy^4 & + 2\sqrt{v}y^3 & - syy \\ + \frac{1}{4}ppy^4 & + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} & + \frac{ttyy}{4v} \end{matrix}$$

C'eſt-à-dire qu'on a $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$. D'où il paroît, que les lignes CG, NR, QO & ſemblables ſont les racines de cette équation, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

Le côté droit de la parabole a été pris $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = n$, donc $nn = \frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp$; & $nny^4 = \frac{ty^4}{\sqrt{v}} + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$.

HI a été priſe $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}} = \frac{m}{nn}$. Multipliez tout par nn, il vient $\frac{1}{2}r + \sqrt{v} + \frac{pt}{4\sqrt{v}} = m$; & $2my^3 = ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}}$.

Mettez ces valeurs de nny^4, $2my^3$ à leur place dans $\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy}$; vous ferez $\frac{-\frac{ty^4}{\sqrt{v}} - qy^4 + \frac{1}{4}ppy^4 + ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{ttyy}{4v}}{nnyy} = \overline{CM}^2 =$

$$\frac{y^6 - py^5 \begin{matrix} - \frac{ty^4}{\sqrt{v}} & + 2\sqrt{v}y^3 - p\sqrt{v}yy \\ + \frac{1}{4}ppy^4 & + \frac{pty^3}{2\sqrt{v}} + \frac{ttyy}{4v} \end{matrix} - ty + v = o.}{nnyy}$$

Si vous multipliez les deux membres de cette équation par leur denominateur commun $nnyy$, il reſtera une égalité entre les numerateurs, & ſi l'on ôte ce qui s'efface, il viendra $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$.

C'eſt parceque le parametre de la parabole eſt $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, que M. DESCARTES demande que q ſoit plus grand que $\frac{1}{4}pp$, ou que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond. Car ſi $\frac{1}{4}pp$ étoit plus grand que

2, 3, 4, 6, & 9, vous trouverez que le cercle coupera la courbe en ſix points, deſquels tirant ſix perpendiculaires ſur la ligne DO, *ces ſix perpendiculaires ſeront 1, 2, 3, 4, 6, & 9.* Nous montrerons Sect. 2. Ex. 6. que le cercle *CPN* coupe la courbe *ACN* en ſix points differens.

SECTION II.

EXEMPLES.

M. DESCARTES.

AInſi donc ſi on veut trouver quatre moyennes proportionelles entre les lignes a & b, ayant poſé x pour la premiere, l'équation eſt $x^5 ** ** ** - a^4 b = 0$, ou bien $x^6 ** ** ** - a^4 b x ** = 0$. Et faiſant $y - a = x$, il vient $y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{matrix} -6a^5y + a^6 \\ -a^4by + a^5b \end{matrix} = 0$. C'eſt pourquoi il faut prendre $3a$ pour la ligne AB, & $\sqrt{6a^3 + aab + 6a\sqrt{aa+ab}}$ pour BK, où le côté droit de la parabole que j'ai nommé n, & $\frac{a}{3n}\sqrt{aa+bb}$ pour DE ou BL. Et après avoir décrit la ligne courbe ACN ſur la meſure de ces trois, il faut faire $LH = \frac{6a^3 + aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & $HI = \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4 3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & $LP = \frac{\sqrt{15a^4 + 6a^3\sqrt{aa+ab}}}{nn}$. Car le cercle, qui ayant ſon centre au point I paſſera par le point P ainſi trouvé coupera la courbe aux deux points C & N; deſquels ayant tiré les perpendiculaires NR & CG; ſi la moindre NR eſt ôtée de la plus grande CG, le reſte ſera x, la premiere des quatre moyennes proportionelles cherchées.

Il eſt aiſé en même façon de diviſer un angle en cinq parties égales, & d'inſcrire une Figure d'onze ou treize côtez égaux dans un cercle, & de trouver une infinité d'autres Exemples de cette Regle.

Toutesfois il eſt à remarquer, qu'en pluſieurs de ces Exemples, il peut arriver, que le cercle coupe ſi obliquement la parabole du ſecond genre, que le point de leur interſection ſoit difficile à reconnoître : & ainſi que cette conſtruction ne ſoit pas commode pour la pratique. A quoi il ſeroit aiſé de remedier en compoſant d'autres Regles à l'imitation de celle-ci, comme on en peut compoſer de mille ſortes.

EXEMPLE I. *Trouver quatre moyennes proportionelles entre deux lignes données.*

SOient Fig. 270. deux lignes données a, & b, entre leſquelles il faut trouver quatre moyennes proportionelles. Je nomme x la premiere des quatre quantitez cherchées, ce qui donne cette progreſſion Geometrique $a : x :: x : \frac{xx}{a} :: \frac{xx}{a} : \frac{x^3}{aa} :: \frac{x^3}{aa} : \frac{x^4}{a^3} :: \frac{x^4}{a^3} : \frac{x^5}{a^4}$.

Fig. 270. Après cela par la ſupp. la ſixiéme proportionelle $\frac{x^5}{a^4}$ eſt égale à b, donc $\frac{x^5}{a^4} = b$, $x^5 = a^4 b$, $x^5 - a^4 b = 0$. Multipliez par x, pour avoir $x^6 **** - a^4 b x^* = 0$.

Enſuite pour faire que tous les termes ſoient remplis, & que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond, vous prenez $y - a = x$; vous ſubſtituez la ſixiéme & la premiere puiſſance de $y - a$ pour x^6, & x ; il vient $y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5y + a^6 \\ -a^4by + a^5b \end{matrix}\right\} = 0$. Ou pour s'exprimer ſuivant la formule de M. DESCARTES $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$. Soit $a = 1$. $b = 3$.

Pour la conſtruction ſoit $AB = \frac{1}{2}p = 3a$ perpendiculaire ſur l'infinie DH, ſur laquelle vous prenez BK égale au parametre de la parabole generatrice CDF, ce parametre eſt $\sqrt{\frac{r}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{6a^3 + aab + 6aa\sqrt{aa+ab}}{\sqrt{aa+ab}}} = n$, parceque $\frac{r}{\sqrt{v}} = \frac{6a^5 + a^4b}{\sqrt{a^6 + a^5b}}$, & diviſant tout par aa, c'eſt-à-dire le numerateur de la fraction par aa, & le denominateur par a^4, le quotient eſt $\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa+ab}}$; & $q = 15aa$; $pp = 36aa$; $\frac{1}{4}pp = 9aa$; $q - \frac{1}{4}pp = 6aa$. Vous coupez $BL = DE = \frac{2\sqrt{v}}{pn} = \frac{2}{6an}\sqrt{a^6 + a^5b}$, & extrayant la racine aa de a^4 qui eſt dans chaque terme ſous le ſigne radi-

cal, & mettant cette racine devant le ſigne radical, c'eſt $\frac{2aa}{6an}\sqrt{aa+ab} = \frac{a}{3n}\sqrt{aa+ab}$. Enſuite vous décrivez la parabole CDF & la courbe ACN avec cette parabole, ou de l'autre façon.

Après cela vous coupez $LH = \frac{1}{2n\sqrt{v}} = \frac{6a^5+a^4b}{2n\sqrt{a^6+a^5b}} = \frac{6a^5+a^4b}{2aa\sqrt{aa+ab}}$ $= \frac{6a^3+aab}{2\sqrt{aa+ab}}$; vous coupez auſſi $IH = \frac{m}{nn} = \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pr}{4nn\sqrt{v}} = \frac{20a^5}{2nn} + \frac{\sqrt{a^6+a^5b}}{nn} + \frac{36a^6+6a^5b}{4nn\sqrt{a^6+a^5b}} = \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} = \frac{18a^4+3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, en diviſant le dernier terme par $2aa$.

Maintenant vous joindrez IL, & ſur ce diametre vous décrirez le cercle IPL, dans lequel vous inſcrirez $LP = \sqrt{s+p\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{15a^4+6a^3}}{nn}$ $\sqrt{aa+ab}$; & du centre I, de l'intervale IP, vous décrirez le cercle CPN, qui coupe la courbe ACN aux deux points C, N; deſquels l'on tirera ſur BK les perpendiculaires CG, NR, qui ſont les deux racines de l'équation reduite.

La démonſtration ſe fait comme pour Fig. 268. car au point C Fig. 270. après avoir joint $IC = IP$, & abaiſſé CM perpendiculaire à HI prolongée, & nommé CG, y; l'abſciſſe GD eſt $\frac{yy}{n}$ par la nature de la parabole; $GE = GD - DE$, $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Et dans les triangles équiangles ABE, CGE vous ferez, $CG, y = MH : GE, \frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn} :: AB, \frac{1}{2}p : BE, \frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{n}}{ny}$.

Vous avez encore $BL = DE$ ſupp. donc ajoûtant la commune EL, vous ferez $BE = DL$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{n}}{ny}$; & $DH = DL + LH$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{n}}{ny} + \frac{1}{2n\sqrt{n}}$; & enfin $GH = DH - GD$, $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} - \frac{yy}{n}$. Multipliez & diviſez par ny, il vient $\frac{-y^3+\frac{1}{2}pyy+\frac{1}{2}y\sqrt{n}-\sqrt{v}}{ny}$, dont le quarré $\overline{GH}^2$ ſera $\frac{y^6 - py^5 - \frac{1}{4}y^4 + 2\sqrt{v}y^3 - p\sqrt{v}yy - ty + v. + \frac{1}{4}ppy^4 + \frac{pry^3}{2\sqrt{n}} + \frac{ryy}{4n}}{nnyy}$.

De plus dans le triangle rectangle IHL, $\overline{IL}^2 = \overline{IH}^2 + \overline{HL}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{rr}{4nnv}$, & dans le triangle rectangle IPL, $\overline{IP}^2 = \overline{IL}^2 - \overline{LP}^2$, $\frac{mm}{n^4} + \frac{rr}{4nnn} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{n}}{nn}$.

Puis $MI = MH - IH$, $y - \frac{m}{nn}$, car $MH = CG$. Et dans le triangle rectangle IMC, $\overline{CM}^2 = \overline{IC}^2 - \overline{IM}^2$, $\frac{rr}{4nnn} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{n}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, qui étant multiplié & diviſé par $nnyy$ donne $\frac{-nny^4+2my^3-p\sqrt{v}yy-syy+\frac{1}{4}ryy}{nnyy}$; où remettant $\frac{ry^4}{\sqrt{v}} + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pour nny^4, &

$\sqrt{y^3} + 2\sqrt{vy^3} + \frac{pty^3}{2\sqrt{u}}$ pour $2my^3$, il vient

$$\begin{array}{llll} & -\frac{ty^4}{\sqrt{u}} & +\sqrt{y^3} & -p\sqrt{vyy} \\ -qy^4 & +2\sqrt{vy^3} & -syy & \\ +\frac{1}{4}ppy^4 & +\frac{pty^3}{2\sqrt{u}} & +\frac{ttyy}{4u} & \\ \hline & nnyy & & \end{array}$$

$= \overline{CM}^2$, comme GH & CM ſont égales, ſi l'on compare les valeurs de $\overline{GH}^2$, $\overline{CM}^2$, qu'on les multiplie par $nnyy$, & qu'on ôte ce qui s'efface, il reſtera $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = o$, ou $y^6 - 6ay^5$

$$+ 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{array}{l} -6a^5y + a^6 \\ \\ -a^4by + a^5b \end{array} = o.$$

Conſiderons à preſent les racines de cette derniere équation, qui ſont deux NR, CG, Fig. 270. Mais ſi l'on diviſe par $y - a = o$ l'équation

$$y^6 - 6a^5y + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \begin{array}{l} -6a^5y + a^6 \\ \\ -a^4by + a^5b \end{array} = o, \text{ la}$$

diviſion ſe fait juſte, & le quotient eſt $y^5 - 5ay^4 + 10aay^3 - 10a^3yy$

$$+ 5a^4y \begin{array}{l} -a^5 \\ \\ -a^4b \end{array} = o.$$ Nous avons donc une racine $y = a$, qui ne peut pas être $x = y - a$, celle-ci ſera donc la ſeconde racine plus grande que la premiere. De là il ſuit, que la moindre racine NR eſt $y = a$, la plus grande $CG = y$. Voilà pourquoi M. DESCARTES dit que ſi l'on ôte la moindre $NR = a$ de la plus grande CG, y, l'on aura $y - a = x$ racine cherchée, & la premiere des quatre moyennes proportionelles. Cette premiere ligne étant trouvée l'on trouvera aiſément les autres trois, en prenant a pour l'unité. Voyez Liv. 1. Part. 1. Sect. 3. Art. 2.

Ex. II. *Trouver cinq moyennes proportionelles entre deux lignes données.*

SOient $a = 1$. $b = 3$, deux lignes données, entre leſquelles il faut trouver cinq moyennes proportionelles : je nomme x la premiere de ces cinq, & je fais cette progreſſion Geometrique $a : x :: x : \frac{xx}{a} :: \frac{xx}{a} : \frac{x^3}{aa} ::$ $\frac{x^3}{aa} : \frac{x^4}{a^3} :: \frac{x^4}{a^3} : \frac{x^5}{a^4} :: \frac{x^5}{a^4} : \frac{x^6}{a^5}$. Et cette ſixiéme étant par la ſuppoſition égale à b, l'équation eſt $\frac{x^6}{a^5} = b$; $x^6 = a^5b$. J'en extrais la racine quarrée,

j'ai $x^3 = \sqrt{a^5 b}$, j'extrais la racine cubique, il vient $x = \sqrt{QC.\ a^5 b}$.

Soit Figure 7. $FG = a = 1$, $GH = b$, ſuivant Liv. 1. Part. 1. Sect. 2. Art. 1. n. 3. GI eſt $\sqrt{ab}$, ou $\sqrt{a^5 b}$, puiſque a eſt l'unité. Je nomme $\sqrt{a^5 b}$, q; & j'ai $x^3 = q$. Fig. 7.

Maintenant ſuivant Liv. 3. Part. 4. Sect. 1. Art. 1. Exemp. 1. Je coupe Fig. 234. $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$; $CE = \frac{1}{2}q$; du point E comme centre, du rayon EA, je décris le cercle AGF; la ligne FL eſt $x = \sqrt{C.\ q} = \sqrt{QC.\ a^5 b}$. Fig. 234.

La premiere des cinq moyennes proportionelles étant trouvée, l'on trouvera les quatre autres en prenant a pour l'unité.

Ex. III. *Diviſer un angle donné en cinq parties égales.*

L'Angle donné eſt NOX, Fig. 271. ſuppoſons la choſe faite, & que l'arc NX eſt diviſé en cinq parties égales aux points Q, T, P, M. Joignons NQ, QT, TP, PM, MX, NT; tirons NP, & prolongeons-la, juſqu'à ce que $TY = TN$ la coupe; tirons NM, qu'il faudra prolonger, juſqu'à ce que $PZ = NP$ la coupe; tirons encore NX, que l'on prolongera auſſi juſqu'à ce que $ML = MN$ la coupe. Fig. 271.

Par les choſes, que nous venons de faire, il ſuit que les quatre triangles NQT, NTY, NPZ, NML ſont iſoſceles & équiangles.

De plus en operant comme nous avons fait pour l'eptagone, Sect. 4. Art. 1. Ex. 1. Les triangles XML, NMP ſont égaux; & $NP = XL$. On démontrera de même que les triangles NTP, MPZ, ſont égaux & $MZ = TN$. Enfin on appliquera aux triangles NQT, TPY ce qu'on a dit des deux derniers de l'eptagone, & $PY = QN$.

Nommons à preſent le rayon NO, 1; la corde NQ, $z = QT = TP = PY$, &c. NT, $x = MZ$, NP, $v = XL$, mais $v = 3z - z^3$. Part. 4. Sect. 2. Art. 3. parcequ'elle eſt la corde de l'arc NP diviſé en trois parties égales, dont NQ, z en eſt une; NY ſera $NP + PY$, $v + z$; NM, s; NZ ſera $NM + MZ$, $s + x$; NX, $b = \frac{3}{2}$, car elle eſt donnée, puiſqu'elle eſt la corde de l'arc donné NX; NL ſera $NX + XL$, $b + v$.

Dans les quatre triangles ſemblables l'on a ces analogies. 1°. QN, z: NT, x dans le triangle NQT:: NT, x: NY, $v + z$ dans le triangle NTY: xx vz $+zz$. 2°. NT, x: NY, $v + z$ dans le triangle NTY:: NP, v: NZ, $s + x$ dans le triangle NPZ; & $sx + xx = vv + vz$, $s = \frac{vv + vz - xx}{x}$. 3°. QN, z: NY, x dans le triangle NQT:: NM, s: NL, $b + v$ dans le triangle NML; & $s = \frac{bz + xz}{x} = \frac{vv + vz - xx}{x}$; $bz = vv - xx$. Ou mettant pour xx ſa valeur $vz + zz$, il vient $bz = vv - vz - zz$; ſubſtituons encore pour v & vv

leur valeur tirée de $v = 3z - z^3$; ce ſera $bz = 5zz - 5z^4 + z^6$; $z^3* - 5z^3* + 5z - b = 0$. Ou en multipliant tout par z, $z^6* - 5z^4* + 5zz - bz* = 0$.

Pour remplir tous les termes, rendre toutes les racines vrayes, & faire que la quantité connuë du troiſiéme terme ſoit plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond, il faut prendre $y - 2 = z$. La ſubſtitution donnera $y^6 - 12y^5 + 55y^4 - 120y^3 + 125yy - 52y + 4 - by + 2b = 0$. ou $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$.

Fig. 272. Soit Fig. 272. l'infinie BK, ſur laquelle vous élevez la perpendiculaire $AB = \frac{1}{2}p = 6$. Le parametre de la parabole CDF eſt $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{107}{2\sqrt{7}} + 19} = n = BK$; coupez $BL = DE = \frac{2\sqrt{v}}{pn} = \frac{2\sqrt{7}}{12n}$; $LH = \frac{t}{2nn\sqrt{v}} = \frac{107}{4n\sqrt{7}}$. Décrivez la courbe ACN, au point H élevez la perpendiculaire $HI = \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}} = \frac{335 + 120\sqrt{7}}{107 + 38\sqrt{7}}$. Joignez IL, ſur laquelle comme diametre vous décrirez le demi-cercle IPL; dans lequel vous inſcrirez $LP = \sqrt{\frac{1 + p\sqrt{v}}{nn}} = \frac{168 + 250\sqrt{7}}{107 + 38\sqrt{7}}$. Du point I comme centre, de l'intervale IP, décrivez le cercle PNC, qui coupe la courbe ACN aux points C, N; deſquels vous menerez CG, NR perpendiculaires ſur BK; ce ſont les deux valeurs de y.

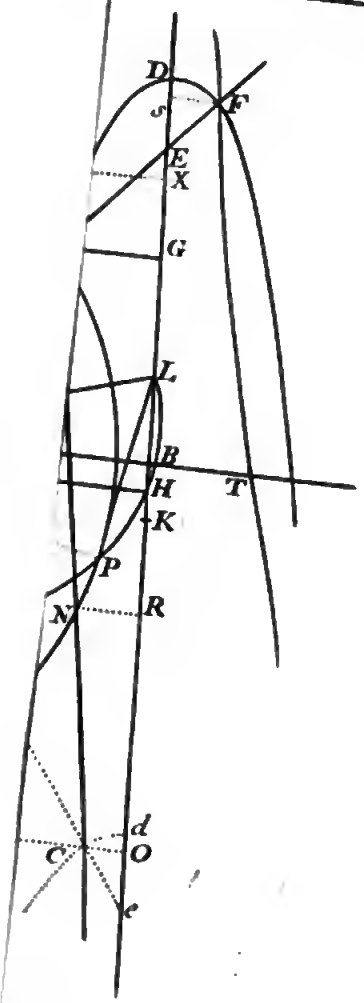
Mais ſi vous diviſez $y^6 - 12y^5 + 55y^4 - 120y^3 + 125yy - 52y + 4 - by + 2b$ $= 0$ par $y - 2 = 0$, la diviſion eſt juſte, & le quotient eſt $y^5 - 10y^4 + 35y^3 - 50yy + 25y - 2 - b = 0$. Vous avez donc une racine $y = 2$, qui ne ſauroit être la racine cherchée $z = y - 2$. Ainſi la moindre racine NR eſt $y = 2$, & la plus grande CG eſt $z = y - 2$. C'eſt pourquoi ſi l'on retranche NR de CG, le reſte ſera $CG - NR$, $y - 2 = z$.

La démonſtration ſe fera comme Ex. 1. Fig. 270.

EXEMPLE IV. *Inſcrire une Figure de onze côtez dans un cercle donné.*

Fig. 273. SOit donné Figure 273. le cercle ADH, dans lequel il faut inſcrire une Figure de onze côtez égaux. D'un des angles A je tire le diametre AKF. De l'extrêmité F je tire les cordes FH, FE, FD, FC, FB.

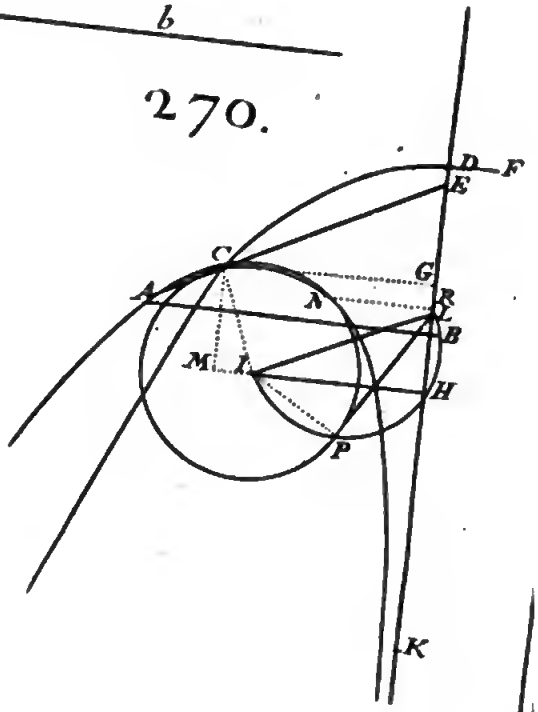
Je prolonge FC en P, juſqu'à ce qu'elle rencontre $BP = BF$; FD en N, juſqu'à ce qu'elle rencontre $CN = CF$; FE en M, juſqu'à ce



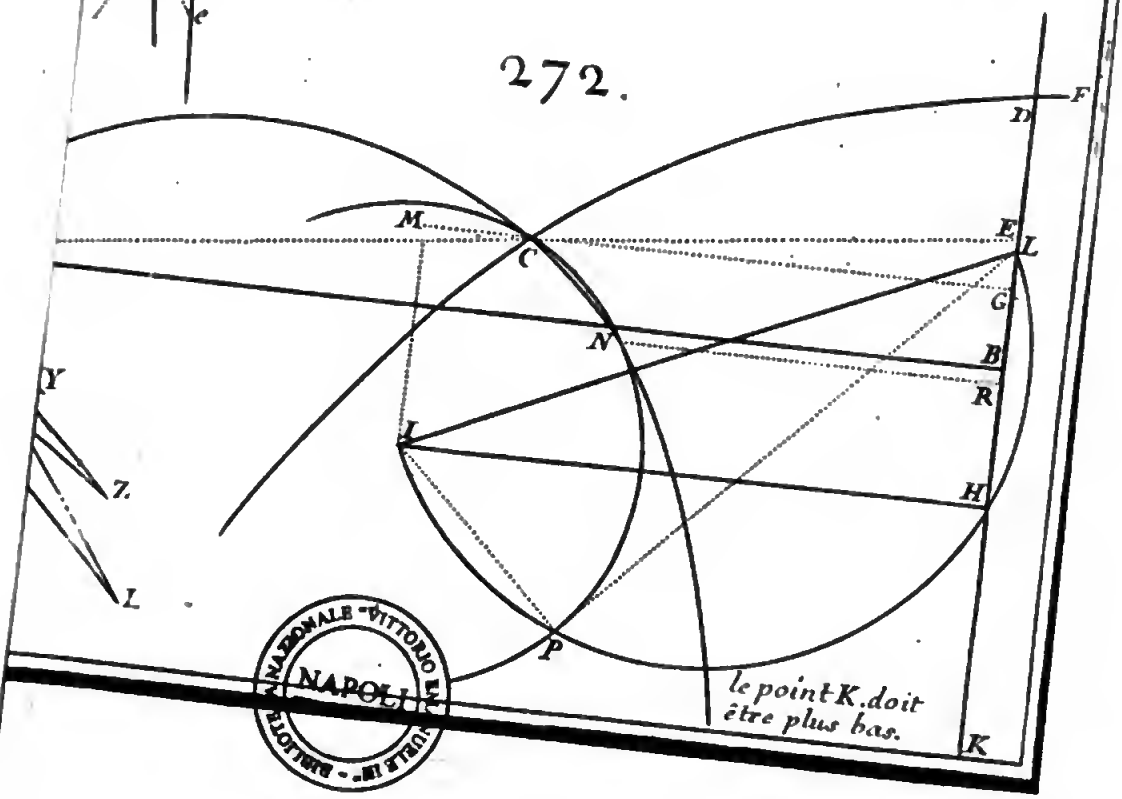
a

b

270.



272.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EM. NAPOLI

qu'elle rencontre $DM = DF$; FH en L, juſqu'à ce qu'elle rencontre $EL = EF$; GF en I, juſqu'à ce qu'elle rencontre $HI = HF$.

Les triangles FBP, FCN, FDM, FEL, ſont iſoſceles & équiangles, de même que les triangles FEL, FHI & tous les angles des triangles FBP, FCN, FDM, FEL, FHI, qui ſont ſur leurs baſes ſont égaux entr'eux.

De plus les triangles ABF, BCP ſont égaux & les triangles $BCF = CDN$, $CDF = DEM$, $DFE = EHL$ & les droites $BF = DN$, $CF = EM$, $DF = HL$; les angles EHF, GHI ſont auſſi égaux & $EF = GI$.

Nommons maintenant les connuës AF, $2a = CP$; KF, a; les inconnuës BF, $x = DN$; CF, $y = EM$; DF, $z = HL$; EF, $v = GI$; FH, $s = HI = FG$.

Les triangles ſemblables BKF, PBF, donnent cette analogie, KF, a: FB, x dans le triangle BKF:: BF, x: FP, $\frac{xx}{a}$ dans le triangle PBF. Et CF, $y = FP - CP$, $\frac{xx}{a} - 2a = EM$.

Les triangles ſemblables PBF, NCF donnent cette analogie, BF, x: FP, $\frac{xx}{a}$:: CF, y: FN, $\frac{xy}{a}$; & pour y mettant ſa valeur il vient $\frac{x^3}{aa} - 2x$; donc FD, $z = FN - ND$, $\frac{x^3}{aa} - 3x = FL$.

Les triangles ſemblables NCF, MDF donnent celle ci, CF, y: FN $\frac{xy}{a}$:: DF, z: FM, $\frac{xz}{a}$; & pour z mettant ſa valeur; l'on fait FM, $\frac{x^4}{a^3} - \frac{3xx}{a}$; & FE, $v = FM - EM$, $\frac{x^4}{a^3} - \frac{4xx}{a} + 2a = GI$.

Dans les triangles ſemblables MDF, LEF l'on trouve, DF, z: FM, $\frac{xz}{a}$:: EF, v: FL, $\frac{vx}{a}$; & pour v mettant ſa valeur, c'eſt FL, $\frac{x^5}{a^4} - \frac{4x^3}{aa} + 2x$; & FH, $s = FL - HL$, $\frac{x^5}{a^4} - \frac{5x^3}{aa} + 5x$.

Enfin dans les triangles ſemblables LEF, IHF l'on a, EF, v: FL, $\frac{vx}{a}$:: FH, s: FI, $\frac{sx}{a}$; & pour s mettant ſa valeur, l'on fait $FI = \frac{x^6}{a^5} - \frac{5x^4}{a^3} + \frac{5xx}{a}$; & GF, $s = GI - FI$, $\frac{6x^4}{a^3} - \frac{9xx}{a} + 2a - \frac{x^6}{a^5}$.

L'on a donc deux valeurs de s, FH, $\frac{x^5}{a^4} - \frac{5x^3}{aa} + 5x = FG$, $\frac{6x^4}{a^3} - \frac{9xx}{a} + 2a - \frac{x^6}{a^5}$, qui ſe reduit à $x^6 + ax^5 - 6aaax^4 - 5a^3x^3 + 9a^4xx + 5a^5x - 2a^6 = 0$; cette équation ſe diviſe exactement par $x + 2a = 0$, ce diviſeur ne peut être la racine cherchée, parceque $-x = 2a$ eſt égale au diametre AF. La racine cherchée eſt donc dans le quotient $x^5 - ax^4 - 4aax^3 + 3a^3xx + 3a^4x - a^5 = 0$.

Je multiplie cette équation par x, pour avoir $x^6 - ax^5 - 4aax^4 + 3a^3x^3 + 3a^4xx - a^5x * = 0$. Et pour avoir tous les termes remplis, toutes les racines vrayes, la quantité connuë du troiſiéme terme plus grande que le quarré de la moitié de la quantité connuë du ſecond; je fais $n - 2a = x$. La transformée eſt $n^6 - 13an^5 + 66aan^4 - 165a^3n^3 + 209a^4nn - 121a^5n + 22a^6$, ou $n^6 - pn^5 + qn^4 - rn^3 + snn - tn + v = 0$. L'on prend a pour l'unité.

FIG. 274. Soit l'infinie BK, Fig. 274. ſur laquelle vous tirez la perpendiculaire $AB = \frac{1}{2}p = 6\frac{1}{2}$. Le parametre de la parabole NDF eſt $\sqrt{\frac{r}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp} = \sqrt{\frac{121}{\sqrt{22}} + 23\frac{3}{4}} = BK = n$. Coupez $BL = DE = \frac{2\sqrt{v}}{pn} = \frac{2\sqrt{22}}{13n}$; $LH = \frac{r}{2\sqrt{v}} = \frac{121}{2n\sqrt{22}}$. Décrivez la courbe ACN. Au point H élevez la perpendiculaire $HI = \frac{r}{2na} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pr}{4nn\sqrt{v}} = \frac{165}{2nn} + \frac{\sqrt{22}}{nn} + \frac{1573}{4nn\sqrt{22}}$. Joignez IL, ſur laquelle vous décrirez le demi-cercle IPL, dans lequel vous inſcrirez $LP = \sqrt{\frac{r + p\sqrt{v}}{nn}} = \sqrt{\frac{209 + 13\sqrt{22}}{nn}}$. Du point I comme centre, de l'intervale IP, décrivez le cercle PNC, qui coupera la courbe ACN aux points C, N; deſquels vous menerez CG, NR perpendiculaires ſur BK; ce ſont les deux valeurs de y.

Mais ſi vous diviſez $n^6 - 13an^5 + 66aann^4 - 165a^3n^3 + 209a^4nn - 121a^5n + 22a^6 = 0$ par $n - 2a = 0$, la diviſion eſt juſte & le quotient eſt $n^5 - 11an^4 + 44aan^3 - 77a^3nn + 55a^4n - 11a^5 = 0$. La racine $n = 2a$ ne peut pas être la racine cherchée $x = n - 2a$, parceque $2a$ eſt égale au diametre AF. C'eſt pourquoi ſi vous ôtez $NR = 2a$ la moindre des racines de CG la plus grande, il reſtera $CG - NR$, $n - 2a = x$ la racine cherchée. Vous inſcrirez donc $FB = x$ dans le cercle ADH, Fig. 273. & la corde AB ſera un côté de l'endecagone regulier.

La démonſtration ſe fait comme Exemple I.

EXEMPLE V. *Inſcrire une Figure reguliere de treize côtez dans un cercle donné.*

FIG. 275. SOit donné Fig. 275. le cercle AFH, dans lequel il faut inſcrire une Figure reguliere de treize côtez. Nous ſuppoſons la choſe faite, nous avons comme Ex. IV. les triangles ſemblables HKB, HBP, HCN, HDM, HEL, HFI, HGT; & les triangles égaux ABH, BPC avec les lignes AH, PC; les triangles BCH, CND avec les lignes BH, DN; les triangles CDH, DME avec les lignes CH, EM; les triangles DEH, EFL avec les lignes DH, FL; les triangles EFH, FIG avec les lignes EH, GI; les triangles FGH, GTS avec les lignes FH, ST.

Nous nommons les données AH, $2a = CP$; KH, a; BH, $x = DN$; CH, $y = EM$; DH, $z = FL$; EH, $v = GI$; FH, $s = ST$; GH, $r = GT = HS$.

En operant comme Ex. IV. nous viendrons juſqu'à FH, $s = \frac{x^5}{a^4} - \frac{5x^3}{aa} + 5x = ST$. Enſuite dans les triangles ſemblables LEH, IFH, nous avons cette analogie, EH, v: HL, $\frac{vx}{a}$:: FH, s: HI, $\frac{sx}{a}$, & mettant pour s ſa valeur, il vient $HI = \frac{x^6}{a^5} - \frac{5x^4}{a^3} + \frac{5xx}{a}$; & GH, $r = HI - IG$, $\frac{x^6}{a^5} - \frac{6x^4}{a^3} + \frac{9xx}{a} - 2a$.

Dans

Dans les triangles ſemblables IFH, TGH, nous ferons, $FH, s : HI, \frac{sx}{a} :: GH, r : HT, \frac{rx}{a}$; mettons pour r ſa valeur, nous trouverons $HT = \frac{x^7}{a^6} - \frac{6x^5}{a^4} + \frac{9x^3}{aa} - 2x$; & $SH = ST - TH$, $\frac{7x^5}{a^4} - \frac{14x^3}{3y} + 7x - \frac{x^7}{a^6}$.

Nous avons deux valeurs de r, à ſavoir GH, $\frac{x^6}{a^5} - \frac{6x^4}{a^3} + \frac{9xx}{a} - 2a = SH$, $\frac{7x^5}{a^4} - \frac{14x^3}{aa} + 7x - \frac{x^7}{a^6}$, ce qui ſe reduit à $x^7 + ax^6 - 7aax^5 - 6a^3x^4 + 14a^4x^3 + 9a^5xx - 7a^6x - 2a^7 = 0$; cette équation ſe diviſe exactement par $x + 2a = 0$; qui ne peut être la valeur cherchée de x, ainſi qu'on l'a dit Ex. 3. elle ſera donc dans le quotient $x^6 - ax^5 - 5aax^4 + 4a^3x^3 + 6a^4xx - 3a^5x - a^6 = 0$, dont toutes les racines ne ſont pas vrayes. C'eſt pourquoi afin que l'équation ait les conditions que M. DESCARTES demande, nous prendrons $y - 2a = x$, & la transformée ſera $y^6 - 13ay^5 + 65aay^4 - 156a^3y^3 + 182a^4yy - 91a^5y + 13a^6 = 0$, ou $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v = 0$.

Soit Fig. 276. l'infinie BK, ſur laquelle nous éleverons la perpendiculaire $AB = \frac{1}{2}p = \frac{13}{2}$; le parametre de la parabole NDF eſt $\sqrt{\frac{91}{\sqrt{5}} + 23\frac{1}{4}}$, $= BK = n$; coupons $BL = DE = \frac{2\sqrt{5}}{13n}$; nous pouvons décrire la courbe ACN; coupons encore $LH = \frac{91}{2n\sqrt{5}}$; au point H élevons la perpendiculaire $HI = \frac{156}{2nn} + \frac{\sqrt{5}}{nn} + \frac{1183}{4nn\sqrt{5}}$. Joignons IL, ſur laquelle nous décrirons le demi-cercle IPL, dans lequel nous inſcrirons $LP = \sqrt{\frac{182 + 13\sqrt{5}}{nn}}$. Du point I comme centre, du rayon IP nous décrirons le cercle PCN, qui coupe la courbe ACN au point C. L'appliquée CG, eſt n, de laquelle ſi nous retranchons $2a$, nous aurons $n - 2a = x$, la racine cherchée. Fig. 276.

Il faut donc inſcrire $HB = x$ dans le cercle ADH, Fig. 275. & la corde AB ſera le côté d'une figure reguliere de treize côtez.

La parabole n'eſt point tracée dans la Figure, ni la ligne LP.

Le point K y manque auſſi; le Lecteur peut aiſément y ſuppléer.

La démonſtration ſe fait, comme Ex. I.

Ex. VI. $x^6 - 25x^5 + 239x^4 - 1115x^3 + 2664xx - 3060x + 1296 = 0$.

$x^6 - px^5 + qx^4 - rx^3 + sxx - tx + v = 0$.

CEtte équation, qui, comme on l'a dit Sect. 1. à la fin, a été propoſée par M. DESCARTES, pour faire voir, que ſi on la conſtruiſoit, un cercle couperoit une courbe en ſix points differens; peut être diviſée juſte par $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x - 9 = 0$; ainſi elle peut ſe reduire à un Problême à la ligne droite. Mais en la ſuppoſant un Problême de ſix dimenſions, elle peut ſe conſtruire de cette ſorte.

Fig. 277. Sur l'infinie BK, Fig. 277. je prends BK égale au parametre de la parabole $CDF = n = \sqrt{\frac{671}{4}}$; au point B j'éleve la perpendiculaire $AB = \frac{25}{2}$; je coupe encore $BL = DE = \frac{72}{25n}$; & je décris la courbe ACY. Je coupe enſuite $LH = \frac{81}{2n}$; & au point H j'éleve la perpendiculaire $HI = \frac{4499}{4nn}$; je joins LI, ſur laquelle je décris le demi cercle IPL, dans lequel j'inſcris la droite $LP = \sqrt{\frac{2564}{nn}}$; & du point I comme centre, de l'intervale IP, je décris le cercle NCY, qui coupe la courbe ACY aux ſix points N, C, Q, S, X, Y ; les perpendiculaires tirées de ces points ſur BK ſont les ſix racines de l'équation, $YZ = 1$, $XV = 2$, $ST = 3$, $QO = 4$, $CG = 6$, $NR = 9$.

La démonſtration peut ſe faire à chaque point, en tirant les lignes neceſſaires & en plaçant la parabole CDF, comme on a fait pour le point C.

* Tom. 3. Lett. 59. M. DESCARTES remarque * qu'aux Exemples, où les ſix racines vrayes ſont réelles, le cercle coupe ſi obliquement la ligne courbe, qu'on ne peut pas bien diſtinguer les points d'interſection.

SECTION III.

Autre Methode pour conſtruire les Equations de cinq ou ſix dimenſions.

REGLE I.

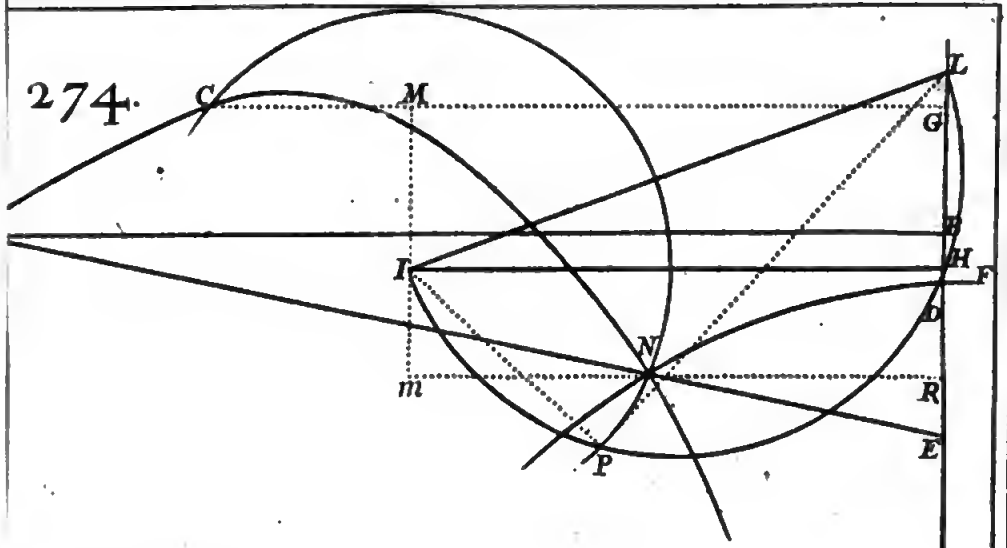
1. LOrſque l'équation eſt indeterminée, & que l'une des deux inconnuës ſeulement eſt élevée au cinquiéme ou ſixiéme degré ; on la fait arbitraire : & ſi l'autre ne montoit qu'au premier ou ſecond degré, l'on ſuivroit les Regles ; on conſtruiroit le Problême, qui ſeroit plan, comme on a dit Liv. 1. Part. 2. Mais ſi cette autre inconnuë étoit du troiſiéme ou du quatriéme degré ; on conſtruiroit le Problême, qui ſeroit ſolide, comme on l'a enſeigné, Liv. 3. Part. 4.

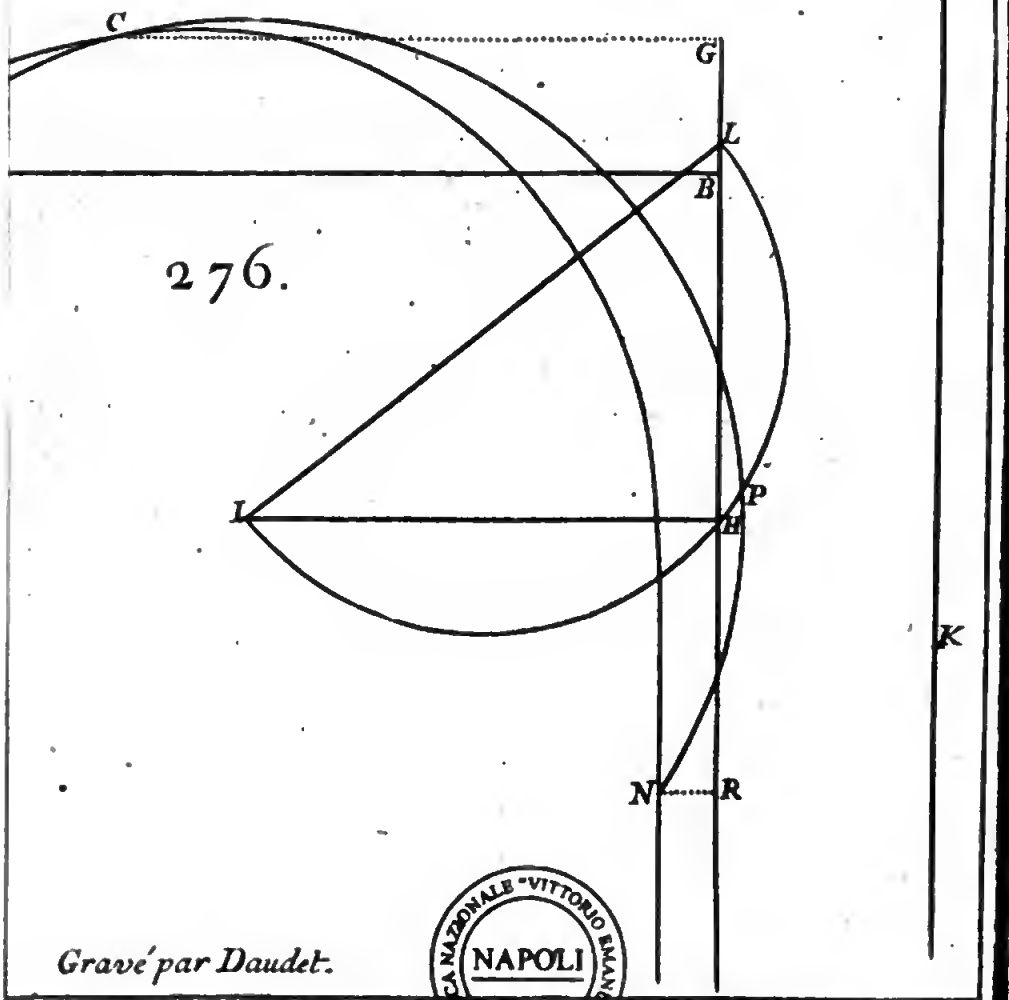
2. Lorſque l'équation eſt indeterminée, & que les deux inconnuës s'élevent juſqu'au cinquiéme, ou ſixiéme degré : l'on prend pour arbitraire l'une des deux, & l'on forme une équation à la parabole ordinaire, ou à la premiere parabole cubique, qui contient l'inconnuë de l'équation à conſtruire : avec cette équation l'on conclud un autre lieu, & le reſte comme Liv. 3. Part. 4.

3. Lorſque l'équation propoſée n'a qu'une inconnuë, & qu'elle eſt déterminée, l'on forme deux lieux comme l'on vient de le dire.

1°. Soit propoſée l'équation $x^5 = a^4 b$, $x^5 - a^4 b = 0$, qui ſert à trouver quatre moyennes proportionelles entre deux lignes données a, & b.

274.





276.

Gravé par Daudet.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE" NAPOLI

Multipliez-la par x, pour avoir $x^6 - a^4bx = o$. Prenez $xx = ay$ équation à la parabole quarrée ; donc $x^6 = a^3y^3$, qui étant ſubſtituée, il vient $a^3y^3 = a^4bx$, $y^3 = abx$ équation à la premiere parabole cubique.

Il faut conſtruire ces deux paraboles, Fig. 278. ſur l'axe AD vous décrirez la parabole cubique AEC ſuivant Liv. 2. Part. 1. Sect 4. Art. 3. dont le parametre eſt $\sqrt{ab}$; enſuite ſur le même axe vous décrirez la parabole quarrée AFC avec le parametre a. L'appliquée CD tirée du point C, où ces paraboles ſe coupent, ſur l'axe AD eſt la valeur de x premiere des quatre moyennes proportionelles. Nommez $AD = CB$, y ; $CD = AB$, x.

Dém. Par la nature de la parabole cubique, le cube de l'appliquée BC eſt égal au ſolide fait ſur le quarré du parametre & ſur l'abſciſſe AB, c'eſt-à-dire $y^3 = abx$. Par la nature de la parabole ordinaire le parametre $a \times AD = \overline{CD}^2$, $ay = xx$, $y = \frac{xx}{a}$. Subſtituez cette valeur de y dans $y^3 = abx$; vous aurez $\frac{x^6}{a^3} = abx$; $x^6 = a^4bx$; $x^5 = a^4b$.

Si l'on avoit d'abord pris l'équation à la parabole cubique $x^3 = aay$ & que l'on eût ſubſtitué cette valeur de x^3 dans $x^6 = a^4bx$; l'on auroit trouvé $a^4yy = a^4bx$, $yy = bx$ équation à la parabole quarrée.

Ces deux paraboles ont leur parametre different du parametre des paraboles de Fig. 278. à cela près la conſtruction eſt la même. FIG. 278.

Si l'on n'avoit pas élevé l'équation $x^5 - a^4b = o$ à la ſixiéme puiſſance, on n'auroit pû ſubſtituer qu'une fois aay pour x^3, en ſe ſervant de l'équation $x^3 = aay$, & la reduite ſeroit $aayxx = a^4b$, $xxy = aab$, équation à une hyperbole cubique entre ſes aſymptotes.

Le même arriveroit en ſe ſervant de l'équation $xx = ay$ à la parabole ordinaire, car on ſeroit encore $aayyx = a^4b$, $yyx = aab$.

Ainſi la conſtruction ſe feroit avec deux courbes du ſecond genre, au lieu qu'en élevant l'équation au ſixiéme degré, l'on conſtruit le Problême avec une courbe du premier degré & une du ſecond.

2°. Soit propoſée l'équation $x^6 = a^5b$, qui ſert à trouver cinq moyennes proportionelles entre deux lignes données a & b.

Prenez $xx = ay$ équation à la parabole ordinaire, la ſubſtitution donnera $a^3y^3 = a^5b$, $y^3 = aab$.

Faites Fig. 279. la parabole quarrée AC, dont le parametre eſt a, l'axe AD, le ſommet A. Décrivez la même parabole AH ſur l'axe AG perpendiculaire à AD. FIG. 279.

Prenez $AF = \frac{1}{2}a$, élevez $EF = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire ſur AG, du centre E, du rayon EA décrivez le cercle AH, qui coupe la parabole AH au point H ; appliquez HG ; par le point H menez HD parallele à AG, qui coupera la parabole AC au point C ; menez encore CB parallele &

égale à $HG = AD$; $CD = AB$ eſt la premiere des cinq moyennes proportionelles. Nommez $CD = AB$, x; $AD = BC = GH$, y.

Dém. Suivant l'Ex. 1. Art. 1. Sect. 1. Part. 4. vous avez au point H, $y^3 = aab$; & $HG = y = \sqrt{C}.\ aab = BC = AD$. Maintenant par la nature de la parabole AC; vous avez $a \times AD = \overline{CD}^2$, $ay = xx$; & $y = \frac{xx}{a}$. Donc $y = \frac{xx}{a} = \sqrt{C}.\ aab$; $\frac{x^4}{a^2} = aab$; $x^6 = a^5 b$.

Prenez à preſent l'équation $x^3 = aay$ à la parabole cubique; par la ſubſtitution l'équation $x^6 = a^5 b$ ſe changera en $a^4 yy = a^5 b$; $yy = ab$.

Fig. 280. Décrivez Fig. 280. la parabole cubique AC, dont le parametre eſt a, l'axe AD. Prenez $AB = a$, $AF = b$; ſur le diametre BF décrivez le demi-cercle BDF; la perpendiculaire AD eſt 13. 6. Eucl. $\sqrt{ab}$.

Appliquez CD à la parabole cubique. Par la nature de cette parabole le cube de CD eſt égal au ſolide ſous l'abſciſſe AD & le quarré du parametre a, c'eſt à dire $x^3 = aay$, en nommant CD, x; AD, $y = \sqrt{ab}$.

Pour y ſubſtituez $\sqrt{ab}$ dans $x^3 = aay$, vous ferez $x^3 = aa\sqrt{ab}$, $x^6 = a^5 b$.

Fig. 281. 3° Soit propoſée l'équation $z^5 - 5z^3 + 5z - b = 0$, qui ſert à diviſer un arc donné en cinq parties égales.

Je prends $ay = zz$, & je ſubſtituë la valeur de zz dans la propoſée, il ſe fait $aayyz - 5ayz + 5z - b = 0$. $z = \frac{b}{aayy - 5ay + 5}$.

Suivant les Regles de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3. je décris la courbe ACD, Fig. 281. dont l'axe eſt BF. Enſuite ſur le même axe je décris la parabole ordinaire BCD, qui coupe la premiere courbe aux points C, D. Nommons les appliquées CE, DF, z; les abſciſſes BE, BF, y. La droite CE, diviſe l'arc donné en cinq parties égales, & la droite FD diviſe le reſte du cercle en cinq parties égales.

Dém. Par la nature de la courbe ACD, l'on a au point C, $z = \frac{b}{aayy - 5ay + 5}$, ou $aayyz - 5ayz + 5z - b = 0$. Par la nature de la parabole BCD, l'on a au même point C, le parametre $\times BE = \overline{EC}^2$, $ay = zz$. Pour ay ſubſtituez zz dans l'équation precedente, vous ferez $z^5 - 5z^3 + 5z - b = 0$.

On peut prendre $aay = z^3$, & la ſubſtitution donne $aayzz - 5aay + 5z - b = 0$, $y = \frac{b - 5z}{aazz - 5aa}$.

On conſtruit le Problème en décrivant la parabole cubique ACD, & la courbe BCD ſuivant les Regles de Liv. 2. Part. 1. Sect. 4. Art. 3. §. 3.

Les deux appliquées CE, DF tirées des points d'interſection C, D ſur l'axe, donnent les deux droites, qui diviſent en cinq parties égales & l'arc donné & le reſte du cercle.

Dém. Au point D, l'on a pour la courbe BCD, $y = \frac{b - 5z}{aazz - 5aa}$, ou $aayzz - 5aay + 5z - b = 0$. Au même point D l'on a pour la

parabole cubique ACD, $aay = z^3$; & en ſubſtituant z^3 pour aay dans la precedente équation, il vient $z^5 - 5z^3 + 5z - b = 0$.

4°. Soit propoſée l'équation $x^6 - ax^5 - 5aax^4 + 4a^3x^3 + 6a^4xx - 3a^5x - a^6 = 0$. qui ſert à inſcrire une Figure reguliere de treize côtez dans un cercle.

Si nous prenons $aay = x^3$, la ſubſtitution reduira la propoſée à $a^4yy - a^3yxx - 5a^4xy + 4a^5y + 6a^4xx - 3a^5x - a^6 = 0$.

Si nous prenons $ay = xx$, la transformée ſera $a^3y^3 - a^3yyx - 5a^4yy + 4a^4xy + 6a^5y - 3a^5x - a^6 = 0$. $x = \frac{y^3 - 5ayy + 6aay - a^3}{yy - 4ay + 3aa}$,

Avec cette équation je décris la courbe GC, dont FE eſt une aſymptote, & avec $ay = xx$ je decris la parabole qaarrée ACE. L'appliquée CD eſt un côté de la Figure reguliere de treize côtez. Fig. 182.

SECTION IV.

Deſcription des Courbes par leur Equation du cinquiéme ou du ſixiéme degré.

SI les deux inconnuës ſont du cinquiéme ou du ſixiéme degré, l'on en fera une arbitraire, & l'on transformera, s'il eſt neceſſaire, l'équation en une de ſix dimenſions, qui ait les conditions que M. DESCARTES demande Sect. 1. & l'on cherchera chaque point de la courbe en conſtruiſant autant de fois le Problême, qu'on voudra trouver de differens points. Le reſte n'eſt pas different de ce qu'on a dit, Part. 4. Sect. 2. Art. 5.

CONCLUSION.

M. DESCARTES.

Mais mon deſſein n'eſt pas de faire un gros Livre, & je tâche plûtôt de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peut-être que j'ai fait, ſi on conſidere, qu'ayant reduit à une même conſtruction tous les Problêmes d'un même genre, j'ai tout enſemble donné la façon de les reduire à une infinité d'autres diverſes; & ainſi de reſoudre chacun d'eux en une infinité de façons. Puis outre cela, qu'ayant conſtruit tous ceux qui ſont plans, en coupant d'un cercle une ligne droite; & tous ceux qui ſont ſolides,

en coupant auſſi d'un cercle une parabole, & enfin tous ceux qui ſont d'un degré plus cõpoſez, en coupant tout de même d'un cercle une ligne, qui n'eſt que d'un degré plus compoſée que la parabole ; il ne faut que ſuivre la même voye, pour conſtruire tous ceux qui ſont plus compoſez à l'infini. Car en matiere de progreſſions Mathematiques, lorſqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eſt pas mal-aiſé de trouver les autres. Et j'eſpere que nos neveux me ſauront gré, non ſeulement des choſes, que j'ai ici expliquées ; mais auſſi de celles, que j'ai omiſes volontairement, afin de leur laiſſer le plaiſir de les inventer.

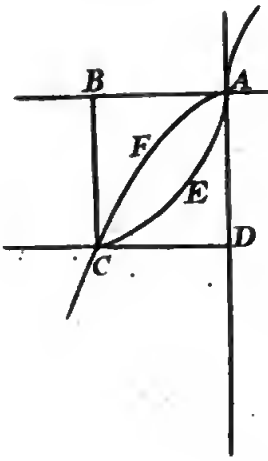
Cet endroit de M. DESCARTES n'a pas beſoin de Commentaire. C'eſt un précis de ce qu'il a executé dans ſa Geometrie. J'ai tâché de la rendre ſenſible au Lecteur, & je ſuis perſuadé, comme je l'ai dit au commencement, que quelque étendu que ſoit en beaucoup d'endroits mon Commentaire, on aura encore plûtôt lû & compris le Texte avec le Commentaire que le Texte tout ſeul.

FIN.

De l'Imprimerie de CLAUDE PERROT, Ruë Confort, à l'Epée Royale.

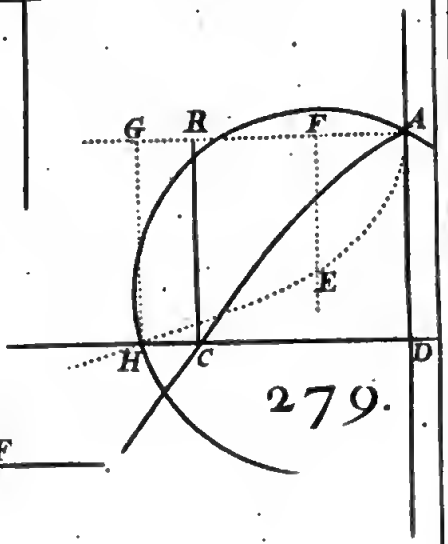
C16475

K



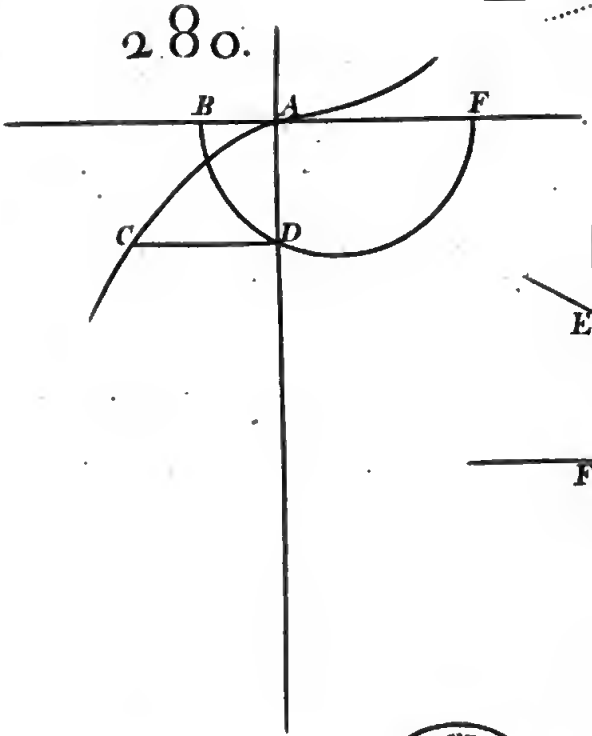
a
b

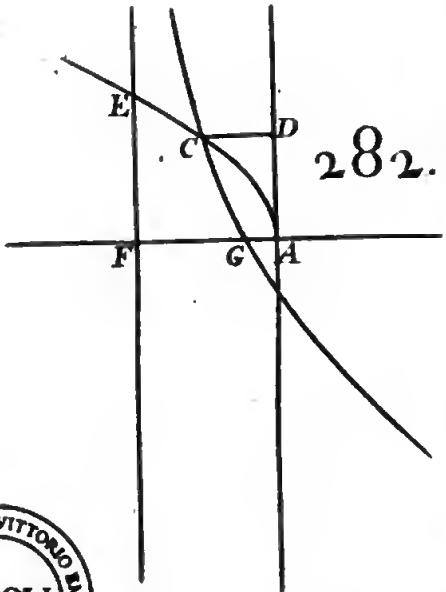
278



279.

280.





282.

Gravé par Daudet.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE"
NAPOLI

APPROBATION.

J'Ai lû par Ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, un Manuſcrit qui a pour Titre; *Commentaires ſur la Geometrie de* M. DESCARTES, *par le* P. C. RABUEL *de la Compagnie de* JESUS. Il eſt à ſouhaitter que les autres Ouvrages d'Algebre & de Geometrie, du même Auteur, ſuccedent bientôt à celui-ci dont il m'a parû que l'Impreſſion ſeroit utile. Fait à l'Obſervatoire Royal de Paris le huitiéme Novembre mil ſept cens vingt-ſept.

GODIN.

PRIVILEGE GENERAL.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE, à nos Amez & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; SALUT, Nôtre bien Amé le Pere ***. Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaitteroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de ſa Compoſition qui a pour Titre, *Commentaires ſur la Geometrie de* M. DESCARTES, *par le* P. C. RABUEL, *de la Compagnie de* JESUS, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce neceſſaires; offrant pour cet effet de le faire imprimer en beau papier & beaux caracteres, ſuivant la feüille imprimée & attachée pour modele ſous le contre ſcel des Preſentes; A CES CAUSES, voulant traitter favorablement ledit Expoſant; Nous lui avons permis & permettons par ces Preſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage ci-deſſus expoſé, en un ou pluſieurs Volumes, conjointement ou ſeparément, & autant de fois que bon lui ſemblera; ſur papier & caracteres conforme à ladite feüille imprimée & attachée pour modéle ſous nôtre dit contreſcel, & de le faire vendre & debiter par tout nôtre Royaume, pendant le tems de dix années conſecutives, à compter du jour de la datte des Préſentes; FAISONS défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'Impreſſion étrangere dans aucun lieu de nôtre Obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage ci deſſus expoſé, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits ſous quelque pretexte que ce ſoit d'augmentation, correction, changement de Titre ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui; à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amande contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Preſentes ſeront Enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'Impreſſion de cet Ouvrage ſera faite dans nôtre Royaume & non ailleurs; & que l'Impetrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. & qu'avant que de l'expoſer en vente, le Manuſcrit ou Imprimé qui aura ſervi de Copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de nôtre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le

Digitized by Google

ſieur CHAUVELIN, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans nôtre Bibliotheque publique, un dans celle de nôtre Château du Louvre, & un dans celle de nôtredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le ſieur CHAUVELIN; le tout à peine de nullité des Preſentes, du contenu deſquelles Vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Expoſant ou ſes Ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie deſdites Preſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée; & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos Amez & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier nôtre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & neceſſaires ſans demander autre permiſſion; & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel eſt nôtre plaiſir. Donné à Paris le vingt-ſixiéme jour du mois de Novembre, l'an de grace mil ſept cens vingt ſept, & de nôtre Regne le treiziéme.

Signé, PAR LE ROY, en ſon Conſeil.

CARPOT.

Regiſtré ſur le Regiſtre VII. de la Chambre Royale & Syndicale de la Librairie & Imprimerie de Paris, Numero 24. fol. 23. conformément au Reglement de 1723. qui fait défenſes Art. IV. à toutes Perſonnes de quelque qualité qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, debiter, & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs, ou autrement; & à la charge de fournir les Exemplaires preſcrits par l'Article CVIII. du même Reglement, à Paris le neuviéme Decembre mil ſept cens vingt-ſept.

BRUNET, *Syndic.*

Permiſſion du Reverend Pere Provincial.

JE ſouſſigné Provincial de la Compagnie de JESUS, dans la Province de Lyon, ſuivant le pouvoir que j'ai reçû de nôtre R. P. General, permets au Pere CLAUDE RABUEL, de faire imprimer ſon Ouvrage, qui porte pour Titre, *Commentaires ſur la Geometrie de* M. DESCARTES; en foi & témoignage de quoi j'ai ſigné la preſente Permiſſion. A Lyon, le 24. Mars 1728.

CHARLES DU BOIS.

CESSION DU PRIVILEGE.

Le Privilége ci-deſſus a été cedé par le P. RABUEL Jeſuite, à MARCELLIN DUPLAIN, Libraire, pour en joüir ſuivant leurs Conventions.

Fautes à corriger avant que de lire cet Ouvrage.

QUelque ſoin qu'on ait pris pour rendre correcte cette Edition, on n'a pû éviter bien des fautes que le grand nombre des calculs & des caracteres algebriques occaſionnent & introduiſent comme neceſſairement. On a tâché d'aſſembler ici toutes celles, qui ſont répanduës dans la ſuite de ces Commentaires, il n'en eſt aucune qu'un Lecteur un peu attentif ne corrige ſur le champ. Comme page 5. ligne 27. $\frac{2x^3}{}$, il eſt évident par la lecture de ce qui précede qu'il faut lire en cet endroit $\frac{2x^3}{cc}$. Les autres fautes ſont à peu près de même nature. On n'a pas laiſſé pourtant de les marquer pour épargner aux Commençans la peine d'examiner, s'ils ne ſont point dans l'erreur, lorſque leur doute n'eſt fondé que ſur une faute d'impreſſion. On en a negligé quelques-unes, comme des fautes d'ortographe, qui n'intereſſent en aucune façon la Geometrie.

Page *17.* ligne *35.* c'eſt pourquoi la ligne, *liſez*, c'eſt pourquoi dans la ligne. p. *19.* l. *11.* c^3zd^4, *l.* $c^3z + d^4$. p. *25.* *à la marge*, Figure 10. *l.* Figure 11. page 27. l. *24.* $\sqrt{aa + \frac{1}{4}bb}$, *liſez* $\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$. page *29.* l. *6.* demi Axe, *AB*, *l. AE.* p. *34.* *l. 11.* $\frac{1}{2} - a$, *l.* $-\frac{1}{2}a$. p. *43.* l. *23.* $+\frac{1}{4}cc$, *l.* $-\frac{1}{4}cc$. p. *44.* l. *14.* $\frac{3bb}{p}$, *l.* $\frac{3bb}{2p}$. p. *45.* l. *18.* $\frac{1}{4}c$, *l.* $\frac{1}{2}c$. p. *49.* l. *10.* $zz \pm az$. *l.* $zz \mp$. l. *13.* *même faute.* l. *14.* $\pm \frac{1}{2}a$, *l.* $\mp$ p. *51.* l. *9.* $x \pm \sqrt{}$&c. *l.* $z = \pm\sqrt{}$. p. *52.* l. *16.* $z = \frac{1}{4}a$, *l.* $\frac{1}{2}a$. p. *56.* l. *23.* *Ck*, *l. ck.* p. *76.* l. *23.* $- dy$, *l.* $- zy$. p. *80.* l. *14.* $y = -bdd + \frac{1}{2}cez$, *l.* $\frac{-bdd + \frac{1}{2}cez}{dd - ez}$ p. *82.* l. *10.* $xx \pm ax$, &c. *l.* $xx = \pm ax$. p. *99.* l. *7.* *Cſ*, *l. Cf.* p. *103.* *l. 22.* l'axe, *l.* l'arc. p. *104.* l. *33.* *EH*, *l. EK.* p. *125.* l. *1.* y^3pzz, *l.* $y^3 = pz$. l. *28.* $- 2bxyy\ 2abxy$, *l.* $- 2bxyy. +$ p. *126.* l. *19.* $\frac{xy}{a-y}$, *l.* $\frac{xy}{a-y}$. p. *129.* l. *17.* à l'équation $x = \frac{1}{4}a^3$, &c. ajoûtez $+ 2a^3$. l. *32.* $- x = \sqrt{\frac{1}{4}a}$, *l.* $- x = \frac{1}{4}a$ p. *130.* l. *30.* $x = a$, *l.* $x = 0$. p. *131.* l. *12.* $- 128$. *l.* $= 128$. l. *19.* $- 2a^3$, *l.* $+ 2a^3$. p. *134.* l. *6.* $= 6$, *l.* $= 0$. l. *23.* $\frac{2}{4}aMK$, *l.* $\frac{2}{4}a = MK$. p. *136.* l. *13.* $\sqrt{-\frac{7}{16}}$, *l.* $\sqrt{-\frac{7}{16}aa}$. l. *26.* $\pm y\sqrt{}$ &c. *l.* $\pm y = \sqrt{}$. p. *137.* l. *14.* $y^3 - pzz$, *l.* $y^3 = pzz$. p. *140.* l. *16.* $\frac{aayy}{aa+bb}$, *l.* $\frac{aayy}{aa-bb}$. p. *141.* l. *13.* *SKF*, *l. SKT.* l. *21.* $\frac{aa-bx}{a}$, *l.* $\frac{aa+bx}{a}$. p. *144.* l. *22.* $zz - a\sqrt{px}$, *l.* $zz =$. l. *34.* $n - s$, *l.* $a - s$. p. *154.* à la marge, Fig. 64. *l.* Fig. 69. p. *155.* l. *25.* $\sqrt{mm + \omega x}$, *l.* $+\sqrt{}$. p. *159.* l. *12.* *Gc*, *l. Cc.* p. *164.* l. *3.* $NH = NB$, *l.* ND. p. *167.* l. *33.* $y - \sqrt{}$&c. *l.* $y = \sqrt{aa - xx}$. p. *168.* l. *14.* $y + \frac{p}{a}xx$, *ôtez*, *y*. p. *176.* l *9.* *AZ*, *l. Az.* p. *178.* l. *28.* $- bx; + y$, *l.* $- bx + y$. p. *190.* l. *3.* *EF*, *men E*, *l. EF en E.* l. *16.* $\sqrt{-mm\frac{p}{m}xx}$, *l.* $\sqrt{-mm - \frac{p}{m}xx}$. p. *194.* l. *5.* *z*, *l. Z.* l. *28* $\frac{ax}{x}$, *l.* $\frac{ax}{z}$. p. *195.* l. *28.* $\sqrt{mm + \omega x + \frac{p}{m}x}$, *l.* $\sqrt{\ldots} - \frac{p}{m}x$. p. *196.* l. *31.* $CB \times CD$, *l.* $CB \times CF$, & $CF \times CH$, *l.* $CD \times CH$. p. *200.* l. *12.* $p - mnn$, *l.* $p = mnn$. p. *201.* ligne derniere *Iv*, *IM*, *l. Iv — IM.* p. *202.* l. *15.* $\frac{a}{z}\sqrt{\frac{1}{4}}$, *l.* $\frac{a}{z} = \sqrt{\frac{1}{4}}$. p. *204.* l. *18.* $- \frac{1}{2}y$, *l.* $= \frac{1}{2}y$. p. *206.* l. *5.* $\frac{p}{m}vv$, *l.* $\frac{m}{p}vv$. p. *214.* l. *7.* *BA*

$+An$, $x-a$, *l.* $x+a$. p. 216. l. 10. $4mp$, *l.* $\sqrt{4mp}$. p. 218. l. 20. $n\frac{1}{2}$. *l.* $n=\frac{1}{2}$. p. 220. l. 2. $y-\frac{n}{z}x$ &c. *l.* $y=\frac{-n}{z}x$. p. 221. l. 3. au Titre $-\frac{r}{m}xx$, *l.* 1. $+\frac{r}{m}xx$. 235. l. 1. $\sqrt{\frac{+aauumm}{ppzz}}$, *l.* $\sqrt{\frac{aauumm}{ppzz}}$. p. 240. l. 36. *CS*, *l. CR.* p. 241. l. 22. $\frac{9}{16}bb\sqrt{5}$, *l.* $\frac{9}{16bb}\sqrt{5}$. p. 243. l. 21. $\sqrt{mm+\omega x+\frac{p}{m}xx}$, *l.* $\sqrt{\ldots\ldots}-\frac{p}{m}xx$. p. 244. l. 31. $\frac{aauummm}{4ppzzz}$, *l.* $\frac{aauummm}{2ppzzz}$. *l.* 32. $\frac{aauummm}{2ppzzz}$, *l.* $\frac{aauummm}{2ppzzz}$. l. 37. même faute. p. 261. *l.* 9. $\frac{-xy}{2n-y}$, *l.* $-\frac{xy}{2n-y}$. *l.* 13. $y+a$, *l.* $-y+a$. p. 263, l. 13. *kn*, *l. KN*. p. 264. à la marge Fig. 123. *l.* Fig. 128. p. 272. l. 13. *BPDr*, *l. BP* = *Dr*. l. 24. Toute la courbe *CiY* & *CP* une de ſes ordonnées *eſt inutile*. p. 273. l. 15. axe, *l.* arc. p. 279. l. 27. — *x*, *l.* $a-x$. p. 303. l. 31. $+2bcdez$, *l.* $-2bcdez$. l. 33, *bdddss*, *l. bddss*. p. 308. l. 35. *quy*, *l. qry*. p. 313. l. 8. *ddv*, *l.* $-ddv$. l. 16. *2bdvz*, *liſez* *2bdevz*. l. 17. *ef*, *l. 2f*. p. 315. l. 25. *2ey*, *l. yy* — *2ey*. p. 316. l. 17. $+2ax$, *l.* $-2ax$. p. 320. l. 31. *ee*, *l.* $+ee$. p. 336. l. 10. $2yy-qy$, *l.* $2yy=qy$. p. 356. l. 18. 2 : 1, *l.* 3 : 2. p. 375. l. 23. l'air, *l.* l'arc. p. 383. l. 24. $-dz$, *l.* $-dk$. p. 385. l. 24. *d* à *c*, *l. d* à *e*. p. 386. l. 26. Article 2. *l.* Artticle 3. p. 393. l. 5. $-hz$, *l.* $+hz$. p. 410. l. 2. $x\pi$ *l.* $\pi\pi$. p. 426. l. 22. $+2abx$, *l.* $-2abx$. p. 434. l. 29. $y+a$ &c. *l.* $y-a$. p. 436. l. 4. $y+70$, *l.* $y+7=0$. p. 446. l. 2. $aaddff=0$. *l.* $aaddff=0$. p. 452. l. 12. $-4ax^3$, *l.* $-4a^3x$. p. 516. l. 23. $-zz$, *l.* $-2z$. p. 551. l. 24. $\frac{7919}{250}$, *l.* $-\frac{7919}{256}$. p. 523. l. 22. Fig. 239. *l.* Fig. 232. p. 525. l. 16. $-qz$, *l.* $+qz$. p. 539. l. 7. *DK*, &c. *l. Dk*. p. 541. l. 29. $\overline{EF}^3$, *l.* $\overline{EF}^2$. p. 544. l. 4. Regle 7. *l.* Regle 6. p. 548. l. 15. $\frac{1}{2}qq$, *l.* $\frac{1}{2}q$. p. 550. ligne derniere — 132496, *l.* = 132496. p. 552. ligne 14. $\frac{z^4}{\frac{1}{3}pz}$; *l.* $\frac{z^4}{-\frac{1}{3}pz}$. p. 556. l. 22. $-32aa^3$, *l.* $32a^3$. p. 570. l. 14. $\frac{\sqrt{2v}}{pn}$, *l.* $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$. p. 582. l. 10. y^6-6a^5y, *l.* y^6-6ay^5. p. 581. l. 34. $xxvz+zz$, *l.* $xx=vz+zz$. l. 36. $s=\frac{v+\&c.}{x}$ *l.* $s=\frac{vv+\&c.}{x}$

même ligne, *NY*, *l. NT*.